STABILITÄTSUNTERSUCHUNGEN AN HAND DES MODELLS "ÖSTERREICH I"

Peter FLEISSNER
Karlheinz HIETLER

Forschungsbericht Nr. 54
Juni 1971

INHALTSVERZEICHNIS

LITERATURLISTE

1. P. SCHÖNFELD, Methoden der Ökonometrie, Band I, Verlag Franz Valen GmbH, Berlin und Frankfurt/Main 1969

2. J. JOHNSTON, Econometric Methods, McGraw-Hill, New York 1963

3. M. MALINVAUD, Statistical Methods of Econometrics, North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1968

4. W. HAHN, Über die Anwendung der Methode von Ljapunow auf Differenzengleichungen, Mathematische Annalen, Band 136, S.430-441, 1958

5. R. ZURMÜHL, Matrizen, Springer, Berlin 1964

6. T. YAMANE, Mathematics for Economists, Englewood Cliff, New York 1962

7. D. K. FADDEJEW, W. N. FADDEJEWA, Numerische Methoden der linearen Algebra, R. Oldenbourg, München 1964

8. P. FLEISSNER, E. FURST, E. LÖSCHNER, F. SCHEBECK, St. SCHLEICHER, G. SCHWÖDIAUER, H. WINTER, Modell ÖSTERREICH I, Ein makroökonometrisches Prognose- und Entscheidungsmodell, Forschungsmemoranden Nr. 44 und Nr. 45, Institut für Höhere Studien und Wissenschaftliche Forschung, Wien, Juni 1970

9. K. MORI, "Generalized Eigenvalue Problem of an Econometric Model", Keio University, Tokyo, präsentiert auf dem Zweiten Weltkongress der Econometric Society, Cambridge (England), September 1970

10. St. SCHLEICHER, Wirtschaftspolitische Simulation mit dem ökonometrischen Modell ÖSTERREICH I. Forschungsmemorandum Nr. 50, Institut für Höhere Studien und Wissenschaftliche Forschung, Wien, November 1970

STABILITÄT VON DYNAMISCHEN LINEAREN ÖKONOMETRISCHEN MODELLEN

I. PROBLEMSTELLUNG UND AUFBAU

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der Untersuchung von Stabilitätsproblemen bei dynamischen linearen ökonometrischen Modellen. Die hier dargestellten Kriterien können natürlich auf beliebige lineare Systeme von Differenzengleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten angewandt werden. Durch besondere Berücksichtigung der Struktur eines ökonometrischen Modells können Vereinfachungen bei Stabilitätsuntersuchungen erreicht werden.

Eng verbunden mit dem Begriff Stabilität sind die Begriffe Gleichgewicht bzw. Gleichgewichtspfad. Im folgenden wird auf ihre Bedeutung in Hinblick auf ökonometrische Modelle explizit eingegangen.

Den Abschluß bilden konkrete Anwendungen auf ein Modell der österreichischen Volkswirtschaft.

II. DEFINITION

II.1. Lineares ökonometrisches Modell

1.1. Definition

Ein lineares ökonometrisches Modell besteht aus einem System von linearen Gleichungen (linear in bezug auf die Parameter und auf die Variablen).

Die Gleichungen zerfallen in:

a) Definitionsgleichungen, deren Koeffizienten a priori bekannt sind,

b) Verhaltensgleichungen, deren Koeffizienten durch Kleinst-Quadrat-Schätzungen oder ein mehrstufiges Schätzverfahren ermittelt wurden. [1, 2, 3].

1.2. Klassifizierung der Variablen:

a) endogene Variable werden durch das Modell bestimmt. Je einer endogenen Variablen entspricht je eine lineare Gleichung. Diese wird nach der endogenen Variablen aufgelöst.

b) prädeterminierte Variable

exogene Variable

verzögerte endogene Variable

Instrumentvariable (Steuersatz, Mindestreservensatz)

andere exogene Variable (Frosttage/Jahr)

Ökonomische Daten werden in der Regel in äquidistanten Zeitabständen (Perioden) erhoben (z.B. Jahresdaten, Quartals-, Monatsdaten), wodurch eine Diskretisierung der Zeit erfolgt. Das Auftreten von verzögerten endogenen Variablen erfordert eine mathematische Beschreibung durch ein lineares Differenzengleichungssystem. Ein solches Modell wird ein dynamisches Modell genannt. Treten Verzögerungen, die größer als eine Periode sind, auf, so entspricht dies einem Differenzengleichungssystem höherer als erster Ordnung. Durch Einführung von Hilfsvariablen kann dieses System in ein System erster Ordnung übergeführt werden.

1.3. Einschränkungen:

Alle weiteren Überlegungen werden unter zwei Einschränkungen durchgeführt:

a) Alle Parameter des ökonometrischen Modells werden über die Zeit als konstant angesehen;

b) Die Residuen in den Verhaltensgleichungen werden vernachlässigt.

1.4. Strukturform und reduzierte Form:

Das System der in II.1.2.a) angegebenen Gleichungen wird so angeschrieben, daß auf den linken Seiten jeweils die endogenen, auf den rechten Seiten jeweils die prädeterminierten Variablen stehen. Diese Darstellung bezeichnet man als Strukturform des ökonometrischen Modells.

$$Yy_t = Xx_t \tag{1}$$

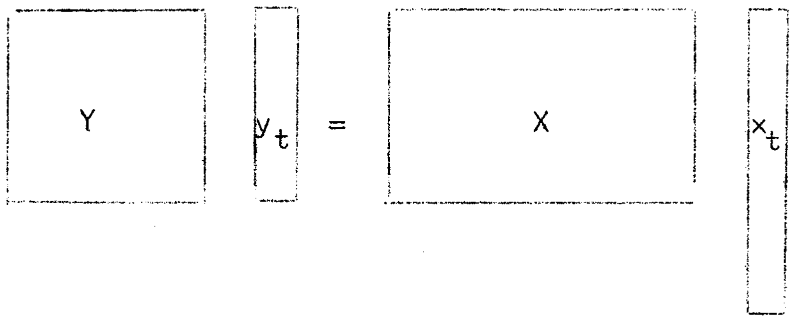
wobei: y_t . . . Spaltenvektor der n endogenen Variablen zur Zeit t; $[n \times 1]$

x_t . . . Spaltenvektor der k prädeterminierten Variablen zur Zeit t; $[k \times 1]$

Y . . . Koeffizientenmatrix der endogenen Variablen; $[n \times n]$

X . . . Koeffizientenmatrix der prädeterminierten Variablen; $[n \times k]$

bedeuten.



Auflösung des Gleichungssystems (1) nach y_t ergibt (Y als regulär vorausgesetzt):

$$y_t = Zx_t \qquad (2)$$

wobei

$$Z = Y^{-1}X$$

(2) nennt man die reduzierte Form eines ökonometrischen Modells.

1.5. Besonderheiten von Y:

a) Y quadratisch, $[n \times n]$
b) regulär. (Wäre die Matrix singulär, könnte durch Veränderung der Messgenauigkeit der Daten Regularität hergestellt werden.)
c) $y_{ii} = 1$; $i=1,\dots,n$, (Hauptdiagonalelemente von Y)
d) Kann Y durch Vertauschen von Zeilen und Spalten in eine Dreiecksmatrix verwandelt werden, nennt man dieses Modell rekursiv, ansonsten interdependent.

1.6. Verallgemeinerung der Darstellung eines linearen ökonometrischen Modells:

In der Strukturform liegen zwei lineare Operatoren vor:

$$Yy_t = z_t$$

d.i. ein linearer Operator Y: $\mathbb{R}^n \ni y_t \xrightarrow{Y} z_t \in \mathbb{R}^n$

und $Xx_t = z_t$

d.i. ein linearer Operator X: $\mathbb{R}^k \ni x_t \xrightarrow{X} z_t \in \mathbb{R}^n$

wobei z_t eine Hilfsvariable darstellt.

