BEWEIS EINES THEOREMS IN DER GRAPHEN-THEORIE

Eine Ungleichung für den maximal möglichen Grad der Unbalanciertheit eines vollständigen exklusiven Bigraphen

von

Hartmann SCHEIBLECHNER

Forschungsbericht No. 6

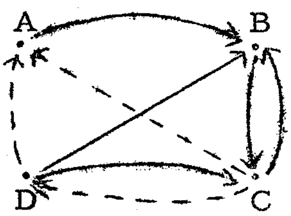
April 1966

Einleitung

Einführung in Anwendung und Grundkonzepte der Graphentheorie.

In der Soziologie spielt für viele Fragestellungen (insbesondere: kleine Gruppen) die von Moreno entwickelte Methode des Soziogramms eine wichtige Rolle. Ein Soziogramm erhält man zum Beispiel, wenn man in einer Gruppe von Menschen jeden über seine Einstellung zu den restlichen Gruppenmitgliedern befragt. Man stellt nun jedes Gruppenmitglied durch einen (bezeichneten) Punkt dar und trägt zwischen diesen Punkten die feindlichen (- - - →) und freundschaftlichen (——→) Relationen ein, wie dies etwa in Abbildung 1 geschehen ist. "Feindlich" ist hier und im weiteren nur als Gegenteil einer eindeutig freundlichen oder positiven Beziehung gemeint, und bei kleinen Gruppen nicht als offene aggressive Feindschaft, sondern z.B. als "nicht mögen" viel adaequater vorzustellen.

Abbildung 1: Soziogramm einer Gruppe von 4 Personen { A, B, C, D } mit den (gerichteten) Freundschafts- und Feindschaftsrelationen (——→ bzw. – – – →)



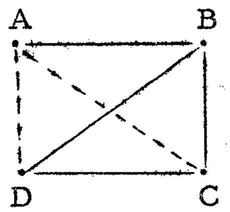
X ——→ Y ..... X wählt Y als Freund

X - - - → Y ..... X ist Y feindlich gesinnt.

Ein solches Gebilde aus Punkten und Pfeilen nennt man formal einen Graphen. {A, B, C, D } heisst die Menge der Elemente (Punkte) des Graphen, die Beziehungen – – → und ——→ heissen die auf den Elementen definierten Relationen.

Ein Spezialfall einer solchen Struktur liegt vor, wenn von jedem Element (Person) die Relationen (Einstellung) zu allen übrigen Elementen bekannt sind, und die betrachteten Relationen noch gewisse Eigenschaften haben: sie sind symetrisch (d.h. es gilt stets $X \rightleftarrows Y$ oder $X \dashleftarrow\dashrightarrow Y$, dann einfach durch X —— Y oder X – – – Y dargestellt) und es sind zwei einander ausschliessende Relationen (——— Freundschaft - - - - -Feindschaft) vorhanden. Eine Struktur solcher Art nennt man einen "vollständigen, exklusiven Bigraphen" und ein Beispiel dafür liefert Abbildung 2.

Abbildung 2: Vollständiger, exklusiver Bigraph zu 4 Punkten {A, B, C, D } und den einander ausschliessenden Relationen Freundschaft - Feindschaft



X———Y ..... X und Y sind gegenseitig Freunde

X- - - -Y ..... X und Y sind gegenseitig Feinde

Ist so ein Schema das Abbild einer wirklich vorhandenen Gruppenstruktur, so stellen sich dem Soziologen gleich eine Reihe wichtiger Fragen: Wie wird die Position (Zufriedenheit, Motivation, Prestige ...) jedes einzelnen in dieser Gruppe sein? Wie wird diese Gruppe als Ganzes gesehen, als soziale Einheit nach aussen funktionieren? etc. Eine besonders wichtige Frage ist die nach der "Stabilität" oder dem "Gleichgewicht" dieser Struktur: Werden Änderungen der Relationen zwischen den Elementen (Personen) zu erwarten sein? Welche? etc.

