Existenz eines kompetitiven Gleichgewichts in einer Wirtschaft mit Produktion und abzählbar unendlich vielen Haushalten

von

Manfred NERMUTH

Forschungsbericht Nr.85

Juni 1974

I N H A L T

INHALT

E I N L E I T U N G

1. Motivation

1.1.

In der allgemeinen Gleichgewichtstheorie wurden ursprünglich endliche Modelle betrachtet (ARROW-DEBREU (1954), DEBREU (1959)). AUMANN (1964, 1966) studierte ein Kontinuum von Haushalten, HILDENBRAND (197o a) führte Produktion in dieses Modell ein, und bewies einen Approximationssatz (HILDENBRAND (197o b)) für kontinuierliche Ökonomien durch endliche Ökonomien. BEWLEY (1972) betrachtet kontinuierlich viele Güter.

1.2.

Kontinuierliche Modelle haben den Vorteil, daß in ihnen sehr schöne Sätze gelten, die im endlichen Fall nicht oder nur approximativ erfüllt zu sein brauchen. Das liegt an der echten "Infinitesimalität" des einzelnen Haushalts im kontinuierlichen Modell. Diese zieht gewisse begriffliche Schwierigkeiten nach sich, denn die vorhandene Gesamtausstattung ist per definitionem gleich dem Integral über die "individuellen Ausstattungen", ein Integral ist aber, anschaulich gesprochen, keine Summe, sondern ein Mittelwert. Die "Ausstattung" eines einzelnen Haushaltes ist also eigentlich keine solche, sondern nur eine Art Dichte, welche angibt, wie stark oder schwach die über das Kontinuum verteilte Gesamtausstattung bei dem betreffenden Haushalt konzentriert ist. Erst Integrale über Koalitionen positiven Maßes haben den Charakter von Ausstattungen im üblichen ökonomischen Sinne. Analoges gilt für die "individuellen Nachfragen".

1.3.

Solche Überlegungen legen es nahe, den zwischen dem endlichen und dem kontinuierlichen Modell liegenden Fall abzählbar unendlich vieler Haushalte näher zu betrachten. Freilich darf man dabei nicht eine "unendlich oft replizierte" Ökonomie (über Replikation s.z.B. DEBREU u. SCARF (1972)) nehmen, denn diese wäre der Grenzwert einer Folge von Ökonomien, wo die Zahl der Haushalte gegen unendlich strebt , die Ausstattung jedes einzelnen Haushalts, relativ zur Gesamtausstattung, aber gegen Null; Gesamtnachfrage und -angebot wären nicht wohldefiniert.

2. Unser Modell

2.1.

Wir gehen von einer fixen, endlichen Gesamtausstattung aus, die auf abzählbar unendlich viele Haushalte aufgeteilt ist, und zwar so, daß die Summe der individuellen Ausstattungen absolut konvergiert. Die absolute Konvergenz ist notwendig, weil sonst die Summe von der Reihenfolge, in der die Haushalte numeriert sind, abhinge, bzw. überhaupt nicht definiert wäre. Bei absolut konvergenten Reihen ist das nicht so, man kann mit ihnen überhaupt in vieler Hinsicht so rechnen wie mit endlichen Summen, und darum hat unser Modell, wie sich zeigen wird, im großen und ganzen mehr Ähnlichkeit mit dem endlichen Fall als mit dem kontinuierlichen.

2.2.

Die Hauptschwierigkeit bei der Führung eines Existenzbeweises für ein kompetitives Gleichgewicht mit unendlich vielen Haushalten liegt darin, daß die aggregierte Nachfrage i.a. nicht definiert, d.h. nicht als Summe einer absolut konvergenten Reihe darstellbar ist. Dieses Problem läßt sich lösen, indem man eine Folge von "Hilfs-Gleichgewichten" konstruiert, und dann in geeigneter Weise einen Grenzübergang vollzieht. Unser Verfahren ist verwandt mit der von AUMANN (1966) entwickelten Methode.

2.3.

Was den eigentlichen Existenzbeweis betrifft, so folgen wir aber nicht AUMANN (1966) - der seinerseits eine von McKENZIE (1959) stammende Idee modifizierte -, sondern NIKAIDO (1968), an den sich unser ganzer Aufbau überhaupt enge anlehnt. Im Grunde beruhen natürlich alle diese Beweise auf einem Fixpunktsatz. Wir stützen uns auf den von KAKUTANI, und zwar gleich in Form eines für unsere Zwecke praktischen Lemmas, das in der Literatur wiederholt anzutreffen ist (Lemma 1.3.)

2.4.

Im Gegensatz zu den unendlich vielen Haushalten bereitet das Hinzufügen von endlich vielen Firmen und damit die Einführung von Produktion in die Tauschwirtschaft verhältnismäßig wenig Probleme. Im folgenden wird das Modell gleich inklusive Produktion formuliert, der Spezialfall der reinen Tauschwirtschaft ist darin trivialerweise enthalten.

2.5.

Die einzelnen Axione über Haushalte und Firmen sind in der Literatur ausführlich diskutiert worden, sodaß wir auf eine Erläuterung ihrer ökonomischen Relevanz verzichten zu können glauben. Im übrigen führen wir keine Nutzenfunktionen ein, obwohl unsere Annahmen das gemäß DEBREU (1954) gestatten würden.

3. Mathematische Voraussetzungen

Diese sind im wesentlichen in NIKAIDO (1968) enthalten. Einige Resultate über unendliche Reihen, Ordnungsrelationen und Korrespondenzen sind in §1 zusammengestellt.

4. Ökonomische Interpretation

Gemäß dem Grundsatz [DEBREU (1959), p.viii] "The theory .. is logically entirely disconnected from its interpretations" wird in §§1-5 auf ökonomische Interpretationen verzichtet, um den roten Faden der mathematischen Deduktion, der von den Axiomen (H1)-(H7), (F1)-(F4), (H-F) aus §2 bis zu Satz 5.1. in §5 führt, möglichst wenig zu verwickeln. Im übrigen fürchten wir, zu der im Gange befindlichen Kontroverse über Sinn und Unsinn der Allgemeinen Gleichgewichtstheorie (vgl.z.B. KORNAI (1971), KALDOR (1972), HAHN (1973)) an dieser Stelle nichts beitragen zu können . Demgemäß enthält auch §6 keine inhaltliche Kritik der Resultate aus §§1-5, sondern nur eine kurze ökonomische Interpretation, um den Zusammenhang mit der übrigen einschlägigen Literatur herzustellen.

Schließlich möchte ich noch den Herren Gerhard Schwödiauer und Franz Haslinger, die mich mit der Gleichgewichtstheorie bekannt gemacht haben, Herrn Abdur Rahman, der die vorliegende Arbeit mit mir diskutiert hat, und Frl. Irene Hafner, die sie geschrieben hat, herzlich danken.

Wien, im Juni 1974 Manfred Nermuth

§1 Mathematische Voraussetzungen

1.1. Bezeichnungen

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^m \end{pmatrix}$$ Vektor im m-dim. euklidischen Raum R^m

j-ter Einheitsvektor: $e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \cdot\cdot\ j \\ \\ \\ \end{array}$ $(j = 1,\ldots m)$

Nullvektor: $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ Einheitsvektor: $1_m = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

Im folgenden werden obere Indizes ausschließlich zur Bezeichnung von Koordinaten verwendet. Eine Größe mit einem oberen Index, z.B. x^j, y^j, p^j ist also immer ein reeller Skalar, und zwar die j-te Koordinate eines Vektors x,y oder p.

Das innere Produkt (Skalarprodukt) zweier Vektoren x,y ist definiert durch:

$$x.y = \sum_{j=1}^{m} x^j\, y^j$$

die Norm (der Absolutbetrag) eines Vektors: $|x| = \sqrt{x.x}$
es gilt:

$|x+y| \leq |x| + |y|$ Dreiecksungleichung

$x.y \leq |x| \, . \, |y|$ Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung

Wir führen folgende Bezeichnung ein:

$x \leqq y$	heißt	$x^j \leqq y^j$	für $j = 1,2,..m$	"kleiner-gleich"
$x < y$	heißt	$x \leqq y$	und $x \neq y$	"halbstrikt kleiner"
$x << y$	heißt	$x^j < y^j$	für $j = 1,..m$	"strikt kleiner"

Die umgekehrten Relationen heißen entsprechend "größer-gleich", etc..
Ein Vektor x heißt nichtnegativ, halbstrikt bzw. strikt positiv, je nachdem er größer-gleich, halbstrikt oder strikt größer als 0 ist.

Diese Bezeichnungen gelten sinngemäß für Zahlenfolgen, d.h. "Vektoren mit unendlich vielen Koordinaten" (vgl.Def. 3.9(i)).
Der nichtnegative Orthant S ist die Menge aller nichtnegativen Vektoren im R^m, das Standardsimplex P die Menge aller x aus S, für die gilt:

$$\sum_{j=1}^{m} x^j = 1$$

Die Summe $\sum_{i=1}^{n} X_i$ von endlich vielen Teilmengen $X_1,..\ X_n$ des R^m ist die Menge aller Punkte x der Gestalt: $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$, wo x_i aus X_i, $i = 1,..n$.

Der R^m ist ein lokal kompakter topologischer Raum mit abzählbarer Basis, dessen Topologie durch die mittels der Metrik $d(x,y) = |x - y|$ definierte uniforme Struktur induziert wird.

Eine Folge $(x_1, x_2,...)$ von Punkten im R^m heißt konvergent mit Limes x, falls gilt: $\lim_{i \to \infty} |x_i - x| = 0$

1.2. Unendliche Reihen im R^m

Sei $(x_1, x_2, \ldots)$ eine Folge von Punkten im R^m.

$s_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$ heißt n-te Partialsumme

Die Folge $(s_1, s_2, \ldots)$ heißt Reihe (mit Gliedern x_i) und wird mit $\Sigma x_i = \sum_i x_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$ bezeichnet (unabhängig von ihrer evtl. Konvergenz).

Def.1.1: Die Reihe Σx_i heißt (bedingt) konvergent, falls die Folge ihrer Partialsummen $(s_1, s_2, \ldots)$ konvergiert.
$x = \lim_{n\to\infty} s_n$ heißt Wert oder Summe der Reihe.