Existiert der inverse Operator Y^{-1} von Y:

$$Y^{-1}: \mathbb{R}^n \ni z_t \xrightarrow{Y^{-1}} y_t \in \mathbb{R}^n,$$

so entspricht die reduzierte Form dem zusammengesetzten Operator

$$Y^{-1}.X: \mathbb{R}^k \ni x_t \xrightarrow{X} z_t \xrightarrow{X^{-1}} y_t \in \mathbb{R}^n$$

Definition eines linearen Operators:

Ein linearer Operator L ist eine Abbildung einer Menge A in eine Menge B mit folgenden Eigenschaften:

a) Additiv: $L(a_1 + a_2) = L(a_1) + L(a_2)$, wobei $a_1, a_2 \in A$

b) Homogen: $L(c\ a) = cL(a)$, wobei $a \in A$, $c \in R$

R ... Zahlenkörper

Satz: Ein linearer Operator ist eindeutig.

Beweis: $\left.\begin{array}{l} L(a) = b_1 \\ \underline{L(a) = b_2} \end{array}\right\} \Rightarrow b_1 \overset{?}{=} b_2$ $\qquad a \in A$, $\quad b_1, b_2 \in B$

$$b_1 - b_2 = L(a) - L(a) \overset{(a)}{=} L(a-a) \overset{(b)}{=} L(0) = 0 \Rightarrow b_1 = b_2$$

II.2. Systeme von linearen Differenzengleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

II.2.1. Die homogene Gleichung lautet

$$y_{t+1} = Ay_t \qquad t=0,1,2,\ldots$$

y_0 . . . Anfangsbedingungen,

gegeben seien:

y_t, y_{t+1} . . . Vektor mit n Elementen
A_n . . . quadratische Matrix $[n\times n]$

Wären die Elemente a_{ij}, $i\neq j$, der Matrix A gleich Null, so hätte man eine Diagonalform vorliegen.

$$y^{i*}_{t+1} = \lambda_i y^{i*}_t \qquad i=1,\ldots,n.$$

Die allgemeine Lösung wäre

$$y^{i*}_t = c_i . \lambda^t_i \qquad \text{und} \qquad (y^{i*}_t)_k = \delta_{ik}\lambda^t_i$$

ein Fundamentalsystem.

Substitution

$$y_t = Sy^*_t \qquad \text{oder} \qquad y^i_t = \sum_j s_{ij}y^{j*}_t$$

ergibt $y^i_{t+1} = \sum_j a_{ij}y^j_t = \underline{\sum_k \sum_j a_{ik}s_{kj}y^{j*}_t} =$

$$= \sum_j s_{ij}y^{j*}_{t+1} = \sum_j s_{ij}\lambda_j y^{j*}_t = \underline{\sum_k \sum_j \delta_{ik}s_{kj}\lambda_j y^{j*}_t}$$

Aus den unterstrichenen Ausdrücken folgt:

$$\sum_k \sum_j a_{ik} s_{kj} y_t^{j*} = \sum_k \sum_j \delta_{ik} s_{kj} \lambda_j y_t^{j*}$$

oder

$$\sum_k \sum_j (a_{ik} s_{kj} - \delta_{ik} s_{kj} \lambda_j)\, y_t^{j*} = 0$$

$$\forall\, y_t^{j*}\ ,\ j=1,\ldots,n$$

$$\Rightarrow \sum_k (a_{ik} s_{kj} - \delta_{ik} s_{kj} \lambda_j) = 0$$

$$\sum_k (a_{ik} - \delta_{ik} \lambda_j) s_{kj} = 0\ , \qquad i,j,k=1,\ldots,n$$

Dies ist aber genau das Eigenwertproblem der Matrix A

λ_j . . . Eigenwerte

s_{kj} . . . Elemente des zu λ_j gehörigen Eigenvektors

Das Gleichungssystem besitzt nichttriviale Lösungen, wenn

$\det(A-\lambda E) = 0 \Rightarrow \lambda_i \quad i=1,\ldots,n$

Unter der Annahme, daß

$\lambda_i \neq \lambda_j$, $\quad i \neq j$, gilt:

$(y_t^{i*})_k$ bilden ein Fundamentalsystem von Lösungen der Diagonalform.

$$(\overset{i}{y}_t)_k = \sum_j s_{ij} (\overset{j*}{y}_t)_k = \sum_j s_{ij}\, \delta_{jk}\, \lambda_j^t = s_{ik}\, \lambda_k^t$$

$$\overset{i}{y}_t = \sum_k c_k (\overset{i}{y}_t)_k = \sum_k c_k s_{ik} \lambda_k^t$$

Lösung der homogenen Gleichung in Matrixschreibweise:

$$y_t = S \Lambda^t c$$

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & \dots & s_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ s_{n1} & \dots & s_{nn} \end{bmatrix} \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ \cdot & \lambda_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot\ \cdot \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{bmatrix}$$

Bestimmung der Konstanten c_k:

Gegeben sei ein Vektor von Anfangswerten $\overset{i}{y}_o$, $i=1,\dots,n$

$$\overset{i}{y}_o = \sum_k s_{ik} c_k$$

Inhomogenes lineares Gleichungssystem für die Konstanten c_k.

In Matrixschreibweise:

$y_o = S . c \qquad y_o = (\overset{i}{y}_o),\ S = (s_{ik}),\ c = (c_k)$

$c = S^{-1} y_o$

daraus folgt

$y_t = S \Lambda^t S^{-1} y_o$

II.2.2. Die inhomogene Gleichung lautet

$$y_{t+1} = Ay_t + f_t \qquad t=0,1,2,3,...$$

f_t = Störfunktionen

Gesucht ist zunächst eine Partikulärlösung, bezogen auf einen bestimmten Typ der Störfunktionen. Die allgemeine Lösung ergibt sich aus der Summe der Lösung der homogenen Gleichung und der Partikulärlösung. (Siehe IV.3)

II.3. Stabilität[1)] von Differenzengleichungssystemen

II.3.1. Definitionen

Die folgenden Definitionen gelten allgemein für lineare und nichtlineare Differenzengleichungssysteme.

II.3.1.1. Voraussetzungen

In den folgenden Differenzengleichungssystemen ist die unabhängige Variable t auf ganzzahlig fortschreitende Werte $t = t_o, t_o+1, ..$ beschränkt. Der "Anfangspunkt" t_o ist ebenfalls als ganzzahlig variabler Parameter anzusehen, dessen Werte jeweils in einer festen Zahlenfolge t^*, t^*+1, t^*+2, ... enthalten sind.

$$(*) \quad y_{t+1} = g(y_t, t), \; y_t \in \mathbb{R}^n \quad \text{für } t=t_o, t_o+1, t_o+2, ...,$$

sei ein System von Differenzengleichungen, nicht notwendigerweise linear und autonom. Die rechte Seite des Systems sei für alle y_t definiert, beschränkt und bezüglich der y_t stetig.

---

1) W. HAHN, Über die Anwendung der Methode von Ljapunow auf Differenzengleichungen in: Mathematische Annalen, Bd. 136, S. 430-441 (1958).

Da Stabilität hier immer in bezug auf die triviale Lösung

$y_t = 0$ für $t = t_o, t_o+1, t_o+2, \ldots$

verstanden wird, gelte

$g(o,t) = 0$ für $t = t_o, t_o+1, t_o+2, \ldots$

Die Gleichung (∗) läßt also die triviale Lösung zu.

Diejenige Lösung von (∗), die für $t=t_o$ den Anfangswert y_{t_o} annimmt, sei mit $y_t(y_{t_o})$ bezeichnet.

Es ist also

$$y_{t_o}(y_{t_o}) = y_{t_o}$$

Man nennt die triviale Lösung ebenso wie bei Differentialgleichungen stabil, wenn $y_t(y_{t_o})$ bei hinreichend kleinen Anfangswerten y_{t_o} im Zeitverlauf klein bleibt.

Im Gegensatz zu den bei Differentialgleichungen bestehenden Verhältnissen hängt die Eigenschaft, stabil zu sein, auch von der Wahl des Anfangszeitpunktes t_o ab, da man nicht jede bei t_1 beginnende Lösung als Fortsetzung einer bei $t_o < t_1$ angangenden auffassen kann. Man muß daher die Unabhängigkeit von t_o in die Stabilitätsdefinition aufnehmen.