Auf diese Frage des Gleichgewichts hat F. Heider weitgehend empirisch bestätigte und theoretisch fruchtbare Antworten gegeben, was Gruppen zu n = 3 Elementen betrifft. Die dabei zur Geltung kommenden Gesichtspunkte wurden später formalisiert und auf Gruppen zu mehr als drei Punkten verallgemeinert (Cartwright, Harary, Flament ....). Z.B. Dreieck (ACD) ist balanciert, Dreieck (ABD) nicht). Diese Definition wurde auf mehr als 3 Punkte verallgemeinert, indem nun eine solche Struktur balanciert ist, wenn alle enthaltenen Dreiecke es sind.

Weitaus die meisten Graphen sind aber nicht balanciert, sondern mehr oder weniger weit vom Gleichgewicht entfernt. Den "Grad der Unbalanciertheit" eines solchen Graphen gibt man dadurch an, dass man abzählt, wieviele Relationen mindestens (im Vorzeichen) geändert werden müssten, damit aus dem gegebenen ein balancierter Graph entsteht. Den entsprechenden Vorgang nennt man Ausbalancierung und eine Menge von Vorzeichenänderungen von Relationen, die das bewirkt, eine "Balancierungsmenge". (Z.B. in Abbildung 2, falls A und B ihre Relation in eine Feindschafts-Beziehung umändern, ist der resultierende Graph balanciert. Der Grad des Ungleichgewichts dieses Graphen ist demnach 1, da eine einzige Vorzeichenänderung bereits Balance bewirkt).

Im folgenden wird diskutiert, wie gross der Grad der Unbalanciertheit für jedes gegebene n (Anzahl von Elementen) maximal sein könne. Abelson und Rosenberg (1958) gaben zu diesem Problem eine Ungleichung an, deren Gültigkeit sie nur vermuten konnten. Ihre Vermutung lässt sich jedoch strikt bestätigen. Im wesentlichen beruht der Beweis darauf, dass man sich einen Graphen zu n Punkten gegeben denkt und überlegt, um wieviel der Grad der Unbalanciertheit höchstens steigen kann, wenn man einen n + lten Punkt mit allen seinen Relationen hinzufügt. Es stellt sich heraus, dass von den neuen Relationen nur höchstens die Hälfte "falsch" sein können, d.h. die Unbalanciertheit erhöhen können. Damit hat man eine sogenannte "Rekursionsformel" gefunden (und durch vollständige Induktion bewiesen) die leicht so umgeformt werden kann, dass man dann für jedes beliebige n sofort den maximal möglichen Grad der Unbalanciertheit direkt berechnen kann. Welche Bedeutung hat dieses Wissen dann praktisch? Vor allem die, dass man jeden vorgefundenen Grad der Unbalanciertheit bei n Punkten durch den maximal möglichen dividieren kann und auf diese Art einen Koeffizienten erhält, der zwischen 0 und 1 liegt und von n unabhängig ist. Somit kann man nun zwei Graphen mit verschieden vielen Elementen nach dem Koeffizienten vergleichen, was man mit dem bisher definierten Grad des Ungleichgewichts nicht konnte, da er von der Anzahl n abhängig war.

An der Graphentheorie besonders interessierte Leser werden vor allem auf das am Ende zitierte Buch von C. Flament hingewiesen.

Beweis der Vermutung von ABELSON und ROSENBERG

Zusammenfassung: ABELSON und ROSENBERG geben eine Ungleichung für den maximal möglichen Grad der Unbalanciertheit eines vollständigen exklusiven Bigraphen zu n Punkten an. Der Beweis dieser Ungleichung konnte seit der Äusserung dieser Vermutung im Jahr 1958 nicht gefunden werden.
Hier soll dieser Beweis gegeben werden, indem zunächst das Problem gelöst wird, um wieviel der Grad der Unbalanciertheit eines vollständigen exklusiven Bigraphen zu n Punkten maximal anwachsen kann, wenn ein weiterer, n + 1ter Punkt hinzugefügt wird. Daraus ergibt sich im nächsten Schritt eine Formel zur direkten Berechnung des maximal möglichen Unbalanciertheitsgrades eines vollständigen exklusiven Bigraphen zu n Punkten.