Sei $k : i \to k_i$ eine Bijektion der natürlichen Zahlen auf sich selbst. Man sagt: die Folge $(x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots)$ ist aus $(x_1, x_2, \ldots)$ durch Umordnung entstanden. Die Reihe $\sum_i x_{k_i}$ ist aus $\sum_i x_i$ durch Umordnung entstanden.

Die bedingte Konvergenz einer Reihe gemäß Def.1.1 bleibt bei Umordnung i.a. nicht erhalten.

Def.1.2: Die Reihe Σx_i heißt absolut konvergent, falls die Reihe $\Sigma |x_i|$ konvergiert.

Beh.1.1: Falls Σx_i abs. konv. ist, so ist Σx_i und jede daraus durch Umordnung entstandene Reihe konvergent, und alle diese Reihen haben den gleichen Wert $x = \Sigma x_i$.

Beh.1.2: Sei $x = \Sigma x_i$, $y = \Sigma y_i$ abs.konv.. Dann ist

$\Sigma(x_i + y_i)$ abs. konv. und $= x+y$, und
$\Sigma(r.x_i)$ abs. konv. und $= r.x$ für jede reelle Zahl r.

<u>Beh.1.3</u>: Sei x_i aus S für alle i. Dann ist Σx_i absolut konv. genau dann, wenn Σx_i bedingt konv. ist.
Bew.: Beh.1.1 - 1.3 sind wohlbekannt.

<u>Def.1.3:</u> Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von Mengen im R^m mit der Eigenschaft: für beliebige x_i aus X_i $(i=1,2,..)$ gilt stets: Σx_i ist abs.konv.. Dann heißt ΣX_i abs.konv. und die Menge $X = \Sigma X_i = \{ x = \Sigma x_i \mid x_i \text{ aus } X_i \}$ heißt die Summe der X_i, $i = 1,2,\ldots$.

<u>Beh.1.4:</u> Sei ΣX_i abs.konv. und sei Y_i Teilmenge von X_i für $i = 1,2,..$. Dann ist ΣY_i abs. konv.
Bew.: klar

<u>Beh.1.5:</u> ΣX_i ist genau dann abs.konv., wenn eine abs. konv. Reihe Σb_i von nichtnegativen Zahlen b_i existiert sodaß für hinreichend große i gilt:

$$|x_i| \leqq b_i \qquad \text{für} \qquad x_i \text{ aus } X_i \text{ .}$$

Bew.: gemäß Def.1.2 ist die Bedingung klarerweise hinreichend.
Sei nun ΣX_i abs. konv.

Wir setzen $b_i := \sup\limits_{x_i \varepsilon X_i} |x_i|$

b_i ist $\geqq 0$, evtl. $= \infty$.

Zunächst können höchstens endlich viele $b_i = \infty$ sein, denn sonst gäbe es unendlich viele x_i aus X_i mit (z.B.) $|x_i| \geqq 1$, und $\Sigma |x_i|$ wäre nicht konvergent.

Sei also i_o ein Index, so groß, daß b_i endlich ist für alle $i \geqq i_o$.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt, und seien c_i positive Zahlen, sodaß $\sum\limits_{i=i_o}^{\infty} c_i < \varepsilon$.

Nach Def. der b_i existiert für alle $i \geqq i_o$ ein x_i aus X_i mit $|x_i| \geqq b_i - c_i$. Daraus folgt:

$$\underbrace{\sum_{i=i_o}^{\infty} |x_i|}_{\leqq K} \geqq \sum_{i=i_o}^{\infty}(b_i - c_i) \geqq \sum_{i=i_o}^{\infty} b_i - \varepsilon$$

$\leqq K$ nach Voraussetzung, und somit erhalten wir, wenn wir für $i = 1,2,\ldots\ i_o-1$ die b_i irgendwie (endlich) wählen: Σb_i ist abs. konvergent.

Beh.1.5 bew.

Lemma 1.1: Sie $X = \Sigma X_i$ abs. konv. gemäß Def.1.3. Dann gilt: Wenn X_i kompakt ist für alle i, so ist auch X kompakt.

Bew.: (i) zunächst ist X beschränkt: sei $x = \Sigma x_i$ aus X.

Dann ist nach der Dreiecksungleichung:

$$|x| \leqq \Sigma |x_i| \leqq \sum_{i=1}^{i_o} |x_i| + b \qquad \text{wo } i_o \text{ hinreichend groß}$$

und $b = \Sigma b_i$ gemäß Beh. 1.5 ist.

$\sum_{i=1}^{i_o} |x_i|$ ist aber auch beschränkt, weil $X_1, \ldots\ X_{i_o}$ endlich viele kompakte Mengen sind.

Damit ist (i) bewiesen.

(ii) ferner ist X abgeschlossen: sei $(x_1, x_2, \ldots)$ eine Folge von Punkten in X, mit $\lim_n x_n = x$. Wir haben zu zeigen, daß auch x in X liegt.

Per def. hat jedes x_n eine Darstellung der Form:

$$x_n = \sum_i x_{ni} \qquad \text{wo } x_{ni} \text{ aus } X_i \text{ ist, für alle } n,i\,.$$

Weil X_1 kompakt ist, hat die Folge $(x_{11}, x_{21}, x_{31}, \ldots)$ eine konvergente Teilfolge $(x_{k_1(1),1}, x_{k_1(2),1}, \ldots)$ in X_1, mit

$$\lim_n x_{k_1(n),1} = \bar{x}_1 \text{ aus } X_1\,.$$

Ebenso hat die Folge $(x_{k_1(1),2}, x_{k_1(2),2}, \dots)$ in X_2 eine konvergente Teilfolge $(x_{k_2(1),2}, x_{k_2(2),2}, \dots)$ mit

$$\lim_n x_{k_2(n),2} = \bar{x}_2 \quad \text{aus } X_2$$

$$\vdots$$

usw.

Durch Induktion erhält man schließlich für jede natürliche Zahl t eine Teilfolge $(k_t(1), k_t(2), \dots)$ der natürlichen Zahlen, sodaß für $i = 1,2,\dots t$ gilt:

$$\lim_n x_{k_t(n),i} = \bar{x}_i \quad \text{aus } X_i \quad .$$

Damit ist induktiv für jedes i ein $\bar{X}_i$ in X_i definiert, und $\bar{\mathbf{x}} := \sum_i \bar{x}_i$ ist ein wohldefinierter Punkt in X.

Wir wollen zeigen: $x = \bar{x}$.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Nach der Dreiecksungleichung gilt:

$$|x - \bar{x}| \leqq \underbrace{|x - x_n|}_{A} + \underbrace{|x_n - \sum_{i=1}^{K} x_{ni}|}_{B} + \underbrace{|\sum_{i=1}^{K} x_{ni} - \sum_{i=1}^{K} \bar{x}_i|}_{C} + \underbrace{|\sum_{i=1}^{K} \bar{x}_i - \bar{x}|}_{D}$$

$$C = |\sum_{i=1}^{K} (x_{ni} - \bar{x}_i)| \leqq \sum_{i=1}^{K} |x_{ni} - \bar{x}_i| =$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{t} |x_{ni} - \bar{x}_i|}_{C_1} + \underbrace{\sum_{i=t+1}^{K} |x_{ni} - \bar{x}_i|}_{C_2}$$

n. Vor. ist ΣX_i abs konvergent, und wird also nach Beh. 1.5 durch eine Riehe Σb_i majorisiert. Wir wählen t so groß, daß $\sum_{i=t+1}^{K} b_i \leqq \varepsilon$ für jedes $K \geqq t$. (o.B.d.A. $t \geqq i_o$).

dann wird in C_2 $\quad |x_{ni} - \overline{x}_i| \leqq |x_{ni}| + |\overline{x}_i| \leqq b_i + b_i = 2\, b_i$

und somit

$$C_2 = \sum_{i=t+1}^{K} |x_{ni} - \overline{x}_i| \leqq 2 . \sum_{i=t+1}^{K} b_i \leqq 2 . \varepsilon \quad \text{für jedes } K \geqq t.$$

Für $i = 1,2,..\ t$ gilt aber für eine passende Teilfolge $(k_t(1),\ k_t(2),\ ..\ )$:

$$\lim_h x_{k_t(h),i} = \overline{x}_i \quad , \text{ d.h.}$$

$$|x_{ni} - \overline{x}_i| \leqq \frac{\varepsilon}{t} \quad \text{für } i = 1,..\ t$$

, wenn wir nur n hinreichend groß und zugleich aus der Folge $(k_t(h))_{h=1,2,..}$ wählen. Damit wird

$$C_1 = \sum_{i=1}^{t} |x_{ni} - \overline{x}_i| \leqq t . \frac{\varepsilon}{t} = \varepsilon \quad \text{für solche } n.$$

Wegen $\lim_n x_n = x$ können wir o.B.d.A. n gleich so groß wählen, daß

$$A = |x - x_n| \leqq \varepsilon \quad .$$

Für dieses fest gewählte n aber existiert wegen $x_n = \sum_i x_{ni}$ ein K, sodaß

$$B = |x_n - \sum_{i=1}^{K} x_{ni}| \leqq \varepsilon$$

und wegen $\overline{x} = \sum_i \overline{x}_i$ kann K so groß gewählt werden, daß

$$D = |\sum_{i=1}^{K} \overline{x}_i - \overline{x}| \leqq \varepsilon \quad .$$

Somit erhalten wir:

$$|x - \overline{x}| \leqq \varepsilon + \varepsilon + 2\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 6\varepsilon$$

udn weil ε beliebig war, muß $x = \overline{x}$ sein, d.h. x liegt in X, und X ist abgeschlossen.

Damit ist (ii) bewiesen.

Nach dem Satz von Heine-Borel folgt aus (i),(ii) die Behauptung.

w.z.z.w.

1.3. Ordnungsrelationen

Einfachheitshalber betrachten wir nur Ordnungsrelationen auf S, dem nichtnegativen Orthanten des R^m; die Definitionen gelten aber natürlich für beliebige (konvexe) Teilmengen des R^m.