II.3.1.2. Definition der Stabilität der trivialen Lösung

Die triviale Lösung heißt <u>stabil</u>, wenn sich für jedes $t_o \geqslant t^*$ zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so angeben läßt, daß

$$\forall t \geqslant t_o: \|y_t(y_{t_o})\| < \varepsilon \quad \text{, sofern nur} \quad \|y_{t_o}\| < \delta \quad \text{ist.}$$

II.3.1.3. Definition der asymptotischen Stabilität der trivialen Lösung:

Die triviale Lösung heißt asymptotisch stabil, wenn sie stabil im Sinn von Definition II.3.1.2. ist und wenn ein $h > 0$ derart existiert, daß

$$(**) \quad \lim_{t \to \infty} y_t(y_{t_o}) = 0 \qquad t = t_o, t_o+1, \dots$$

für alle $\| y_{t_o} \| < h$ ist.

Die Menge aller y_{t_o}, von denen Lösungen ausgehen, die (**) befriedigen, heißt Einzugsbereich der trivialen Lösung.

II.3.1.4. Definition der Istabilität der trivialen Lösung

Die triviale Lösung heißt instabil, wenn es zu jedem $t_o \geq t^*$ ein $\varepsilon > 0$, eine gegen 0 konvergierende Folge von Anfangswerten $y^n_{t_o}$ und eine Folge von Zeitpunkten $t_n \to \infty$ derart gibt, daß für hinreichend große n entweder $y_{t_n}(y^n_{t_o})$ nicht mehr existiert oder

$$\| y_{t_n}(\bar{y}_{t_o}) \| \geq \varepsilon \quad \text{wird.}$$

Gilt diese Aussage für jede Lösung mit hinreichend kleinem Anfangswert $\| y_{t_o} \| < \eta$, so heißt die triviale Lösung total instabil.

II.3.1.5. Sätze über die Stabilität eines linearen homogenen Differenzengleichungssystems mit konstanten Koeffizienten:

Im folgenden werden Sätze formuliert, die unter der Einschränkung auf lineare homogene Differenzengleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten oben angeführten Definitionen entsprechen.

$$y_{t+1} = Ay_t \qquad t=0,1,\ldots$$

a) Sind Eigenwerte der Matrix A dem Betrag nach eins und einfach, oder gehören sie zu einfachen Elementarteilern, und sind die restlichen Eigenwerte dem Betrag nach kleiner als eins, so ist die triviale Lösung stabil, aber nicht asymptotisch. Andernfalls ist die triviale Lösung instabil.

b) Wenn alle Eigenwerte der Matrix A dem Betrag nach kleiner als eins sind, so ist die triviale Lösung asymptotisch stabil.

c) Ist mindestens ein Eigenwert der Matrix A dem Betrag nach größer als eins, so ist die triviale Lösung instabil.

III. REDUKTION DES URSPRÜNGLICHEN MODELLS UND REGELKREIS

III.1. Partionierung der Matrizen Y und X sowie der entsprechenden Vektoren

Für das durch statistische Methoden erhaltene ökonometrische Modell in Strukturform erweist sich eine Umformung als günstig: Die Gründe dafür sind:

a) Vereinfachung der numerischen Behandlung. Inversion von großen Matrizen (Y-Matrix) aufwendig.
b) Gewinnung von weiteren qualitativen Aussagen im Rahmen der Strukturform.

Die Partitionierung der Matrizen X und Y kann auf zwei verschiedene Arten durchgeführt werden. Danach wird das Gleichungssystem reduziert, d.h. durch Substitution wird die Zahl der Gleichungen vermindert. Durch die Reduktion erfahren die Stabilitätseigenschaften des Systems keine Änderung.

Wie weiter unten gezeigt wird, führt dieser Vorgang bei besonderer Gestalt der Teilmatrizen zu einer wesentlichen Vereinfachung der Berechnung.

III.2. Methoden zur Partitionierung der Strukturmatrizen

III.2.1. Methode A

Die Grundidee der Methode A liegt in der Aufteilung der endogenen Variablen in 2 Gruppen:

a) endogene, die verzögert im Modell vorkommen (y_t^*)
b) endogene, die nicht verzögert vorkommen (y_t^{**})

Der Vektor x_t der prädeterminierten Variablen zerfällt in drei Teile, y_{t-1}^*, y_{t-1}^{**} und u_t, den Teilvektor der exogenen Variablen.

$$\left[\begin{array}{c|c} Y_{11} & Y_{12} \\ \hline Y_{21} & Y_{22} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} y_t^* \\ \hline y_t^{**} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ \hline X_{21} & X_{22} & X_{23} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} y_{t-1}^* \\ \hline y_{t-1}^{**} \\ \hline u_t \end{array}\right]$$

Diese Anordnung kann durch Zeilen- und Spaltentausch immer erreicht werden.
Da laut Voraussetzung b) y_{t-1}^{**} im Modell nicht vorkommt, bestehen die Elemente der Matrizen X_{12} und X_{22} nur aus Nullen. y_t^{**} wird durch Substitution eliminiert. Dadurch verschwinden die Null-Spalten der Matrix X.
Die Gleichungen des Systems lauten:

$$Y_{11}y_t^* + Y_{12}y_t^{**} = X_{11}y_{t-1}^* + X_{13}u_t$$

$$Y_{21}y_t^* + Y_{22}y_t^{**} = X_{21}y_{t-1}^* + X_{23}u_t$$

Daraus folgt für y_t^{**}

$$y_t^{**} = -Y_{22}^{-1}Y_{21}y_t^* + Y_{22}^{-1}X_{21}y_{t-1}^* + Y_{22}^{-1}X_{23}u_t$$

Substitution ergibt:

$$(Y_{11} - Y_{12}Y_{22}^{-1}Y_{21})y_t^* = (X_{11} - Y_{12}Y_{22}^{-1}X_{21})y_{t-1}^* + (X_{13} - Y_{12}Y_{22}^{-1}X_{23})u_t$$

In der Praxis ergeben sich durch die besondere Form der Teilmatrizen große Vereinfachungen. Ist z.B. Y_{12} eine Nullmatrix, so können Stabilitätsüberlegungen direkt mit den Matrizen

Y_{11} und X_{11} durchgeführt werden. Entsprechende Vereinfachungen erhält man auch beim Verschwinden von Y_{21} bzw. X_{21}.

III.2.2. Methode B

Jeder k-ten Gleichung eines Modells wird eineindeutig die k-te Variable des Vektors der endogenen Variablen zugeordnet. Der Methode B liegt folgende Aufteilung der endogenen Variablen zugrunde:

a) endogene, in deren Gleichung mindestens eine verzögerte endogene Variable vorkommt. ($y_t^{\triangle}$)

b) endogene, in deren Gleichung keine verzögerte endogene Variable vorkommt ($y_t^{\triangle\triangle}$).

$$\left[\begin{array}{c|c} Y_{11} & Y_{12} \\ \hline Y_{21} & Y_{22} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} y_t^{\triangle} \\ \hline y_t^{\triangle\triangle} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ \hline X_{21} & X_{22} & X_{23} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} y_{t-1}^{\triangle} \\ \hline y_{t-1}^{\triangle\triangle} \\ \hline u_t \end{array}\right]$$

Da laut Voraussetzung b) $y_{t-1}^{\triangle}$ und $y_{t-1}^{\triangle\triangle}$ in den Gleichungen für $y_t^{\triangle\triangle}$ nicht vorkommen, verschwinden die Matrizen X_{21} und X_{22}.

$$Y_{11}y_t^{\triangle} + Y_{12}y_t^{\triangle\triangle} = X_{11}y_{t-1}^{\triangle} + X_{12}y_{t-1}^{\triangle\triangle} + X_{13}u_t$$

$$Y_{21}y_t^{\triangle} + Y_{22}y_t^{\triangle\triangle} = X_{23}u_t$$

Daraus folgt für $y_t^{\triangle\triangle}$

$$y_t^{\triangle\triangle} = -Y_{22}^{-1}Y_{21}y_t^{\triangle} + Y_{22}^{-1}X_{23}u_t$$

Substitution ergibt

$$(Y_{11} - Y_{12}Y_{22}^{-1}Y_{21})y_t^{\triangle} =$$

$$= (X_{11} - X_{12}Y_{22}^{-1}Y_{21})y_{t-1}^{\triangle} + (X_{13} - Y_{12}Y_{22}^{-1}X_{23})u_t + X_{12}Y_{22}^{-1}X_{23}u_{t-1}$$

Ist in diesem Fall Y_{21} eine Nullmatrix, kann die Stabilität allein an Hand von Y_{11} und X_{11} berechnet werden.