Die Vermutung von ABELSON und ROSENBERG (1958) lautet:

Wenn G = (X;V) ein vollst. exkl. Bigraph zu n Punkten ist, dann gilt für den Grad seiner Unbalanciertheit:

$$\delta(G) \leq \frac{n(n - 2) + \varepsilon}{4}, \qquad \varepsilon = \begin{cases} 1, & \text{wenn n ungerade} \\ 0, & \text{wenn n gerade} \end{cases}$$

Es ist nun nötig, einige Definitionen und Theoreme vorauszuschicken. Numerierung und Seitenangaben beziehen sich hiebei auf das Buch von FLAMENT (1965).

Definitionen:

D_1 (S. 119): Ein vollständiger exklusiver Bigraph ist ein symmetrischer Graph, in dem je zwei beliebige Elemente durch einen positiven oder negativen Strich verbunden sind.
Symbolisch: $G = (X;P,N)$ mit $P \wedge N = \emptyset$.

D_2 (S. 119): Das Vorzeichen einer Kette oder eines Zyklus ist das Produkt der sie konstituierenden Striche. Das Produkt ist definiert durch die Multiplikationstabelle

	+	-
+	+	-
-	-	+

Eine Kette ist eine vollständig geordnete Menge von Elementen aus $V = P \vee N$, sodass der k-te Strich an dem Punkt endet, an dem der k + 1-te Strich entspringt. Eine Kette, die zu ihrem Ausgangspunkt zurückkehrt, ist ein Zyklus.

D_3 (S. 120): Ein Zyklus der Länge 3 oder Dreieck befindet sich im Gleichgewicht dann und nur dann, wenn sein Vorzeichen positiv ist.

Die Länge einer Kette oder eines Zyklus ist gleich der Anzahl der sie konstituierenden Striche.

D_4 (S. 120): Ein vollst. exkl. Bigraph ist im Gleichgewicht dann und nur dann, wenn alle seine Dreiecke es sind.

D_6 (S. 125): Die Gleichgewichtsbasis der Achse a eines vollst. exkl. Bigraph G wird gebildet aus der Liste der Vorzeichen der a enthaltenden Dreiecke.

D_7 (S. 129): Der Grad des Ungleichgewichtes $\delta(G)$ eines vollst. exkl. Bigraph G wird gemessen durch den Betrag der kleinst möglichen Menge von Strichen von G, deren Vorzeichenänderung einen balancierten Graphen ergibt.

D_8 (S. 132): Man nennt eine Balancierungsmenge von G jede Menge von Strichen von G, durch deren Vorzeichenänderung man einen balancierten Graphen erhält.

Bezeichnet man den Grad der Unbalanciertheit von G mit $\delta(G)$ und eine Balancierungsmenge mit $\mathcal{E}_i$, so kann D_7 nun folgendermassen angeschrieben werden:

D_7 (S. 132): $\delta(G) = \min_i \{ | \mathcal{E}_i(G) | \}$

Für den Beweis nötige Theoreme:

Theorem III|4 (S. 123): Wenn eine Gleichgewichtsbasis eines vollst. exkl. Bigraph G bekannt ist, sind die Vorzeichen aller Dreiecke von G ableitbar.

Theorem III|5 (S. 126): Ein vollst. exkl. Bigraph ist im Gleichgewicht dann und nur dann, wenn alle Dreiecke einer Basis positiv sind.

Der Beweis:

Satz: Gegeben sei $G_n = (X;P,N)$, $|X| = n$, weiters die Gleichgewichtsbasis der Achse a und seine minimalen Balancierungsmengen $\mathcal{E}_{min_i}$, $|\mathcal{E}_{min_i}| = \delta(G_n)$. Durch Hinzufügen eines weiteren Punktes π zu X und beliebiger n Striche $\{(x\pi)\}$ zu V werde der Graph $G_{n+1} = (X,\pi;P,N,\{(x\pi)\})$ gebildet. Für den Grad des Ungleichgewichts des Graphen G_{n+1} gilt dann:

$$\delta(G_{n+1}) \leq \delta(G_n) + \frac{n-a}{2}, \quad a = \begin{cases} 1, & \text{wenn n ungerade} \\ 0, & \text{wenn n gerade} \end{cases}$$

Beweis: 1. Bilde die Gleichgewichtsbasis der Achse a von G_{n+1}. Diese enthält alle Dreiecke der Gleichgewichtsbasis der Achse a von G_n und n-1 neue Dreiecke der Form

$(ab\pi)$

$(ac\pi)$

...