Def.1.4: Eine binäre Relation $\succsim$ auf S heißt Ordnungsrelation, wenn gilt:

(i) $x \succsim x$ für alle x aus S (reflexiv)
(ii) $x \succsim y$, $y \succsim z$ impliziert $x \succsim z$ (transitiv)
(iii) für alle x,y aus S gilt immer $x \succsim y$ oder $y \succsim x$ (vollständig)

Def.1.5: (i) $x \succ y$ heißt: $x \succsim y$, aber nicht $y \succsim x$ (zugehörige strikte Ordnungsrelation)
(ii) $x \sim y$ heißt: $x \succsim y$ und $y \succsim x$ (zugehörige Indifferenzrelation)

Im folgenden schreiben wir statt "$x \succsim y$" auch "x pref y" , uns statt "$x \succ y$" auch "x ppref y" .

Def.1.6: Eine Ordnungsrelation heißt stetig, wenn die Menge $\{(x,y) \mid x \text{ pref } y\}$ abgeschlossen ist (in S x S).

I.f. ist c eine reelle Zahl

Def.1.7: Eine Ordnungsrelation heißt

(i) konvex: x pref y , $0 \leqq c \leqq 1$ impliziert $cx + (1-c)y$ pref y

(ii) halbstrikt konvex: x ppref y , $0 < c \leqq 1$ impliziert $cx + (1-c)y$ ppref y

(iii) strikt konvex: x pref y, $x \neq y$, $0 < c < 1$ impliziert $cx + (1-c)y$ ppref y .

Beh.1.6: Folgende Bedingungen sind äquivalent:

(i) $\{(x,y) \mid x \text{ pref } y\}$ ist abgeschlossen (d.h. "pref" ist stetig)

(ii) $\{(x,y) \mid x \text{ ppref } y\}$ ist offen

(iii) $\{y \mid a \text{ pref } y\}$, $\{x \mid x \text{ pref } b\}$ sind abgeschlossen für alle a, b

(iv) $\{y \mid a \text{ ppref } y\}$, $\{x \mid x \text{ ppref } b\}$ sind offen für alle a, b

(v) x_n pref y_n für alle n, $\lim_n x_n = x$, $\lim_n y_n = y$ impliziert: x pref y

Beh.1.7: Folgende Bedingungen sind äquivalent:

(i) "pref" ist konvex gemäß Def.1.7 (i)

(ii) $\{x \mid x \text{ pref } a\}$ ist konvex für jedes a

(iii) $\{x \mid x \text{ ppref } a\}$ ist konvex für jedes a

Beh.1.8: Es gilt:

(i) Eine strikt konvexe Ordnung ist konvex

(ii) - " - ist halbstrikt konvex

(iii) Eine halbstrikt konvexe stetige Ordnung ist konvex

Def.1.8: Die Menge der maximalen Elemente einer Teilmenge M von S bezüglich der Ordnung "pref" ist:

Pref M : = $\{x \text{ aus } M \mid x \text{ pref } y \text{ , für alle } y \text{ aus } M\}$

Def.1.9: Pref S heißt die Menge der Sättigungspunkte. Falls Pref S leer ist, so sagt man, es herrsche Unersättlichkeit.

Def.1.1o: Sei $1 \leq j \leq m$. Man sagt, j sei begehrenswert bezüglich "pref", wenn für alle x aus S, und für alle $c > 0$ gilt:

$x + c.e_j$ ppref x .

<u>Beh.1.9</u>: Sei "pref" stetig und M kompakt. Dann ist Pref M nicht leer und auch kompakt.

<u>Beh.1.1o:</u> Sei "pref" konvex und M konvex. Dann gilt:

(i) Pref ist konvex (evtl.leer)

(ii) Falls "pref" strikt konvex ist, hat Pref M höchstens im Element

Anmerkung: Die Beweise der in dieser Nummer aufgestellten Behauptungen finden sich in NIKAIDO (1968), Ch.V., §15.

1.4. Korrespondenzen

Seien M und G Teilmengen des R^m . Eine Abbildung, die jedem Punkt x aus M eine Teilmenge f(x) von G zuordnet, heißt eine Korrespondenz von M nach G.

Formal: $f : M \longrightarrow 2^G$
$x \longmapsto f(x)$ Teilmenge von G

2^G ist die Potenzmenge (die Menge aller Teilmengen) von G. Über Korrespondenzen im allgemeinen s. z.B. BERGE (1966).

Def.1.11: Eine Korrespondenz $f : M \longrightarrow 2^G$ heißt abgeschlossen bei x , wenn gilt:

$$\lim_n x_n = x \ , \quad \lim_n y_n = y \ , \ y_n \varepsilon f(x_n) \text{ impliziert } y \varepsilon f(x).$$

f heißt abgeschlossen (schlechthin), wenn f bei jedem x aus M abgeschlossen ist.

Lemma 1.2: Sei $X = \Sigma X_i$ absolut konvergent (vgl.Def.1.3), X_i kompakt, und sei für jedes i = 1,2,.. eine abgeschlossene Korrespondenz $f_i : P \longrightarrow 2^{X_i}$ gegeben (P ist das Standard-simplex). Dann ist durch

$$f : P \longrightarrow 2^X$$
$$p \longmapsto f(p) := \sum_i f_i(p)$$

eine abgeschlossene Korrespondenz definiert.

Beh.: zunächst ist f wohldefiniert nach Beh.1.4 und
$X = \Sigma X_i$ kompakt nach Lemma 1.1 .

Wir wollen zeigen, daß f abgeschlossen ist.

Sei also $\lim_n p_n = p$ in P

$\lim_n x_n = x$ in X , und x_n aus $f(p_n)$ für alle n

Wir zeigen, daß x in f(p) liegt, und zwar geht der Beweis analog dem von Lemma 1.1 .

Per def. hat jedes x_n eine Darstellung der Form:

$$x_n = \sum_i x_{ni} \quad \text{wo } x_{ni} \text{ aus } f_i(p_n) \text{ , für alle } n \text{ , } i \text{ .}$$

Wie im Beweis von Lemma 1.1 gibt es wegen der Kompaktheit der X_i zu jedem t eine Teilfolge $(k_t(h))_{h=1,2,..}$ der natürlichen Zahlen, sodaß für i = 1,2,.. t gilt:

$$\lim_n x_{k_t(n),i} = \bar{x}_i \quad \text{, und}$$

weil $x_{k_t(n),i}$ aus $f_i(p_{k_t(n)})$ für alle n, und nach Vor. f_i abgeschlossen ist, so folgt $\bar{x}_i \in f_i(p)$ für alle i.

$\bar{x} = \sum_i \bar{x}_i$ liegt daher nach Konstruktion in f(p), und mit derselben Abschätzung wie ein Beweis von Lemma 1.1 zeigt man, daß $x = \bar{x}$.

w.z.z.w.

Anmerkung: Lemma 1.2 dient in Beh.3.17 zum Nachweis der Abgeschlossenheit der Gesamt-Nachfrage-Korrespondenz und ermöglicht dadurch die Anwendung von Lemma 1.3 .

Lemma 1.3: Sei $f : P \longrightarrow 2^G$ eine Korrespondenz, sei G kompakt, konvex und es gelte:

(i) f ist abgeschlossen; und für jedes p aus P ist $f(p)$ nichtleer und konvex.

(ii) $x \in f(p)$ impliziert: $p.x \geqq 0$

Dann existiert ein $\hat{p}$ aus P, sodaß $f(\hat{p})$ einen nichtnegativen Vektor $\hat{x}$ enthält: $\hat{x} \in f(\hat{p})$, $\hat{x}$ aus S .

Bew.: Der Beweis findet sich z.B. in NIKAIDO (1968), Theorem 16.6. oder in KARLIN (1959), Lemma 8.8.1. Er beruht auf dem Fixpunktsatz von KAKUTANI.

w.z.z.w.

Anmerkung: Lemma 1.3 ist das entscheidende Resultat, das die Existenz eines Gleichgewichtes zu beweisen gestattet.

§2 Das Modell

2.1. Haushalte

Wir betrachten abzählbar unendlich viele Haushalte, die mit $t = 1,2,3,..$ durchnumeriert werden und folgende Eigenschaften haben:

(H1) Jeder Haushalt t hat eine Ordnungsrelation ("Präferenzrelation") auf S, die mit "$pref_t$" bezeichnet wird

(H2) $pref_t$ ist stetig für jedes t

(H3) $pref_t$ ist halbstrikt konvex für jedes t

(H4) Jeder Haushalt t hat eine strikt positive Anfangsausstattung a_t aus S, $a_t >> 0$.

(H5) Die Reihe $\sum_{t=1}^{\infty} a_t$ ist absolut konvergent

(H6) Jeder Haushalt t ist unersättlich

(H7) Jedes Gut j, $1 \leq j \leq m$, wird von mindestens einem Haushalt t_j begehrt.

Anmerkungen:

ad (H2),(H3): nach Beh.1.8.(iii) folgt daraus, daß $pref_t$ konvex **ist** für jedes t.

ad (H5): das garantiert die Existenz einer endlichen, wohldefinierten Gesamtausstattung: $a = \sum_{t=1}^{\infty} a_t$

ad **(H6)**: d.h. $Pref_t\, S$ ist leer für alle t, wo $Pref_t(M)$ die Menge der maximalen Elemente von M bezüglich der Ordnungsrelation $pref_t$ ist (vgl.Def.1.8.)

ad **(H7)**: d.h. zu jedem j, $1 \leq j \leq m$, existiert ein t_j , sodaß j begehrenswert bezüglich "$pref_{t_j}$" ist (vgl.Def.1.1o)

Im übrigen vgl. §6.3. und §5.2.

2.2. Firmen

Wir behalten endlich viele Firmen $k = 1,2,\ldots F$, und treffen folgende Annahmen:

(F1) zu jedem k gibt es eine Teilmenge Y_k des R^m .