Man wird zweckmäßig Methode B verwenden, wenn die Anzahl der Komponenten von $y_t^{\triangle\triangle}$ die Anzahl der Komponenten von y_t^{**} übersteigt.

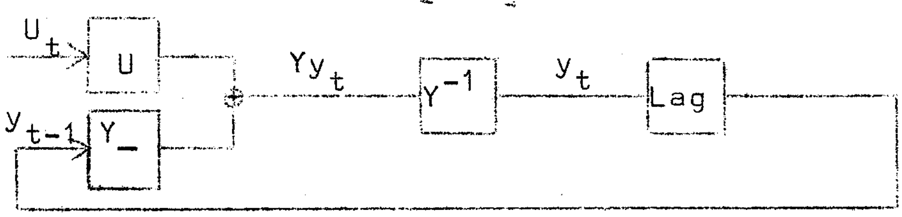
III.3. Regelkreise

III.3.1. Aggregierter Regelkreis der Strukturform:

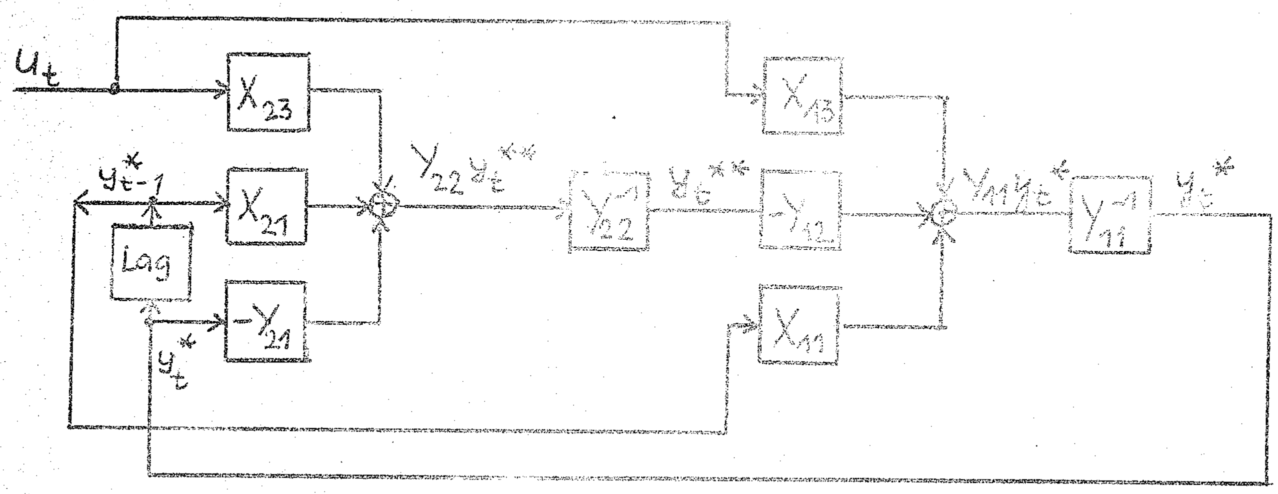
$$Yy_t = Xx_t$$

Durch Partitionierung von X und x_t in endogen verzögerte und exogene Teilmatrizen bzw. -vektoren erhält man

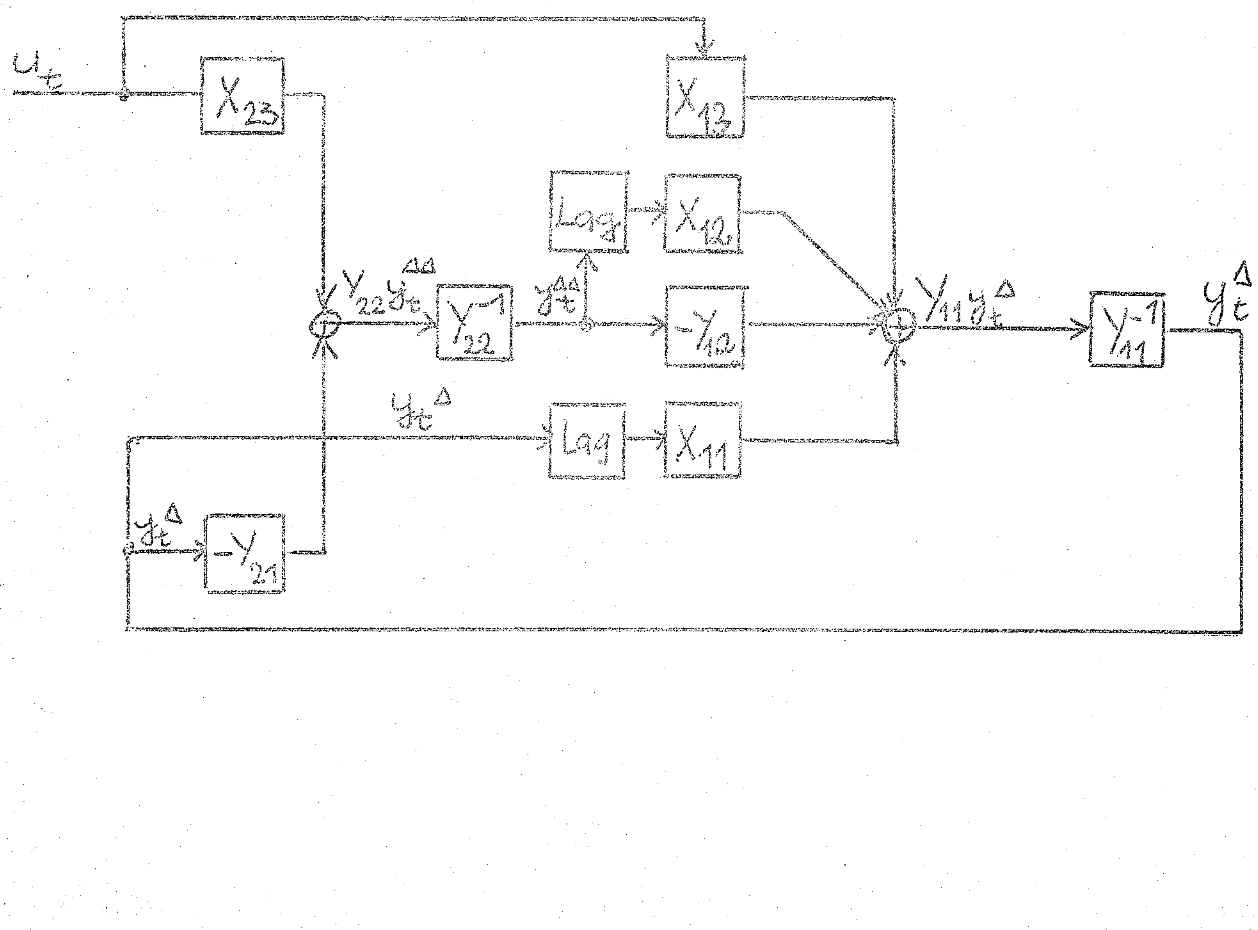
$$Yy_t = \left[Y_- \,\vdots\, U \right] \cdot \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ \cdots \\ u_t \end{bmatrix} = Y_-y_{t-1} + Uu_t$$



III.3.2.1. Regelkreis für Methode A



III.3.2.2. Regelkreis für Methode B



IV. SPEZIELLE PARTIKULÄRLÖSUNGEN

IV.1. Partionierung der Z-Matrix in die Matrizen Y_- und U:

Ausgehend von Gleichung (2) in II.1.4., der reduzierten Form

$$y_t = Zx_t$$

empfiehlt sich zur Berechnung der Gleichgewichtslösung eine Aufspaltung der prädeterminierten Variablen in endogen verzögerte und exogene Variablen. Die Matrix Z zerfällt daher in die Matrizen Y_- und U.

$$\begin{bmatrix} y_t \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} Y_- & U \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} y_{t-1} \\ \hline u_t \end{array}\right]$$

$$y_t = Y_- \, y_{t-1} + Uu_t$$

IV.2. Die Basis für Stabilitätsuntersuchungen in der Ökonomie bildet die Gleichgewichtslösung. Gleichgewichtslösungen sind methmatisch spezielle Partikulärlösungen des Differenzengleichungssystems. Da nur Abweichungen von der Gleichgewichtslösung interessieren, wird das inhomogene Gleichungsystem nach den Abweichungen $\tilde{y}_t$ von der Gleichgewichtslösung y_t^* analysiert.