... $\quad X = \{a, b, c, \ldots, x, \ldots \xi\}$

$(ax\pi)$

...

...

$(a\xi\pi)$

Die neuen Dreiecke enthalten die neuen Striche

$$\left.\begin{matrix} (b\pi) \\ (c\pi) \\ \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \\ (x\pi) \\ \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \end{matrix}\right\} \text{ je einmal, das sind } n-1 \text{ Striche}$$

$(a\pi)$ $\quad (n-1)$ mal

2. Balanziere G_n nach (einem der) $\mathcal{E}_{min_i}$; dafür sind $\delta(G_n)$ Vorzeichenänderungen nötig.

3. Fall a.

n ungerade und $|(ax\pi)\Gamma = \frac{n-1}{2}$

(Mit $|(ax\pi)|^-$ wird die Anzahl der neuen Dreiecke ($ax\pi$) mit negativem Vorzeichen nach der Ausführung der in 2. genannten Operation bezeichnet.)

Man ändere die Vorzeichen derjenigen Striche ($x\pi$), deren Dreieck ($ax\pi$) negativ ist. Dadurch werden alle neuen Dreiecke positiv, ohne dass das Vorzeichen eines der in der Basis G_n enthaltenen Dreiecke geändert würde (weil nur neue Striche im Vorzeichen geändert werden).

Die Anzahl der Änderungen beträgt $\frac{n-1}{2}$.

Fall b. n ist gerade oder ungerade und $|(ax\pi)|^- < \frac{n-1}{2}$.

Man ändere das Vorzeichen der Striche ($x\pi$), die aus den negativen Dreiecken ($ax\pi$) stammen; alle neuen Dreiecke werden positiv mit weniger als $\frac{n-1}{2}$ Änderungen.

Fall c. n ist gerade und $|(ax\pi)|^- - 1 = |(ax\pi)|^+$.

Entweder α) Man ändere die ($x\pi$) der negativen Dreiecke, das sind $\frac{n}{2}$ Änderungen;

oder β) Man ändere zunächst ($a\pi$) und dann die ($x\pi$) der nunmehr negativen Dreiecke, das sind $1 + (\frac{n}{2} - 1) = \frac{n}{2}$ Änderungen.

Fall d. n ist gerade oder ungerade und $|(ax\pi)|^- - 2 \geq |(ax\pi)|^+$.

Man ändere zunächst ($a\pi$) und dann die ($x\pi$) der nunmehr negativen Dreiecke, das sind $1 + |(ax\pi)|^+$, also weniger als $\frac{n}{2}$ Änderungen.

In allen Fällen wurde G_n durch $\delta(G_n)$ Vorzeichenänderungen ausbalanciert und die neuen Dreiecke ($ax\pi$) in weniger oder gleich $\frac{n}{2}$ Vorzeichenänderungen von Strichen positiv gemacht, ohne das Gleichgewicht der in der Basis von G_n enthaltenen Dreiecke zu zerstören. Die Basis der Achse a von G_{n+1} enthält also nur positive Dreiecke und dies mit einer Anzahl von Änderungen, die kleiner oder gleich $\delta(G_n) + \frac{n}{2}$ ist. Nur im Fall c. waren $\frac{n}{2}$ Änderungen nötig, sonst stets weniger. Fall c. ist nur möglich, wenn n gerade ist. Also gilt:

$$(G_{n+1}) \leq \delta(G_n) + \frac{n-\alpha}{2}, \quad \alpha = \begin{cases} 1, & \text{wenn n ungerade} \\ 0, & \text{wenn n gerade} \end{cases}$$