(F2) jedes Y_k enthält den Nullvektor

(F3) jedes Y_k ist konvex und abgeschlossen

(F4) $y_k \in Y_k$ für $k = 1,\ldots F$, und $\sum_{k=1}^{F} y_k \geqq 0$ impliziert:

$y_k = 0$ für $k = 1,\ldots F$

(H-F) zu jedem k, $k=1,\ldots F$, und zu jedem t, $t = 1,2,\ldots$, existiert eine reelle Zahl $d_{tk} \geqq 0$, mit

$$\sum_{t=1}^{\infty} d_{tk} = 1 \quad \text{für } k = 1,\ldots F$$

Anmerkungen:

ad (F4): Wenn man $Y = \sum_{k=1}^{F} Y_k$ setzt, so wird (F4) auch von

den beiden folgenden Bedingungen impliziert:

(F4a): $Y \cap S = \{0\}$

(F4b): $Y \cap (-Y) = \{0\}$

Beweis: sei y_k aus Y_k , $\sum_k y_k \geqq 0$. Daraus folgt nach (F4a):

$\sum_k y_k = 0$. Andererseits gehört wegen (F2) jedes y_k zu Y,

und daher nochmals wegen (F2) jedes $y_k = -\sum_{i \neq k} y_k$ zu $-Y$,

daraus folgt nach (F4b): $y_k = 0$.

w.z.z.w.

NIKAIDO (1968), dem wir im übrigen ziemlich enge folgen, setzt (F4a), (F4b) voraus, ARROW-HAHN (1971) nur das etwas schwächere (F4) ad (H-F): wenn man

$$d_t := \begin{pmatrix} d_{t1} \\ \vdots \\ d_{tF} \end{pmatrix}$$

setzt, so gilt nach (H-F):

$\sum_t d_t = 1_F$, und diese Reihe konvergiert absolut, d.h.

$\sum_t |d_t| < \infty$ (n. Beh. 1.3)

Im übrigen vgl. §6.2. und §5.2.

Imfolgenden wird, wenn nicht ausdrücklich anders angegeben, der Index k immer von 1 bis F laufen, und der Index t von 1,2,.. durch alle natürlichen Zahlen.

2.3. Kompetitives Gleichgewicht

Def.2.1: Ein Paar ($\underline{x}$, $\underline{y}$) heißt eine Alllokation, wenn gilt:

(i) $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ mit x_t aus S für alle t = 1,2,..

und $\sum_t x_t$ ist abs.konv.

(ii) $\underline{y} = (y_1, y_2, \dots \; y_F)$ mit y_k aus Y_k für alle k = 1,.. F

Wenn ($\underline{x}$,$\underline{y}$) eine Allokation ist, so heißt $x := \sum x_t$ Gesamt=nachfrage, $y = \sum y_k$ Gesamtangebot (der Firmen), $z := x - y - a$ Überschußnachfrage.

Def.2.2: Eine Allokation ($\underline{x}$,$\underline{y}$) heißt zulässig, wenn ihre Überschußnachfrage $z \leqq 0$ ist.

Im folgenden bezeichnet p stets einem halbstrikt positiven Vektor im R^m : $p > 0$. Die folgenden Definitionen gelten nur für solche $p > 0$, wo sie sinnvoll sind.

Def.2.3: $\pi_k(p) := \max_{y \in Y_k} p.y$ Profit von k

Def.2.4: $S_k(p) := \{y \in Y_k \mid p.y = \pi_k(p)\}$ Angebot v.k.

Def.2.5: $w_t(p) := p.a_t + \sum_k d_{tk} \cdot \pi_k(p)$ Einkommen von t

Def.2.6: $B_t(p) := \{x \in S \mid p.x \leqq w_t(p)\}$ Budgetmenge von t

Def.2.7: $D_t(p) := \mathrm{Pref}_t(B_t(p))$ Nachfrage von t

Def.2.8: Ein Tripel ($\underline{x}$,$\underline{y}$,p) heißt kompetitives Gleichgewicht (k-Glgew.), wenn gilt:

(i) ($\underline{x}$, $\underline{y}$) ist eine zulässige Allokation, $p > 0$.

(ii) y_k liegt in $S_k(p)$ für alle k = 1,.. F

(iii) x_t liegt in $D_t(p)$ für alle t = 1,2,3,..

(iv) Für die Überschußnachfolge z gilt: $p.z = 0$

Anmerkungen zu Def. 2.8:

ad (ii): insbesondere muß $\pi_k(p)$ endlich sein, für alle k
ad (iii): - " - darf $Pref_t(B_t(p))$ nicht leer sein, für alle t

ad (iv): p.z. = 0 bedeutet (wegen (i)):

$\sum_t x_t \leqq a + \sum_k y_k$ und in der j-ten Komponente herrscht Gleichheit, falls $p^j > 0$.

Wir werden in §5, Satz 5.1. zeigen, daß unter den Annahmen (H1) - (H7), (F1) - (F4), (H - F) ein k-Gleichgewicht existiert, sogar eines mit $p \gg 0$.

Für eine ökonomische Interpretation s. §6.4.

§3 Hilfsfunktionen

3.1. Beschränktheit der zulässigen Allokationen

Def.3.1: $\overline{S} := \{x \in S \mid (a + Y - x) \cap S \neq \emptyset\}$

$$\overline{Y}_k := \{y \in Y_k \mid (a + y + \sum_{i \neq k} Y_i) \cap S \neq \emptyset\}$$

Beh.3.1: Sei $(\underline{x}, \underline{y})$ eine zulässige Allokation, $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots)$, $\underline{y} = (y_1, \ldots y_F)$. Dann liegt für jedes $t = 1,2,\ldots$ x_t in $\overline{S}$, und auch $x = \Sigma x_t$ in $\overline{S}$, und für jedes $k = 1,2,\ldots F$ liegt y_k in $\overline{Y}_k$.

Bew.: n.Def. 2.2. ist $0 \leq x_t \leq \sum_t x_t \leq a + \sum_k y_k$

Beh. 3.1. bew.

Beh.3.2: (i) $\overline{S}$, $\overline{Y}_k$ sind nichtleere konvexe Mengen $(k=1,\ldots F)$

(ii) $\overline{S}$, $\overline{Y}_k$ sind beschränkt $(k = 1,\ldots F)$

Bew.: (i) nichtleer: alle Mengen enthalten die Null
konvex: klar per definitionem, weil S, Y_k konvex sind für alle k

(ii) wir zeigen zunächst: $\overline{Y}_k$ ist beschränkt für alle k

wir führen den Beweis indirekt und nehmen an, es gäbe eine nicht beschränkte Folge für $n = 1,2,\ldots$ folgender Art:

y_{kn} liegt im Y_k, $a + \sum_k y_{kn} \geqq 0$ für alle k, n, und

für $m_n := \max_k |y_{kn}|$ gilt: $\lim_n m_n = \infty$. (+)

für hinreichend große n wird dann m_n positiv, und wegen (F2), (F3) liegt y_{kn}/m_n in Y_k

n.Vor. ist $\sum_k y_{kn} \geqq -a$, d.h.

$$\sum_k y_{kn}/m_n \geqq -a/m_n \longrightarrow 0 \text{ für } n \longrightarrow \infty \qquad (++)$$

per def. von m_n ist $|y_{kn}/m_n| \leqq 1$, d.h. wegen der Kompaktheit der Einheitskugel können wir o.B.d.A. annehmen:

$$\lim_n y_{kn}/m_n = y_{ko} \quad \text{für jedes } k, \text{ und}$$

y_{ko} liegt in Y_k, weil Y_k abgeschlossen ist.

Aus (++) folgt: $\sum_k y_{ko} \geqq 0$, und nach (F4) gilt:

$$y_{ko} = 0 \quad \text{für alle } k.$$

Andererseits ist nach (+): $\max_k |y_{kn}/m_n| = 1$ für jedes n, ein Widerspruch. Also ist $\overline{Y}_k$ beschränkt für k = 1,.. F .

Daraus folgt leicht, daß auch $\overline{S}$ beschränkt ist, denn zu x aus $\overline{S}$ gibt es per def. y_k aus Y_k, sodaß

$$a + \sum_k y_k \geqq x$$, woraus per def. folgt, daß y_k in $\overline{Y}_k$ liegt.

Folglich ist $\sum_k y_k$ beschränkt, und daher auch x beschränkt.

Beh.3.2. bew.

Beh.3.3: Es existiert eine kompakte Kugel E um 0, sodaß für jede zulässige Allokation $(\underline{x},\underline{y})$ gilt:

$$x_t, \Sigma x_t \ , \ y_k \ , \ \Sigma y_k \quad \text{liegen alle im Inneren von E.}$$

Bew.: klar nach Beh.3.1., Beh.3.2.

Beh.3.3. bewiesen.

Die kompakte Kugel E sei i.f. fest gewählt.

3.2. Angebot

Gestützt auf Beh.3.3 definieren wir nun analog §2.3. eine Reihe von Hilfsfunktionen, die aber im Gegensatz zu den dort betrachteten Größen stets wohldefiniert sind.

Sei $p > 0$, p aus S.

Def.3.2: $\pi'_k(p) := \max\limits_{y \in Y_k \cap E} p.y$ Profit von k

Beh.3.4: $\pi'_k(p)$ ist wohldefiniert für alle $p > 0$, und es gilt stets: $\pi'_k(p) \geqq 0$.

Bew.: π'_k ist wohldefiniert, weil die stetige Funktion p.y auf der kompakten Menge $Y_k \cap E$ ihr Maximum annimmt, und $\geqq 0$, weil $0 \in Y_k$ für alle k .

Beh.3.4. bew.

Def.3.3: $S'_k(p) := \{ y \in Y_k \cap E \mid p.y = \pi'_k(p) \}$ Angebot von k

Beh.3.5: Für jedes $p > 0$ ist $S'_k(p)$ nichtleer, kompakt, konvex, und enthalten in E.

Bew.: folgt daraus, daß $Y_k \cap E$ nichtleer, kompakt, konvex, und p.y eine stetige Funktion ist.

Beh.3.5. bew.

Def.3.4: $S'(p) := \sum\limits_k S'_k(p)$ Gesamt-Angebot

Beh.3.6: Für jedes $p > 0$ ist $S'(p)$ nichtleer, kompakt, konvex, und enthalten in der kompakten Menge $\underbrace{E + E + \ldots + E}_{F\text{ - mal}}$

Bew.: klar

Beh.3.6. bew.