$\tilde{y}_t = y_t - y_t^*$, y_t^* . . . partikuläre Lösung.

Einsetzen in $y_t = \underline{Y}\, y_{t-1} + Uu_t$ ergibt

$$\tilde{y}_t + y^*_t = \underline{Y}\,\tilde{y}_{t-1} + \underline{Y}\,y^*_{t-1} + Uu_t .$$

Da für y^*_t gilt $\quad y^*_t = \underline{Y}\,y^*_{t-1} + Uu_t,$

erhält man $\quad \tilde{y}_t = \underline{Y}\,\tilde{y}_{t-1}\;.$

Diese Umformung führt also zum homogenen Gleichungssystem, wobei y_t durch $\tilde{y}_t$ ersetzt werden muß.

Die Stabilitätsuntersuchung bezüglich der Gleichgewichtslösung y^*_t erstreckt sich auf das homogene Gleichungssystem in Abweichungen $\tilde{y}_t$ vom Gleichgewichtspfad y^*_t.

IV.3. Spezielle Wahl des Zeitverlaufs der exogenen Variablen:

Formal entspricht der ökonomischen Gleichgewichtslösung (Gleichgewichtspunkt, gleichgewichtiger Wachstumspfad) eine partikuläre Lösung des Differenzengleichungssystems.

Wählt man die exogenen Variablen als im Zeitverlauf konstant, erhält man u.a. einen Gleichgewichtspunkt. Linear wachsende exogene Variable führen zu einem Wachstumspfad als partikuläre Lösung.

IV.3.1. Im Zeitverlauf konstante exogene Variable:

$$u = u_t = u_{t+k} \qquad \forall\, k = 0,1,2,\ \ldots$$

Der Gleichgewichtspunkt ist $y^* = y^*_t = y^*_{t-1}$. Daraus folgt:

mit $y_t = Y_- y_{t-1} + Uu_t$

$y^* = Y_- y^* + Uu$

$\underline{y^* = (E-Y_-)^{-1} Uu}$, falls $(E-Y_-)$ regulär.

IV.3.2. Linear wachsende exogene Variable:

IV.3.2.1. Alle exogenen Variablen wachsen mit der gleichen linearen Wachstumsrate ρ.

$u_t = u_o(1 + \rho t)$ $\qquad \rho \ldots$ Wachstumsrate/Zeiteinheit

Ansatz für die partikuläre Lösung

$$y^*_t = y^*_o + \hat{y} t$$

$$y^*_o + \hat{y} t = Y_- y^*_o + Y_- \hat{y} t - Y_- \hat{y} + Uu_o + Uu_o \rho t$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$\hat{y} = Y_- \hat{y} + Uu_o \rho$$

$$\hat{y} = (E-Y_-)^{-1} Uu_o \rho$$

$$y^*_o = Y_- y^*_o - Y_- \hat{y} + Uu_o$$

$$y^*_o = (E-Y_-)^{-1} (E-Y_-(E-Y_-)^{-1} \rho) Uu_o$$

Daraus folgt die partikuläre Lösung

$$y^*_t = (E-Y_-)^{-1} (E-Y_-(E-Y_-)^{-1} \rho + E \rho t) Uu_o$$

Wachsen die exogenen Variablen alle mit gleichem ρ , so wachsen die endogenen i.a. mit verschiedenen Wachstumsraten/ Zeiteinheit.

IV.3.2.2. Die exogenen Variablen besitzen verschiedene Wachstumsraten $\hat{u}$.

$$u_t = u_o + \hat{u}t$$

$$\hat{y} = (E-Y_-)^{-1}U\hat{u}$$

$$y^*_o = (E-Y_-)^{-1}(Uu_o - Y_-(E-Y_-)^{-1}U\hat{u})$$

$$y^*_t = (E-Y_-)^{-1}\left\{\left[Et-Y_-(E-Y_-)^{-1}\right]U\hat{u} + Uu_\bullet\right\}$$

IV.3.3. Exponentiell wachsende exogene Variable.

IV.3.3.1. Alle exogenen Variablen wachsen mit der gleichen exponentiellen Wachstumsrate

$$u_t = u_o(1+\rho)^t$$

$$y^*_t = y^*_o(1+\alpha)^t$$

$$y^*_o(1+\alpha)^t = Y_-y^*_o(1+\alpha)^{t-1} + Uu_o(1+\rho)^t$$

$$y^*_o(1+\alpha)^t = Y_-y^*_o(1+\alpha)^t\frac{1}{1+} + Uu_o(1+\rho)^t$$

Koeffizientenvergleich gibt mit $\alpha = \rho$

$$y^*_\bullet = Y_-y^*_o\frac{1}{1+\rho} + Uu_o$$

$$y^*_{\bullet} = (E-Y_{-}\frac{1}{1+\rho})^{-1}Uu_o$$

$$y^*_t = (E-Y_{-}\frac{1}{1+\rho})^{-1}Uu_o(1+\rho)^t$$

Alle endogenen Variablen wachsen mit der gleichen Wachstumsrate, die gleich der Wachstumsrate der exogenen Variablen ist.

IV.3.3.2. Die exogenen Variablen besitzen verschiedene Wachstumsraten ρ_j

Die Lösung erfolgt nach dem Superpositionsprinzip.

$$Uu_o = \begin{bmatrix} U_{11}u_o^1 + \dots + U_{1k}u_o^k \\ \\ U_{k1}u_{\bullet}^1 + \dots + U_{kk}u_o^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ v_1 \\ \\ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \\ v_2 \\ \\ \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} \\ v_k \\ \\ \end{bmatrix}$$

Jede exogene Variable u_o^j wächst mit der Wachstumsrate ρ_j.

Das Störglied erhält die Gestalt

$$\sum_{i=1}^{k} v_i(1+\rho_i)^t$$

$$y^*_t = \sum_{j=1}^{k} (E-Y_{-}\frac{1}{1+\rho_j})^{-1} v_j(1+\rho_j)^t$$

IV.3.4. Die Werte der exogenen Variablen sind beliebig:

$$y_t^* = \sum_{k=0}^{t} \underline{Y}^k U u_{t-k}$$

findet man als partikuläre Lösung.

Zu beweisen ist

$$y_t^* = \underline{Y}\, y_{t-1}^* + U u_t \ .$$

Substitution ergibt

$$\sum_{k=0}^{t} \underline{Y}^k U u_{t-k} = \underline{Y} \sum_{k=0}^{t-1} \underline{Y}^k U u_{t-k-1} + U u_t$$

$$= \sum_{k=0}^{t-1} \underline{Y}^{k+1} U u_{t-(k+1)} + U u_t$$

$$= \sum_{k=1}^{t} \underline{Y}^k U u_{t-k} + U u_t$$

$$= \sum_{k=0}^{t} \underline{Y}^k U u_{t-k}$$

Will man die allgemeine Lösung angeben, so ist folgendes zu beachten: Alle Berechnungen gelten unter der Voraussetzung, daß die Daten für die exogenen Variablen inklusive u_o und y_{-1} gegeben sind. Fängt die Zeitreihe der u_t bei u_1 an, so kann eine Zeitverschiebung durchgeführt werden.

u_o geht über in u_1

t geht über in $t-1$

y_o^* geht über in y_1^*

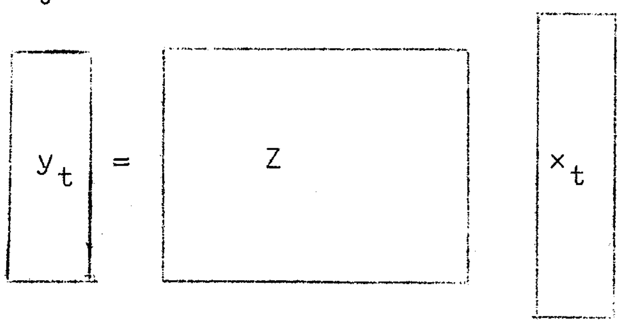
Die endogenen Variablen können bei gegebenem y_0, u_1, u_2, ... ab y_1 berechnet werden.