Durch den soeben bewiesenen Satz wurden die maximal möglichen Zuwächse M an Unbalanciertheit festgelegt, wenn man zu einem vollst. exkl. Bigraphen von n Punkten einen n + 1-ten Punkt hinzufügt. Wie verhält sich nun die durch den Ausdruck

$$\frac{n-a}{2} \quad \text{mit } a = \begin{cases} 1, & \text{wenn n ungerade} \\ 0, & \text{wenn n gerade} \end{cases} \quad \text{erzeugte Folgen von Zahlen?}$$

$$\begin{array}{llll} n \ldots & n-2 & n-1 & n \\ M \ldots & \frac{(n-2)-a}{2} & & \frac{(n-1)-a}{2} \end{array}$$

Für die Differenz der letzten beiden maximal möglichen Zuwächse an Unbalanciertheit gilt (wobei a jetzt 1 ist, wenn der Klammerausdruck $(n-1), (n-2), \ldots$ ungerade, beziehungsweise 0 ist für $(n-1)$, $(n-2), \ldots$ gerade):

$$\frac{(n-1)-a}{2} - \frac{(n-2)-a}{2} = \begin{cases} \frac{n-1}{2} - \frac{n-3}{2} = 1 \text{ für n ungerade} \\ \frac{n-2}{2} - \frac{n-2}{2} = 0 \text{ für n gerade} \end{cases}$$

Die durch den Ausdruck $\frac{n-a}{2}$ mit $a = \begin{cases} 1, & \text{wenn n ungerade} \\ 0, & \text{wenn n gerade} \end{cases}$ erzeugte Folge von maximal möglichen Zuwächsen an Unbalanciertheit hat also folgendes Aussehen:

$$\begin{array}{ll} n & 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9 \ldots n \\ M & 0\ 0\ 1\ 1\ 2\ 2\ 3\ 3\ 4 \ldots \frac{(n-1)-a}{2} \end{array}$$

Durch das alternierende Zusammenfassen dieser Folge erhält man zwei arithmetische Reihen mit dem Anfangsglied 1 und dem Zuwachs 1. Die Summe dieser beiden arithmetischen Reihen ergibt die maximal mögliche Unbalanciertheit eines Graphen zu n Punkten, denn mit jedem Schritt wird zu einem Graphen mit maximalem $\delta(G)$ der maximale Zuwachs hinzugefügt, wiederum einen Graphen mit maximalem $\delta(G)$ als Ausgangspunkt erzeugend.

Die Formel für die Summe der beiden arithmetischen Reihen lautet

$$\frac{\frac{(n-1)-a}{2}+1}{2} \cdot \frac{(n-1)-a}{2} + \frac{\frac{(n-2)-a}{2}+1}{2} \cdot \frac{(n-2)-a}{2}$$

Ausgerechnet für den Fall: n gerade, und den Fall: n ungerade erhält man:

n gerade: $$\frac{\frac{n-2}{2}+1}{2} \cdot \frac{n-2}{2} + \frac{\frac{n-2}{2}+1}{2} \cdot \frac{n-2}{2} = \frac{n(n-2)}{4}$$

n ungerade: $$\frac{\frac{n-1}{2}+1}{2} \cdot \frac{n-1}{2} + \frac{\frac{n-2}{2}+1}{2} \cdot \frac{n-3}{2} = \frac{n(n-2)+1}{4}$$

Zusammenfassend gilt also:

$$\delta(G) \leq \frac{n(n-2)+\mathcal{E}}{4}, \quad \mathcal{E} = \alpha = \begin{cases} 1, & \text{wenn n ungerade} \\ 0, & \text{wenn n gerade} \end{cases}$$

was zu beweisen war.

Literaturhinweise:

ABELSON, R.P. and ROSENBERG, M.J. (1958): Symbolic psycho-logic: a model of attitudinal cognition. Behavior. Sc., 3, 1 - 13

FLAMENT, C. (1965): Theorie des graphes et structures sociales. Paris: Mouton, Paris: Gauthier-Villars; III, 117 - 160