Def.3.5: $w_t'(p) := p.a_t + \sum_k d_{tk} . \pi_k'(p)$ Einkommen von t

$w'(p) := \sum_t w_t'(p)$ Gesamteinkommen

Beh.3.7: Für jedes $p > 0$ ist $w_t'(p) > 0$, und $w'(p)$ ist wohldefiniert und es gilt:

$w'(p) = p . a + \sum_k \pi_k'(p)$ (ist auch > 0)

Bew.: $w_t'(p) > 0$ folgt aus (H4), (H-F), Beh.3.4.
die Behauptung über $w'(p)$ folgt aus (H5), (H-F) so:

$$w'(p) = \sum_t w_t'(p) = \sum_t (p.a_t + \sum_k d_{tk}\, \pi_k'(p)) = \quad \text{(nach Beh.1.1.)}$$

$$= p. \sum_t a_t + \sum_k \underbrace{\sum_t d_{tk}}_{= 1} \cdot \pi_k'(p) =$$

$$= p . a + \sum_k \pi_k'(p)$$

Beh.3.7. bew.

Def.3.6: $B_t'(p) := \{x \in S /\ p.x \leq w_t'(p)\}$ Budgetmenge von t

Beh.3.8: Für jedes $p > 0$ ist $B_t'(p)$ nichtleer, konvex und abgeschlossen.

Bew.: klar

Beh.3.8. bew.

Bevor wir die Nachfrage - Korrespondenzen, die weitere Modifikationen erfordern, betrachten, wollen wir die eben definierten Abbildungen näher studieren.

Beh.3.9: Für jedes $p > 0$ und für jede reelle Zahl $c > 0$ gilt:

(i) $S_k'(p) = S_k'(c.p)$ für alle k

(ii) $B_t'(p) = B_t'(c.p)$ für alle t

d.h. S_k' , B_t' sind homogen vom Grade 0 in p.

Bew.: klar per def.

Beh.3.9. bew.

Daher beschränken wir uns ab nun o.B.d. A. auf $p \in P$ (Preis-Simplex).

Beh. 3.1o: Es gilt:

(i) $\pi'_k(p)$ ist eine stetige Funktion auf P (f. alle k)

(ii) $w'_t(p)$ ist eine stetige Funktion auf P (f. alle t)

(iii) $S'_k : P \longrightarrow 2^E$ ist eine abgeschlossene Korrespondenz (f. alle k)

(iv) $S' : P \longrightarrow 2^{E+\dots+E}$ - " -

Bew.: (ii) folgt aus (i) nach Def. 3.5.
(iv) folgt aus (iii) nach Def. 3.4.

wir zeigen (i), (iii) gemeinsam:

sei $\lim_n p_n = p$ in P, und sei für ein k:

$\lim_n y_{kn} = y_k$ in E, y_{kn} aus $S_k'(p_n)$ f. alle $n = 1,2,\dots$

nach Def. 3.3. liegt y_{kn} in $Y_k \cap E$ für alle n, und daher auch y_k, wegen der Abgeschlossenheit dieser Menge.

Ferner ist per def.

$$\pi_k'(p_n) = p_n \cdot y_{kn} \geqq p_n \cdot y \quad \text{für alle } y \text{ in } Y_k \cap E$$

und daher $p \cdot y_k \geqq p \cdot y$ für alle diese y, weil das innere Produkt stetig ist, d.h. $p \cdot y_k = \pi'_k(p)$.

Damit erhalten wir:

$\lim_n \pi_k'(p_n) = \pi_k'(p)$ d.h. π'_k ist stetig, und

y_k liegt in $S_k'(p)$ d.h. S'_k ist abgeschlossen.

(i),(iii) bew.

Beh.3.1o. bew.

3.3. Nachfrage

Wir wollen nun Hilfs- Nachfrage-Korrespondenzen definieren, und zwar so, daß ihre Summe (die Gesamt-Nachfrage) endlich und wohldefiniert ist für alle $p > 0$. Im Gegensatz zum Angebot (Def. 3.4.), wo wir nur endlich viele Firmen hatten, genügt es hier nicht, daß die individuellen Nachfragen beschränkt sind, weil wir ja unendlich viele Haushalte voraussetzen.

Lemma 3.1: Sei p strikt positiv. Dann existiert eine Konstante K_p, sodaß für alle t und für alle x aus $B_t^!(p)$ gilt:

$$|x| \leq K_p . (|a_t| + |d_t|)$$

Bew.: weil p strikt positiv ist. ist $\min\limits_{1 \leq j \leq m} p^j =: \bar{p} > 0$.

für ein beliebiges x aus S gilt: $\max\limits_{1 \leq j \leq m} x^j =: \bar{x} \geq 0$, und

$$|x| = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} (x^j)^2} \leq \sqrt{m.\bar{x}^2} \leq m . \bar{x} \quad .$$

Aus $p . x = \sum\limits_{j=1}^{m} p^j . x^j \geq \bar{p} . \sum\limits_{j=1}^{m} x^j \geq \bar{p} . \bar{x}$ folgt:

$$|x| \leq \frac{m}{\bar{p}} . p.x$$

Sei nun x aus $B_t^!(p)$. Dann ist

$$p.x \leq w_t^!(p) = p . a_t + \sum_k d_{tk} \pi_k'(p)$$

wir setzen $\max\limits_{1 \leq k \leq F} \pi_k'(p) =: r(p) \geq 0$ und erhalten

nach der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung:

$$p.a_t \leq |p| . |a_t| \qquad \text{und}$$

$$\sum_{k=1}^{F} d_{tk} \;\; \pi_k'(p) \leqq |d_t| . \sqrt{\sum_k (\pi_k'(p))^2} \leqq |d_t| . \sqrt{F \; . \; (r(p))^2} =$$

$$\leqq F \; . \; r(p) \; . |d_t|$$

Somit:

$$|x| \leqq \frac{m}{\bar{p}} \; . \; (|p| \; . |a_t| + F \; . \; r(p) \; . |d_t|)$$

daraus folgt die Behauptung mit

$$K_p \; : \frac{m}{\bar{p}} \; . \; \max \; (|p|, \; F \; . \; r(p))$$

w.z.z.w.

<u>Beh.3.11:</u> Für alle strikt positiven p ist K_p aus Lemma 3.1. eine stetige Funktion von p .

Bew.: folgt aus Beh.3.1o.(i) per def. von K_p , da min, max stetig.

Beh.3.11.bew.

Anmerkung: Lemma 3.1. ist wichtig, weil es uns gestattet, für strikt positive Preisvektoren die Beschränktheit der Gesamtnachfrage zu zeigen. Das im folgenden entwickelte Verfahren der "Majorisierung durch absolut konvergente Reihen" ist ähnlich der von R.AUMANN (1966) verwendeten Methode.

Def.3.7: Sei $c \geqq 0$ eine reelle Zahl

$$Q(c) := \{q = (h_1,h_2,\ldots\ ) \mid h_t \geqq c.(|a_t|+|d_t|) \text{ für alle } t,$$

$$h := \sum_t h_t < \infty \}$$

$$Q := Q(1)$$

Def.3.8: Sei q aus Q, $q = (h_1,h_2,\ldots\ )$, $h = \Sigma h_t$

$$H_t(q) := \{x \text{ aus } R^m \mid |x| \leqq h_t\}$$

$$H(q) := \{x \text{ aus } R^m \mid |x| \leqq h\}$$

Def.3.9: Sei q,q' aus Q, $q = (h_1,h_2,\ldots\ )$, $q' = (h_1',h_2',\ldots\ )$, und sei $r \geqq 0$ eine reelle Zahl

(i) $q \leqq q'$ bedeutet: $h_t \leqq h_t'$ für alle t

(ii) $r.q := (rh_1,rh_2,\ldots\ )$

Beh.3.12: Es gilt:

(i) $Q(c) \subset Q(c')$ für $c \geqq c'$

(ii) $Q(c) \subset Q$ für $c \geqq 1$

(iii) q aus $Q(c)$ impliziert $r.q$ aus $Q(r.c)$ für $r > 0$

(iv) q aus $Q(c)$, $q' \geqq q$ impliziert q' aus $Q(c)$

(v) $H_t(q)$, $H(q)$ sind nichtleer, kompakt, konvex für alle q aus Q, für alle t

(vi) $\sum_t H_t(q)$ ist absolut konvergent und enthalten in $H(q)$ für alle q aus Q.

Bew.: (i) - (v) klar per def.

(vi) sei x_t aus $H_t(q)$ für alle t. Dann ist

$$\sum_t |x_t| \leqq \sum_t h_t = h < \infty$$

Beh.3.12. bew.

Beh. 3.13: Für strikt positive p gilt:

(i) $B'_t(p)$ ist kompakt für alle t

(ii) $\sum_t B'_t(p)$ ist absolut konvergent

(iii) falls q aus $Q(K_p)$, so ist $B'_t(p)$ enthalten in $H_t(q)$ für alle t

Bew.: (i) nach Beh.3.8., Lemma 3.1.

(ii) nach Lemma 3.1., (H5), "ad (H-F)"

(iii) nach Lemma 3.1., per def.

Beh.3.13.bew.

Sei nun q aus Q , $p > 0$

Def.3.1o: $D'_t(p,q) := \mathrm{Pref}_t(B'_t(p) \cap H_t(q))$ Nachfrage von t

Beh.3.14: Für alle q aus Q, für alle $p > 0$ ist $D'_t(p,q)$ nichtleer, kompakt, konvex, homogen vom Grade 0 in p , und enthalten in $H_t(q)$. (Für alle t)

Bew.: $B'_t(p) \cap H_t(q)$ ist nichtleer, da es die Null enthält; kompakt, konvex nach Beh.3.8. und Beh.3.12.(v). Daraus folgt das entsprechende für $D'_t(p,q)$ nach Beh.1.9. und Beh.1.1o. wegen (H2), (H3), und Beh.1.8 (iii). Die Homogenität folgt per def. aus Beh.3.9. Der Rest ist klar.

Beh.3.14. bew.