V. STABILITÄTSKRITERIEN FÜR DIE REDUZIERTE FORM DES ÖKONOMETRISCHEN MODELLS

Invertiert man die Koeffizientenmatrix Y der endogenen Variablen y_t und multipliziert von links die Matrix X der exogenen Variablen, so erhält man die Matrix Z der reduzierten Form. Auf diese Matrix Z können nach Partitionierung die üblichen Stabilitätsuntersuchungen angewendet werden.

V.1. Partitionierung der Matrix Z der reduzierten Form

$$y_t = Zx_t$$



Die prädeterminierten Variablen x_t werden in 2 Teile zerlegt, in die endogenen verzögerten Variablen y^{*}_{t-1} und in den Teilvektor der exogenen Variablen u_t. Jene endogenen Variablen, die nicht verzögert vorkommen, bezeichnen wir mit y^{**}_{t-1} und füllen damit den Vektor x_t auf, sodaß in der erweiterten Matrix Z in den y^{**}_{t-1} entsprechenden Spalten nur Nullen vorkommen.

$$\begin{bmatrix} y_t^{*} \\ y_t^{**} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & 0 & Z_{12} \\ Z_{21} & 0 & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1}^{*} \\ y_{t-1}^{**} \\ u_t \end{bmatrix}$$

$$y_t^{*} = Z_{11} y_{t-1}^{*} + Z_{12} u_t$$

$$y_t^{**} = Z_{21} y_{t-1}^{*} + Z_{22} u_t$$

Kommen in der Matrix Z_{11} Null-Zeilen vor, so kann Zeile und Spalte dieser Matrix weggelassen werden, ohne das Stabilitätsverhalten dadurch zu ändern.

Das zweite Gleichungssystem ist für Stabilitätsuntersuchungen ohne Bedeutung. Die Untersuchung kann sich daher auf Z_{11} beschränken.

V.2. Einige traditionelle Stabilitätskriterien

V.2.1. Explizite Berechnung aller Eigenwerte:

Dieser Weg führt mit größerem Rechenaufwand (ev. Verfahren von HESSENBERG oder GIVENS, HOUSEHOLDER)[1] zur genauen Kenntnis aller Eigenwerte der Matrix Z_{11}. Hiebei erhält man Information über das Auftreten, die Größe, die Dämpfung und Frequenz von Schwingungen, die aus der Modellstruktur herrühren.

---

1) siehe R. ZURMÜHL, Matrizen, 4. Auflage, Springer 1964.

Häufig genügt es aber dem Ökonomen, nur zu wissen, ob alle Eigenwerte der Matrix Z_{11} dem Betrag nach kleiner als 1 sind. Eine solche Abschätzung leistet der

V.2.2. Satz von SCHUR[1]

Ein Polynom $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^{n-j}$

vom Grade n, mit reellen Koeffizienten, besitzt dann und nur dann Wurzeln vom Betrag kleiner als 1, wenn alle $\Delta_i > 0$, $i=1,2,\ldots,n$, sind.

$$\Delta_i = \left| \begin{array}{cccc|cccc} a_o & & 0 & 0 & a_n & a_{n-1} & & a_{n-i+1} \\ a_1 & a_o & & 0 & 0 & a_n & \ddots & \\ & a_1 & a_o & & 0 & & a_n & \ddots \\ a_{i-1} & & a_1 & a_o & & & & a_n \\ \hline a_n & & 0 & 0 & a_o & a_1 & & a_{i-1} \\ a_{n-1} & a_n & & 0 & 0 & a_o & \ddots & \\ & \ddots & a_n & & 0 & 0 & a_o & a_1 \\ a_{n-i+1} & \ddots & a_{n-1} & & 0 & & 0 & a_o \end{array} \right|$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_o & a_n \\ a_n & a_o \end{vmatrix} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_o & 0 & a_n & a_{n-1} \\ a_1 & a_o & 0 & a_n \\ a_n & 0 & a_o & a_1 \\ a_{n-1} & a_n & 0 & a_o \end{vmatrix}$$

---

1) siehe T. YAMANE, Mathematics for Economists, Englewood Cliff, N.J. 1962, S.377 f.

V.2.3. Abschätzung mit Hilfe von Matrixnormen[1]

Analog zur Vektornorm $\|x\|$, an die folgende Forderungen gestellt werden,

a) $\|x\| \geqq 0, \quad \|x\| = 0$ nur für $x = 0$

b) $\|cx\| = |c| \ \|x\|$, c beliebiger skalarer Faktor

c) Dreiecks-Ungleichung
$\|x+y\| \leqq \|x\| + \|y\|$,

kann die Matrixnorm $\|A\|$ eingeführt werden. Sie soll folgenden Bedingungen genügen:

a) $\|A\| \geqq 0, \quad \|A\| = 0$ nur für $A = 0$

b) $\|cA\| = |c| \ \|A\|$, c beliebiger skalarer Faktor

c) $\|A+B\| \leqq \|A\| + \|B\|$

d) $\|AB\| \leqq \|A\| \ \|B\|$

Aus den Postulaten geht, wie man leicht zeigen kann, hervor, daß die Norm einer Matrix A immer größer oder gleich dem betragsgrößten Eigenwert der Matrix A ist.

$$Ax = \lambda x$$

$$\|Ax\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \ \|x\| \leqq \|A\| \ \|x\| \quad \Rightarrow$$

$$\|A\| \geqq |\lambda|$$

Hiezu muß vorausgesetzt werden, daß Matrix- und Vektornorm verträglich sind, d.h. für alle Matrizen A und alle Vektoren x

---

1) siehe Zurmühl, a.a.O.

besteht die Ungleichung

$$\| Ax \| \leqq \| A \| \ \| x \|$$

Hieraus folgt leicht ein hinreichendes Kriterium für die asymptotische Stabilität des Gleichungssystems:

Hinreichend für die asymptotische Stabilität des Gleichungssystems

$$y_t = Zx_t$$

ist, daß

$$\| Z_{11} \| < 1$$

Je nach Gestalt der Matrix kann die geeignete Norm ausgesucht werden.

Gebräuchliche Normen sind

a) Gesamtnorm

$$\| A \| = M(A) = n.\max_{i,k} |a_{ik}|$$

b) Zeilennorm

$$\| A \| = Z(A) = \max_{i} \sum_{k} |a_{ik}|$$

c) Spaltennorm

$$\| A \| = S(A) = \max_{k} \sum_{i} |a_{ik}|$$

d) Euklidische Norm

$$\| A \| = N(A) = \sqrt{Sp\ A^{*}A}$$

A^{*} . . . konjugiert komplexe transponierte Matrix A

e) Hilbert-Norm oder Spektralnorm

$$\|A\| = H(A) = \mu_{max}$$

μ^2 . . . Eigenwert von A^*A

Die Normen sind nach steigendem Rechenaufwand geordnet. Die dazu passenden Vektornormen sind

zu a) $$\|x\| = \begin{cases} \max_i |x_i| \\ \sum_i x_i \\ \sqrt{\sum_i x_i^2} \end{cases}$$

zu b) $$\|x\| = \max_i |x_i|$$

zu c) $$\|x\| = \sum_i |x_i|$$

zu d) und e) $$\|x\| = \sqrt{\sum_i x_i^2}$$

Zu einer bestimmten Vektornorm ist unter allen dazu passenden Matrixnormen die kleinste am wertvollsten, diejenige nämlich, für die in der Ungleichung