Def.3.11: $D'(p,q) := \sum_t D'_t(p,q)$ Gesamtnachfrage

Beh.3.15: Für alle q aus Q, für alle $p > 0$ ist $D'(p,q)$ wohldefiniert, nichtleer, kompakt, konvex, homogen vom Grade 0 in p, und enthalten in $H(q)$.

Bew.: wohldef. nach Beh.3.12.(vi) und Beh.1.4, weil $D'_t(p,q) \subset H_t(q)$
nichtleer, konvex, homogen per def. nach Beh.3.14
kompakt nach Lemma 1.1. und Beh.3.14.
aus $H(q)$ per def.

Beh.3.15.bew.

Sei ab nun o.B.d.A.: p aus P (Preis-simplex)

Beh.3.16: Für alle q aus Q, für alle t, ist

$$D'_t(.,q) : P \longrightarrow 2^{H_t(q)}$$

$$p \longmapsto D'_t(p,q) \text{ eine abgeschlossene Korrespondenz.}$$

Bew.: sei q,t fix gewählt.

sei $\lim_n p_n = p$ in P

$\lim_n x_n = x$ in $H_t(q)$, und x_n aus $D'_t(p_n,q)$ für alle n

Wir wollen zeigen: x liegt in $D'_t(p,q)$.
zunächst liegt x in $H_t(q)$, weil $H_t(q)$ abgeschlossen ist.
ferner folgt aus der Vor., daß $p_n . x_n \leq w'_t(p_n)$ für alle n
nach Beh.3.1o(ii) wird $w'_t(p_n) < w'_t(p) + \varepsilon$ für hinr. große n,
daher $p_n . x_n < w'_t(p) + \varepsilon$ für hinr. große n, daher

$$p . x = \lim_n p_n . x_n \leq w'_t(p) + \varepsilon$$

Da ε beliebig war, folgt $p . x \leq w'_t(p)$, d.h. x aus $B'_t(p)$

Also liegt x in $B'_t(p) \cap H_t(q)$

Wir müssen nur noch zeigen, daß x in dieser Menge maximal bezüglich der Präferenzrelation "pref_t" ist.

Sei also ein y aus $B_t'(p) \cap H_t(q)$ gewählt.

wir setzen:

$$v_n := w_t'(p_n) / \max (w_t'(p_n), p_n \cdot y)$$

v_n ist wohldefiniert und $0 < v_n \leqq 1$, da $w_t'(p_n) > 0$ n.Beh.3.7.
ferner gilt:

$$\lim_n v_n = 1 \qquad \text{da } p \cdot y \leq w_t'(p)$$

wir setzen nun weiter: $y_n := v_n \cdot y$, und erhalten:

$$\lim_n y_n = y$$

$$y_n \text{ aus } H_t(q)$$

$$p_n \cdot y_n \leqq w_t'(p_n) \quad \text{d.h. } y_n \text{ aus } B_t'(p_n) \quad \text{für alle } n$$

daraus folgt per def.: $x_n \text{ pref}_t \; y_n$ für alle n ,
und daraus nach (H2), Beh.1.6(v) : $x \text{ pref}_t \; y$

Beh.3.16.bew.

<u>Beh.3.17</u>: Für alle q aus Q ist

$$D'(.,q) : P \longrightarrow 2^{H(q)}$$

$$p \longmapsto D'(p,q)$$

eine abgeschlossene Korrespondenz.

Bew.: folgt aus Beh.3.16. gemäß Def.3.11. mittels Lemma 1.2.

Beh.3.17. bew.

3.4. Überschußangebot

Sei q aus Q, $p > 0$

Def.3.12: $Z(p,q) := a + S'(p) - D'(p,q)$ Überschußangebot

Anmerkung: nicht zu verwechseln mit der Überschußnachfrage z aus Def.2.1. !

Beh.3.18: Für alle q aus Q, $p > 0$ ist $Z(p,q)$ wohldefiniert, nichtleer, kompakt, konvex, homogen vom Grade 0 in p, und enthalten in einer kompakten, konvexen Menge $G(q)$.

Bew.: folgt per def. aus Beh.3.6., Beh.3.9., Beh.3.15.

Beh.3.18. bew.

Sei ab nun o.B.d.A. p aus P .

Beh.3.19: Für alle q aus Q ist

$$\begin{aligned} Z(\cdot,q) : P &\longrightarrow 2^{G(p)} \\ p &\longmapsto Z(p,q) \end{aligned}$$

eine abgeschlossene Korrespondenz.

Bew.: folgt aus Beh.3.1o.(iv), Beh.3.17.

Beh.3.19. bew.

§4 q - Gleichgewicht

4.1. Definition und Existenz

Sei q aus Q, p aus P

Def.4.1: Ein Tripel (x,y,p) heißt q - Gleichgewicht, wenn gilt:

(i) $x \in D'(p,q)$

(ii) $y \in S'(p)$

(iii) $x \leqq a + y$

Def.4.2: Wenn (x,y,p) ein q - Gleichgewicht ist, so heißt p q - Gleichgewichtpreis

Beh.4.1: p ist genau dann q - Gleichgewichtpreis, wenn $Z(p,q) \cap S \neq \emptyset$.

Bew.: klar per def.

Beh.4.1. bew.

Beh.4.2: Für alle u aus Z(p,q) gilt:

$$p \cdot u \geqq 0 \qquad \text{(Walras)}$$

Bew.: $u = a + y - x$, wo x aus D'(p,q), y aus S'(p), d.h. $y = \sum_k y_k$, $p \cdot y_k = \pi_k'(p)$ nach Def.3.3., Def.3.4. und

$$p \cdot y = \sum_k \pi_k'(p) \quad . \qquad \text{Ferner:}$$

$$x = \sum_t x_t \quad , \; x_t \text{ aus } B_t'(p) \; , \text{ d.h. } \quad p \cdot x_t \leqq w_t'(p)$$

daraus folgt: $p \cdot x = p \cdot \sum x_t =$ (nach Beh.1.2.)

$$= \sum_t p_{x_t} \leqq \sum w_t'(p) = \quad \text{(nach Beh.3.7.)}$$

$$= p \cdot a + \sum_k \pi_k'(p) \quad . \qquad \text{Damit:}$$

$$p \cdot u = p \cdot a + p \cdot y - p \cdot x \geqq p \cdot a + \sum_k \pi_k'(p) - p \cdot a - \sum_k \pi_k'(p) = 0$$

Beh.4.2. bew.

<u>Satz 4.1</u>: Sei q aus Q. Dann existiert ein q - Gleichgewicht.

Bew.: $Z(p,q)$ erfüllt nach Beh. 3.18., Beh.3.19, und Beh.4.2. die Vor. von Lemma 1.3., daraus folgt, daß ein $p \in P$ existiert, sodaß $Z(p,q) \cap S \neq \emptyset$, d.h. nach Beh.4.1:

p ist q - Gleichgewichtpreis.

w.z.z.w.

<u>Beh.4.3:</u> Sei q aus Q, und sei (x,y,p) ein q - Gleichgewicht **mit**

$$x = \sum x_t \quad , x_t \text{ aus } D_t'(p,q) \qquad \text{für alle } t$$

$$y = \sum y_k \quad , y_k \text{ aus } S_k'(p) \qquad \text{für alle } k$$

$$\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots) \quad \underline{y} = (y_1, \ldots y_F).$$

Dann gilt:

(i) $(\underline{x},\underline{y})$ ist zulässige Allokation

(ii) für alle t,k liegen x_t, x , y_k , y im Inneren der kompakten Kugel E

(iii) $\pi_k'(p) = \pi_k(p)$

(iv) $S_k'(p) \subset S_k(p)$

(v) $w_t'(p) = w_t(p)$

(vi) $B_t'(p) = B_t(p)$

Bew.: (i) ist klar nach Def.4.1.

(ii) folgt aus (i) wegen Beh.3.3.

(iv),(v) folgen aus (iii) per def.

(vi) folgt aus (v) per def.

also ist nur noch (iii) zu zeigen:

per def. gilt: $\pi'_k(p) \leqq \pi_k(p)$

Wir führen den Beweis indirekt und nehmen an:

$$\pi'_k(p) < \pi_k(p)$$

Daraus folgt, daß ein $\overline{y}$ aus Y_k existiert mit $p \cdot y_k < p \cdot \overline{y}$ wir setzen $u_v := v \cdot y_k + (1-v) \cdot \overline{y}$ wo $0 < v < 1$ reelle Zahl, nach (ii) existiert ein $v > 0$, sodaß u_v in E liegt, und

$$p \cdot u_v < p \cdot y_k$$. Widerspruch zur Def. von $\pi'_k(p)$.

(iii) bew.

Beh.4.3.bew.

4.2. Zusammenhang mit k - Gleichgewicht

Satz 4.2: Sei $(\underline{x},\underline{y},p)$ ein k - Gleichgewicht nach Def.2.8,

$\underline{x} = (x_1,x_2,\ldots\ )$, $\underline{y} = (y_1,\ldots\ y_F)$, und sei $x = \sum x_t$,

$y = \sum y_k$.

Dann existiert ein q aus Q, sodaß (x,y,p) ein q - Gleichgewicht ist nach Def.4.1.

Bew.: n.Def.2.8.(i), Beh.3.3. liegen x_t,x,y_k,y im Inneren von E, für alle t,k . Daraus folgt:

$$\pi_k(p) = \max_{y \in Y_k} p.y = p.y_k = \max_{y \in Y_k \cap E} p.y = \pi'_k(p)$$

d.h. y_k liegt in $S'_k(p)$ für alle k , folglich y in S'(p) , d.h. Def.4.1. (ii) ist erfüllt.

Ferner ist $B_t(p) = B'_t(p)$ wegen $w_t(p) = w'_t(p)$

wähle $q = (h_1,h_2,\ldots\ )$, q aus Q so: $h_t > |x_t|$ für alle t

dann liegt x_t in $H_t(q)$ für alle t , und nach Def.2.8.(iii) auch in $D'_t(p,q)$, d.h. Def.4.1.(i) ist erfüllt.

Schließlich ist auch Def.4.1.(iii) erfüllt, wegen der Anmerkung ad Def.2.8.(iv) in §2.3.

w.z.z.w.

Beh.4.4: Sei $(\underline{x},\underline{y},p)$ ein k- Gleichgewicht, $\underline{x}=(x_1,x_2,\ldots\ )$, $\underline{y} = (y_1,\ \ldots\ y_F)$, $x = \sum x_t$, $y = \sum y_k$. Dann gelten (i)-(vi) aus Beh.4.3.

Bew.: klar nach Satz 4.2.

Beh.4.4. bew.

Wir wollen nun eine teilweise Umkehrung von Satz 4.2. beweisen.

Satz 4.3: Sei q aus Q, sei (x,y,p) ein q - Gleichgew. mit

$x = \sum x_t, \quad x_t \in D_t'(p,q)$ für alle t

$y = \sum y_k, \quad y_k \in S_k'(p)$ für alle k

und sei $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots)$, $\underline{y} = (y_1, \ldots y_F)$. Dann gilt:

Wenn $p \gg 0$ strikt positiv ist, und q aus $Q(K_p)$ ist, so ist $(\underline{x},\underline{y},p)$ ein k - Gleichgew.
(Dabei ist K_p die Konstante aus Lemma 3.1.)

Bew.: (i) $(\underline{x},\underline{y})$ ist zulässige Allokation nach Beh.4.3.(i)
$p > 0$ nach Vor.

(ii) $y_k \in S_k'(p) \subset S_k(p)$ n.Beh.4.3.(iv)

(iii) $B_t(p) = B_t'(p)$ n.Beh.4.3.(vi)

$B_t'(p) \subset H_t(q)$ n.Beh.3.13(iii)

daraus folgt per def.: $x_t \in D_t'(p,q) = D_t(p)$

(iv) $x \leqq a + y$ impliziert $z = x - y - a \leqq 0$, d.h. $p.z \leqq 0$.
wir müssen zeigen: $p.z = 0$, d.h. $z = 0$, wegen $p \gg 0$.
also ist zu zeigen: $x=a + y$

Wir führen den Beweis indirekt und nehmen an:

$x \leqq a + y$, $\quad x \neq a + y$. Daraus folgt:

$\sum px_t = p \cdot x < p.(a+y) = \sum_t w_t'(p)$ n. Beh. 3.7. und per def. von y

Daher existiert ein t mit:

$$p \cdot x_t < w_t'(p) \qquad (= w_t(p) \text{ nach Beh.4.3.})$$

nach (H6) ist t unersättlich, d.h. es existiert ein $\overline{x}$ aus S mit: $\overline{x}$ ppref_t x_t

Wir setzen: $u_v := v \cdot \overline{x} + (1-v).x_t$ für $0 < v < 1$ reelle Zahl, nach (H3) ist "pref_t" halbstrikt konvex, d.h.

$$u_v \text{ ppref}_t\ x_t \qquad \text{für} \quad 0 < v < 1$$

Andererseits gilt für hinreichend kleines v:

$$p \cdot u_v < w_t'(p), \text{ d.h. } u_v \in B_t'(p) \text{ . Widerspruch wegen (iii).}$$

w.z.z.w.

Anmerkung: Um die Existenz eines k-Gleichgewichtes zu zeigen, genügt es also, die Existenz eines q-Gleichgewichtes mit $p \gg 0$, $q \in Q(K_p)$ zu zeigen. Das wollen wir im nächsten Paragraphen tun.

§5 Existenz des kompetitiven Gleichgewichts

5.1. Hilfssätze

Nach (H7) wird jedes Gut j, $1 \leq j \leq m$ von einem Haushalt t_j begehrt. O.B.d.A. nehmen wir i.f. an, daß $t_j = j$ für $j = 1,\dots m$.

Lemma 5.1: Es existiert ein q aus Q, zu welchem ein strikt positiver q-Glgew.preis $p \gg 0$ existiert.

Bew.: wir wählen ein beliebiges q aus Q, $q = (h_1, h_2, \dots)$ mit der Eigenschaft:

$$h_t \geq d(E) \qquad \text{für } t = 1,\dots m.$$

($d(E)$ ist der Durchmesser von E).

n. Satz 4.1. existiert dazu ein q-Gl.gew. (x,y,p), wo

$$x = \sum x_t \quad , \quad x_t \in D_t'(p,q)$$

wir behaupten, daß $p \gg 0$, und führen den Beweis indirekt, indem wir o.B.d.A. annehmen, daß $p^1 = 0$.

Nach Beh.4.3(ii) existiert eine reelle Zahl $v > 0$ sodaß

$u_v := x_1 + v.e_1$ in E liegt, und $E \subset H_1(q)$ per def. von q

wegen $p^1=0$ ist $p.u_v = p.x_1 \leq w_1'(p)$, d.h.

u_v liegt in $B_1'(p) \cap H_1(q)$

Andererseits ist u_v ppref$_1$ x_1, weil Haushalt 1 das Gut 1 begehrt

Widerspruch zu $x_1 \in D_1'(p,q)$

w.z.z.w.

Sei $\bar{a} := \min_{1 \leq t \leq m} (|a_t| + |d_t|) > 0$

Sei eine Konstante $C > \frac{d(E)}{\bar{a}}$ fest gewählt.

Beh.5.1: Sei q aus Q(C). Dann gilt:

(i) Jeder q-Glgew.preis p ist strikt positiv
(ii) E liegt im Inneren von $H_t(q)$ für $t = 1,..\ m$

Bew.: (i) nach Konstruktion von $q = (h_1, h_2, ..\ )$ aus Q(C) gilt:

$$h_t > \frac{d(E)}{\bar{a}} \cdot (|a_t| + |d_t|) \geq d(E) \quad \text{für } t = 1,..\ m$$

daraus folgt die Beh. wie ein Beweis von Lemma 5.1.

(ii) klar nach (i).

Beh.5.1.bew.

Lemma 5.2: Sei q_o aus Q(C), sei $q_n := n.q_o$, und sei

p_n ein q_n-Glgew.preis für $n = 1,2,..$

Dann hat die Folge $(p_1, p_2, ..\ )$ einen strikt positiven Häufungspunkt.

Bew.: zunächst liegt q_n in Q(C) nach Beh.3.12(iv), also ist p_n strikt positiv nach Beh.5.1. (und vorhanden nach Satz 4.1.), für $n = 1,2,..$. Weil P kompakt ist, können wir o.B.d.A. annehmen:

$$\lim_n p_n = p \quad \text{in } P.$$

Wir wollen zeigen, daß p strikt positiv ist.

Sei für jedes n (x_n, y_n, p_n) ein q_n-Gleichgewicht.

Jedes x_n hat eine Darstellung:

$$x_n = \sum_t x_{nt} \quad \text{wo } x_{nt} \text{ aus } D_t'(p_n,q_n)\text{, und}$$

Nach Beh.4.3(ii): x_n, x_{nt} im Inneren von E liegen (für alle n,t) (+)

Wir führen den Beweis indirekt und nehmen o.B.d.A. an, daß $p^1 = 0$.

Zunächst zeigen wir, daß $p_n.x_{n1} = w_1'(p_n)$ für alle n .

per def. gilt: $p_n.x_{n1} \leq w_1'(p_n)$. Wir schließen wieder indirekt und nehmen an: $p_n\, x_{n1} < w_1'(p_n)$ für ein n.

Nach (+) und nach Beh.5.1.(ii) existiert eine reelle Zahl $v > 0$, sodaß $u_v := x_{n1} + v.e_1$ im Inneren von $H_1(q_n)$ liegt, und zugleich $p_n.u_v < w_1'(p_n)$ für v hinr. klein, d.h. u_v liegt in $B_1'(p_n) \cap H_1(q_n)$.

Andererseits begehrt Haushalt 1 das Gut 1, sodaß
u_v ppref_1 x_{n1} , ein Widerspruch zur Def. von x_{n1} .

Also ist $p_n.x_{n1} = w_1'(p_n)$ für alle n.

Nach (+) können wir o.B.D.A. annehmen:

$$\lim_n x_{n1} = \overline{x} \quad \text{in E}$$

und erhalten:

$$p.\overline{x} = \lim_n p_n.x_{n1} = \lim_n w_1'(p_n) = w_1'(p) > 0 \ ,$$

letzteres nach Beh.3.10(ii) und Beh.3.7.

Daraus folgt:

Es existiert ein $j \neq 1$, o.B.d.A. $j = 2$, sodaß

$$p^2 > 0 \ , \quad \bar{x}^2 > 0 \ .$$

Es gilt: $\bar{x} + e_1 \ \text{ppref}_1 \ \bar{x}$ wieviel Haushalt 1 Gut 1 begehrt.

Wenn wir nun $u_v := \bar{x} + e_1 - v \cdot e_2$ setzen ($v > 0$, reell), so gilt für hinreichend kleine v:

u_v liegt in S, und

$u_v \ \text{ppref}_1 \ . \ \bar{x}$ (wegen (H2)), und daraus folgt, nochmals mittels (H2):

$u_v \ \text{ppref}_1 \ x_{n1}$ für n hinreichend groß. (++)

Andererseits liegt u_v in $H_1(q_n)$ für hinreichend große n (nach Def. von q_n), und kann daher wegen (++) nicht in $B_1'(p_n)$ liegen, folglich ist $p_n . u_v > w_1'(p_n)$, und daher

$$p.u_v = \lim_n \ p_n.u_v \geqq \lim_n \ w_1'(p_n) = w_1'(p) = p \ . \ \bar{x}$$

Das aber steht im Widerspruch zu

$$p.u_v = p.\bar{x} + p.e_1 - v.p.e_2 = p.\bar{x} - v.p.e_2 < p.\bar{x}$$

w.z.z.w.

<u>Anmerkung</u>: Die Beweisidee von Lemma 5.2. stammt von R.Aumann (AUMANN (1966),Lemma 6.1.).

<u>Lemma 5.3:</u> Es existiert ein q aus Q, zu welchem ein strikt positiver q-Gleichgew.preis $p \gg 0$ existiert, sodaß gilt: $q \in Q(K_p)$, wo K_p die Konstante aus Lemma 3.1. ist.