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$$

das Gleichheitszeichen tatsächlich eintreten kann. Diese Norm heißt Schrankennorm oder lub-Norm (l.u.b. ... least upper bound)

$$lub(A) = \max_x \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

In einer Tabelle wird zu jeder Vektornorm die entsprechende lub-Norm angegeben[1)]

Vektornorm	Matrixnorm
$\|\|x\|\| = \max_i \|x_i\|$	Zeilennorm
$\|\|x\|\| = \sum_i \|x_i\|$	Spaltennorm
$\|\|x\|\| = \sqrt{\sum_i x_i^2}$	Spektralnorm

V.2.4. Ein einfaches hinreichendes Kreterium für Stabilität:

Da die Determinante einer Matrix gleich dem Produkt aller Eigenwerte ist,

$$\det A = \prod_i \lambda_i$$

(absolutes Glied in der Cayley-Hamilton'schen Gleichung), kann hieraus ein ganz einfaches Stabilitätskriterium abgeleiter werden:

Ist die Determinante der Matrix Z_{11}

$$\det Z_{11} > 1 \quad ,$$

so ist das Gleichungssystem instabil. Denn $\det Z_{11} > 1$ bedeutet, daß mindestens ein Eigenwert dem Betrag nach > 1 sein muß.

---

1) siehe Zurmühl, a.a.O, Seite 206.

VI. STABILITÄTSKRITERIEN FÜR DIE STRUKTURFORM

Da man in der Lage sein möchte, möglichst ohne langwierige Umformungen aus der Strukturform, nicht erst aus der reduzierten Form, Aussagen über die Stabilität des Systems zu machen, wurden einige einfache Krieterien abgeleitet, die direkt auf das homogene Gleichungssystem

$$Ay_t = By_{t-1}$$

angewendet werden können.

Die Matrizen A und B stehen für die etwas komplizierteren Ausdrücke in III.2.1. bzw. III.2.2., wobei die exogenen Variablen weggelassen wurden, da man nur an der Stabilität des Gleichgewichtspfades, nicht aber am tatsächlichen Verlauf der Lösung interessiert ist.

VI.1. Ein hinreichendes Kriterium für die asymptotische Stabilität

Ausgehend von der Annahme $\| A^{-1} \| \cdot \| B \| < 1$, d.h. asymptotische Stabilität liegt vor, **gilt:**

$$\| A^{-1} B \| \leq \| A^{-1} \| \; \| B \| < 1.$$

Es erhebt sich das Problem, $\| A^{-1} \|$ abzuschätzen.

VI.1.1. Abschätzung von $\| A^{-1} \|$ mit Hilfe der charakteristischen Gleichung:

Dies kann mit Hilfe der charakteristischen Gleichung leicht durchgeführt werden

$$\det(A - \lambda E) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i) = \sum_{i=0}^{n} a_i \lambda^i$$

Eine Matrix erfüllt ihre charakteristische Gleichung:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i A^i = 0.$$

Multiplikation mit A^{-1} liefert:

$$a_o A^{-1} + a_1 E + a_2 A + \ldots + a_n A^{n-1} = 0$$

$$A^{-1} = - \frac{1}{a_o} \sum_{i=1}^{n} a_i A^{i-1}$$

$$a_o = \det A$$

Nun kann A^{-1} nach oben abgeschätzt werden, wobei die Normpostulate wesentlich eingehen

$$\| A^{-1} \| = \| -\frac{1}{a_o} \sum_{i=1}^{n} a_i A^{i-1} \| \leq \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{a_i}{a_o} \right| \| A \|^{i-1}$$

Hieraus folgt sofort ein hinreichendes Kriterium für asymptotische Stabilität.

Ist $\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{a_i}{a_o} \right| \| A \|^{i-1} \| B \| < 1$, so ist das Gleichungssystem asymptotisch stabil.

VI.1.2. Abschätzung von $\|A^{-1}\|$ mit Hilfe einer Potenzreihe:

Ist $\|E-A\| < 1$, läßt sich $\|A^{-1}\|$ wie folgt abschätzen:

$(E-A)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} A^i$, wenn die Reihe konvergiert.

Setzt man für A = E-A, erhält man

$$A^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} (E-A)^i$$

Abschätzung mit Hilfe der Norm gibt

$$\|A^{-1}\| \leq \|E\| + \sum_{i=1}^{\infty} \|E-A\|^i = \frac{\|E-A\|}{1-\|E-A\|} + \|E\|$$

(E-A) läßt sich leicht bilden, da die A-Matrix eine Hauptdiagonale besitzt, die nur aus 1-en besteht.

VI.1.3. Abschätzung der Spektralnorm von A^{-1}

Für die Spektralnorm läßt sich eine etwas einfachere Abschätzung für $\|A^{-1}\|$ angeben.

Aus $Ax = \lambda x$ und $x^* A^* = \bar{\lambda} x^*$

folgt $x^* A^* A x = |\lambda|^2 x^* x$

$$|\lambda|^2 = \frac{x^* A^* A x}{x^* x} \quad . . . \text{ Rayleigh-Quotient der Matrix } A^* A$$

$|\lambda|^2$ gehört zum Wertebereich der Matrix A^*A und wird daher durch μ^2_{max} und μ^2_{min}, dem größten und kleinsten Eigenwert von A^*A begrenzt:

$$\mu_{min} \leq |\lambda| \leq \mu_{max}$$

Der Kehrwert von μ_{min} ist aber dann Spektralnorm der Matrix A^{-1}.

$$H(A^{-1}) = \| A^{-1} \| = 1/\mu_{min}$$

Denn zu $A^{*-1}A^{-1}$ gehören die gleichen Eigenwerte $1/\mu^2_i$ wie zu $A^{-1}A^{*-1} = (A^*A)^{-1}$, woraus

$$H(A^{-1}) = \max (1/\mu_i) = \mu_{min} \text{ folgt.}$$

Es ist ja mit $A^{*-1}A^{-1}x = \frac{1}{\mu^2} x$, $\frac{1}{\mu^2}$ Eigenwert,

x Eigenvektor von $A^{*-1}A^{-1}$

$$A^{-1}A^{*-1}(A^{-1}x) = \frac{1}{\mu^2} (A^{-1}x)$$

und $A^{-1}x = y \neq 0$

$$A^{-1}A^{*-1}y = \frac{1}{\mu^2} y$$

$1/\mu^2$ wieder Eigenwert von $A^{-1}A^{*-1}$.

Es gilt also die hinreichende Stabilitätsbedingung:

Wird als Matrixnorm die Hilbertnorm verwendet, so ist das Gleichungssystem asymptotisch stabil, wenn

$$\frac{1}{\mu_{min}(A)} \cdot \mu_{max}(B) < 1$$

$\mu^2_{min}(A)$ ... kleinster Eigenwert von A^*A

$\mu^2_{max}(B)$ ... größter Eigenwert von B^*B

VI.2. Ein hinreichendes Kriterium für die Instabilität

In Umkehrung von VI.1. kann man auch die Eigenwerte von $(A^{-1}B)^{-1}$ abschätzen. Ist nämlich

$\| B^{-1}A \| \leq \| B^{-1} \| \; \| A \| < 1$, bedeutet dies, daß der

größte Eigenwert von $B^{-1}A$ kleiner als 1 ist, d.h. alle Eigenwerte der Matrix der reduzierten Form $A^{-1}B$ sind größer als 1.

$\| B^{-1} \|$ wird analog zu $\| A^{-1} \|$ in VI.1. abgeschätzt.

Das Gleichungssystem $Ay_t = By_{t-1}$ ist instabil, wenn

$$\| B^{-1} \| \; \| A \| < 1$$

VI.3. Ein einfaches Kriterium für Instabilität mit Hilfe der Determinanten

In Weiterführung von V.2.4. kann ein einfaches Kriterium für Instabilität angegeben werden.

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} \quad \Rightarrow$$

Das Gleichungssystem $Ay_t = By_{t-1}$ ist instabil, wenn

$$\frac{\det B}{\det A} > 1$$

Es muß unter dieser Bedingung mindestens ein Eigenwert der Matrix $A^{-1}B$ größer als 1 sein.