Bew. Sei wie in Lemma 5.2. $q_n = n.q_o$ eine monoton wachsende Folge, mit zugehörigen strikt positiven q_n-Gleichgewpreisen p_n, sodaß $\lim_n \; p_n = \hat{p}$ strikt positiv ist.

Nach Beh.3.11. ist K_p stetig für p strikt positiv, d.h.

$$\lim_n K_{p_n} = K_{\hat{p}} \quad .$$

Sei $\overline{K} = 2.K_{\hat{p}}$, dann gilt für hinreichend große n:

$K_{p_n} \leqq \overline{K}$, daraus folgt nach Beh.3.12.(i):

$Q(\overline{K}) \subset Q(K_{p_n})$.

Andererseits ist wie in Lemma 5.2. $q_n = n.q_o$, q_o aus Q(C), also nach Beh.3.12(iii):

$$q_n \in Q(n.C) \subset Q(\overline{K}) \qquad \text{für } n > \frac{\overline{K}}{C}$$

und somit für hinreichend große n:

$$q_n \in Q(K_{p_n})$$

w.z.z.w.

5.2. Existenzsatz

Satz 5.1: Unter den Voraussetzungen (H1)-(H7), (F1)-(F4), (H-F) existiert ein kompetitives Gleichgewicht mit strikt positivem Gleichgewichtspreisvektor.

Bew.: folgt sofort aus Lemma 5.3. und Satz 4.3.

w.z.z.w.

Diskussion

Wir wollen rückblickend überprüfen, an welchen Stellen wir die einzelnen Voraussetzungen im Verlaufe des Beweises gebraucht haben.

(F4) zusammen mit (F2), (F3) garantiert die Beschränktheit der zulässigen Allokationen (Beh.3.3.), und ermöglicht es so, mit den Hilfs- Angebotskorrespondenzen aus §3.2. statt der ursprünglichen zu arbeiten.

(H4) zusammen mit (H-F) garantiert jedem Haushalt ein positives Einkommen (Beh.3.7.), daraus und aus (H2) folgt die Abgeschlossenheit der individuellen Hilfs-Nachfrage-Korrespondenzen, und daraus nach Lemma 1.2. die der Gesamt-Hilfs-Nachfrage. Ihre Kompaktheit und Konvexität folgt aus (H2), (H3); und daß sie überhaupt sinnvoll definiert ist, aus (H5) mittels Lemma 3.1. (H6), (H3) implizieren im Beweis von Satz 4.3., daß das Walras-Gesetz im engeren Sinne erfüllt ist, und (H7) schließlich garantiert die strikte Positivität des Gleichgewichtspreises in §5.1., zusammen mit (H2) und (H4) bzw. Beh.3.7.

§6 Ökonomische Interpretation

6.1. Güter und Preise

Wir betrachten eine Wirtschaft, in der es m verschiedene Güter gibt, deren Quantitäten durch reelle Zahlen gemessen werden. Ein Punkt x im R^m ist also ein "Güterbündel". Von jedem Gut j, $1 \leq j \leq m$, ist ein endlicher Gesamtvorrat a^j vorhanden (H5).

Der Preis des j-ten Gutes ist $p^j \geq 0$. Die Homogenität vom Grade 0 unserer Funktionen bedeutet, daß es nur auf die relativen Preise ankommt, d.h. die Preise können auf das Standard-Simplex P normiert werden. Ein Gut, dessen Preis 0 ist, heißt "freies Gut".

Der Wert eines Güterbündels x ist $p.x = \sum_j p^j.x^j$.

Wir nehmen an, daß Haushalte und Firmen Preisnehmer sind, d.h. die Mengen, die sie konsumieren bzw. produzieren, dem geltenden Preis anpassen.

6.2. Firmen

Der Produktionssektor unserer Wirtschaft besteht aus endlich vielen Firmen $k = 1,2,..$ F (F1), deren jede die Option hat, nichts zu tun (F2), und deren Produktionsmöglichkeitenmenge Y_k abgeschlossen und konvex (F3) ist, d.h. es gibt keine zunehmenden Skalenerträge. Außerdem gibt es im Aggregat keinen Output ohne Input (Schlaraffenland), und keine Gruppe von Firmen kann den Produktionsprozeß der übrigen zur Gänze rückgängig machen (Irreversibilität), nach (F4).

Die Firmen befinden sich zur Gänze im Besitze der Haushalte; d_{tk} ist der Anteil des Haushaltes t an Firma k. (H-F).

Firmen maximieren ihren Profit, d.h. bei gegebenem p wählt jede Firma k einen Prozeß y_k aus Y_k so, daß $p.y_k$ maximal wird. Dieser maximale Profit wird mit $\pi_k(p)$ bezeichnet. Die Menge aller jener Prozesse y_k aus Y_k, für die der maximale Profit erreicht wird, bildet die Angebotskorrespondenz $S_k(p)$ der Firma k.

6.3. Haushalte

Ferner betrachten wir abzählbar unendlich viele Haushalte t = 1,2,.. . Jeder Haushalt hat als Konsummöglichkeitenmenge den nichtnegativen Orthanten S, und über diesem eine stetige, halbstrikt konvexe, unersättliche Präferenzordnung ((H1)-(H3), (H6)). Jedes Gut wird von mindestens einem Haushalt begehrt (H7). Der vorhandenen Gesamtvorrat ist so aufgeteilt, daß jeder Haushalt t von jedem Gut j eine positive Ausgangsausstattung a_t^j besitzt (H4).

Auf Grund einer profitmaximierenden Wahl von Prozessen y_k durch die einzelnen Firmen steht jedem Haushalt t ein Einkommen zur Verfügung, daß sich aus dem Wert seiner Anfangsausstattung und seinen Anteilen an den Profiten der Firmen zusammensetzt:

$$w_t(p) = p.a_t + \sum_k d_{tk} \cdot \pi_k(p).$$

Die Budgetmenge $B_t(p)$ eines Haushaltes ist die Menge aller Güterbündel, deren Wert nicht größer ist als sein Einkommen.

Haushalte maximieren ihren Nutzen unter der Budgetbeschränkung, d.h. jeder Haushalt t wählt ein Güterbündel x_t aus $B_t(p)$, welches maximal in $B_t(p)$ bezüglich seiner Präferenzordnung ist. Die Menge dieser Güterbündel bildet die Nachfragekorrespondenz $D_t(p)$ des Haushaltes t.

Die Hilfsnachfragekorrespondenz $D_t'(p,q)$ unterscheidet sich davon nur dadurch, daß x_t der zusätzlichen Bedingung $|x_t| \leq h_t$ unterworfen ist. Man kann das als eine Art Rationierungsmechanismus interpretieren, der verhindern soll, daß die aggregierte Nachfrage unendlich wird. Der Grundgedanke des in

§5 entwickelten Beweiseganges besteht darin, die "Rationen" so lange zu erhöhen, bis sie überflüssig werden, indem die "Ration" eines jeden Haushaltes, d.h., was er sich kaufen darf, größer wird als das, was er sich auf Grund seines Einkommens überhaupt leisten kann.

6.4. Kompetitives Gleichgewicht

Eine zulässige Allokation ist ein System von Güterbündeln x_t und Produktionsprozessen y_k, sodaß im Aggregat nicht mehr konsumiert wird, als auf Grund der Anfangsausstattung und der Produktionsprozesse zur Verfügung steht, d.h.

$$\sum_t x_t \leqq a + \sum_k y_k$$

$\sum x_t$ heißt Gesamtnachfrage, $a + \sum_k y_k$ Gesamtangebot, die Differenz Überschußnachfrage.

Eine zulässige Allokation zusammen mit einem Preis p bildet ein kompetitives Gleichgewicht, wenn (zum geltenden Preis p)
- für jede Firma k der Prozeß y_k den Profit maximiert
- für jeden Haushalt t das Güterbündel x_t den Nutzen maximiert (unter der Budgetbeschränkung)
- die Überschußnachfrage nach einem Gut gleich Null ist, falls dessen Preis positiv ist.

Unser Hauptergebnis (Satz 5.1.) sagt aus, daß unter den angegebenen Voraussetzungen ein kompetitives Gleichgewicht existiert, ja sogar ein solches, wo alle Preise positiv sind, und also Angebot und Nachfrage exakt übereinstimmen.

L I T E R A T U R

K.J.Arrow & G.Debreu (1954): Existence of Equilibrium for a competitive economy. Econometrica, 22

K.J.Arrow & F.H.Hahn (1971): General Competitive Analysis. Holden-Day, Inc., San Francisco, and Oliver & Boyd, Edinburgh

R.Aumann (1964): Markets with a Continuum of Traders. Econometrica 32

R.Aumann (1966): Existence of Competitive Equilibria in markets with a continuum of traders. Econometrica 34

C.Berge (1966): Espaces topologiques. Fonctions multivoques. Dunod, Paris

T.Bewley (1972): Existence of Equilibria in Economics with Infinitely many commodities. J. of Economic Theory, 4

G.Debreu (1954): Representation of a preference ordering by a numerical function. In R.Thrall, C.Coombs, & R.Davis (eds.): Decision Processes. Wiley, New York; Chapman & Hall, London

G.Debreu (1959): Theory of Value. Wiley, New York

G.Debreu & H.Scarf (1972): The limit of the Core of an economy. In C.Mcguire & R.Radner (eds.): Decision and Organization. North-Holland Publ. Co., Amsterdam-London.

F.Hahn (1973): The winter of our discontent. Economica 4o

W.Hildenbrand (197o a): Existence of equilibria for economies with production and a measure space of consumers. Econometrica 38

W.Hildenbrand (197o b): On economies with many agents. J. of Economic Theory, 2

N.Kaldor (1972): The irrelevance of equilibrium economics. The Economic J., 82

S.Karlin (1959): Mathematical Methods and Theory in Games, Programming and Economics. Addison-Wesley Publ. Co., Inc., Reading, Mass., USA, London,England

J.Kornai (1971): Anti-Equilibrium. On Economic systems theory and the tasks of research.North-Holland.Publ.Co., Amsterdam

L.McKenzie (1959): On the existence of general equilibrium for a competitive market. Econometrica 27

H.Nikaido (1968): Convex Structures and Economic Theory. Academic Press, New York and London