VII. STÖRUNGEN

Unter Störungen verstehen wir hier kleine Äbderungen der Koeffizienten der Strukturform bzw. der reduzierten Form. Es wird in linearer Näherung die Auswirkung solcher Änderungen auf Eigenwerte und Eigenvektoren gezeigt.

VII.1. Störungen der Koeffizienten der reduzierten Form

Ausgangspunkt sei das Gleichungssystem der reduzierten Form

$$y_t = A^{-1} B y_{t-1}$$

$\Pi := A^{-1}B$ ... Matrix der reduzierten Form.

Diese Matrix wird additiv gestört. Die gestörte Matrix habe die Form:

$$\tilde{\Pi} = \Pi + \Delta \Pi$$

Weiters gelte

$\tilde{x}_i = x_i + \Delta x_i$ für die Rechts-Eigenvektoren

$\tilde{y}_i = y_i + \Delta y_i$ für die Links-Eigenvektoren

$\tilde{\lambda}_i = \lambda_i + \Delta \lambda_i$ für die Eigenwerte.

Von der ungestörten reduzierten Form-Matrix Π seien zwei verschiedene Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenvektoren bekannt $(i = 1,2)$.

Vor der Störung gilt

$$\overline{\Pi} x_i = \lambda_i x_i$$

$$y_i' \overline{\Pi} = \lambda_i y_i'$$

Nach der Störung gilt

$$\widetilde{\overline{\Pi}} \widetilde{x}_i = \widetilde{\lambda}_i \widetilde{x}_i$$

$$\widetilde{y}_i' \widetilde{\overline{\Pi}} = \widetilde{\lambda}_i \widetilde{y}_i'$$

Durch Substitution erhält man

$$(\overline{\Pi} + \Delta \overline{\Pi})\ (x_i + \Delta x_i) = (\lambda_i + \Delta \lambda_i)\ (x_i + \Delta x_i)$$

$$(y_i' + \Delta y_i')\ (\overline{\Pi} + \Delta \overline{\Pi}) = (\lambda_i + \Delta \lambda_i)\ (y_i' + \Delta y_i')$$

$$\overline{\Pi} x_i + \overline{\Pi} \Delta x_i + \Delta \overline{\Pi} x_i + \Delta \overline{\Pi} \Delta x_i = \lambda_i x_i + \lambda_i \Delta x_i + \Delta \lambda_i x_i + \Delta \lambda_i \Delta x_i$$

$$\overline{\Pi}' y_i + \overline{\Pi}' \Delta y_i + \Delta \overline{\Pi}' y_i + \Delta \overline{\Pi}' \Delta y_i = \lambda_i y_i + \lambda_i \Delta y_i + \Delta \lambda_i y_i + \\ + \Delta \lambda_i \Delta y_i$$

Unbekannt sind hier Δx_i, Δy_i und $\Delta \lambda_i$, $i = 1, 2$, während $\overline{\Pi}$, $\Delta \overline{\Pi}$, x_i, y_i, λ_i bekannt sind.

Es fehlen also noch zwei Gleichungen:

$$\widetilde{y}_i' \widetilde{x}_j = 0 \qquad i,j = 1,2, \qquad i \neq j$$

(Rechts- und Linkseigenvektoren sind für voneinander verschiedene Eigenwerte orthogonal).

$$(y_i' + \Delta y_i')(x_j + \Delta x_j) = 0$$

$$y_i' x_j + y_i' \Delta x_j + \Delta y_i' x_j + \Delta y_i' \Delta x_j = 0$$

$y_i' x_j = 0$, da die Beziehung für alle Rechts- und Linkseigenvektoren gilt.

Die Glieder zweiter Ordnung werden vernachlässigt.

$$\cancel{\Pi x_i} + \tilde{\Pi} \underline{\Delta x_i} + \Delta \Pi x_i = \cancel{\lambda_i x_i} + \lambda_i \underline{\Delta x_i} + \Delta \lambda_i x_i$$

$$\cancel{\Pi' y_i} + \tilde{\Pi}' \underline{\Delta y_i} + \Delta \Pi' y_i = \cancel{\lambda_i y_i} + \lambda_i \underline{\Delta y_i} + \underline{\Delta \lambda_i} y_i$$

$$y_i' \Delta x_j + \Delta y_i' x_j = 0 \qquad i \neq j, \ i,j = 1,2$$

$$(\tilde{\Pi} - \lambda_i E) \Delta x_i = \Delta \lambda_i x_i - \Delta \Pi x_i$$

$Q_i := (\tilde{\Pi} - \lambda_i E)$, wenn regulär:

$$\Delta x_i = Q_i^{-1} x_i \Delta \lambda_i - Q_i^{-1} \Delta \Pi x_i$$

$$\Delta y_i = Q_i'^{-1} y_i \Delta \lambda_i - Q_i'^{-1} \Delta \Pi' y_i$$

Einsetzen in

$y_i' \Delta x_j + \Delta y_i' x_j = 0$ liefert

$$y_i' Q_j^{-1} x_j \Delta \lambda_j - y_i' Q_j^{-1} \Delta \Pi x_j + x_j' Q_i'^{-1} y_i \Delta \lambda_i - x_j' Q_i'^{-1} \Delta \Pi' y_i = 0$$

$$i,j = 1,2 \qquad i \neq j$$

Dies ist ein inhomogenes Gleichungssystem in den zwei Unbekannten $\Delta \lambda_1$, $\Delta \lambda_2$ und kann i.a. aufgelöst werden.

In der Praxis wäre diese Rechnung aufwendig durchzuführen. Der direkte Weg der Berechnung von Eigenvektoren würde sich empfehlen. Man kann aber wieder mit Hilfe der Matrixnorm Maßzahlen der "Schiefe" einer Matrix angeben, die nicht so scharfe Aussagen erlauben, in der Praxis aber oft ausreichen.[1)]

Es seien alle Eigenwerte der Matrix Π voneinander verschieden.

$$\Pi x_i = \lambda_i x_i \qquad i=1,2,\ldots,n$$

$$d\Pi x_i + \Pi dx_i = \lambda_i dx_i + d\lambda_i x_i$$

y_i seien wie oben die Eigenvektoren der transportierten Matrix Π' oder die Linkseigenvektoren von Π .

$$y_j' d\Pi x_i + y_j' \Pi dx_i = \lambda_i y_j' dx_i + d\lambda_i y_j' x_i$$

für i=j folgt

$$y_i' d\Pi x_i + y_i' \Pi dx_i = \lambda_i y_i' dx_i + d\lambda_i y_i' x_i$$

$$d\lambda_i = \frac{y_i' d\Pi x_i}{y_i' x_i} \quad \text{, denn}$$

$y_i' \Pi dx_i = y_i' \lambda_i dx_i$, da y_i' Linkseigenvektor von Π ist.

Für $i \neq j$ erhält man mit $y_i' x_j = 0$

---

1) siehe D.K. FADDEJEW, W.N. FADDEJEWA, Numerische Methoden der linearen Algebra, R. Oldenbourg, München 1964, pp.777ff.

$$y_j' \, d\Pi \, x_i + \underbrace{y_j' \, \Pi \, dx_i}_{\lambda_j y_j' dx_i} = \lambda_i y_j' dx_i$$

$$(\lambda_i - \lambda_j) y_j' dx_i = y_j' \, d\Pi \, x_i$$

Setzt man $dx_i^k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} x_i^j$, erhält man

$$\alpha_{ij} = \frac{y_j' \, d\Pi \, x_i}{(\lambda_i - \lambda_j) . y_j' x_j} \quad , \qquad i \neq j$$

α_{ii} ist unbestimmt wegen der Nichteindeutigkeit des Eigenvektors. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir $\alpha_{ii} = 0$.

Eine Abschätzung liefert den Koeffizienten c_i der Schiefe der Matrix Π, der zum Eigenwert λ_i gehört.

$$|d\lambda_i| = \frac{\| d\Pi \| \cdot \| y_i \| \; \| x_i \|}{| y_i' x_i |} = c_i \, \| d\Pi \|$$

$$c_i = \frac{\| y_i \| \; \| x_i \|}{| y_i' x_i |} = \frac{1}{|\cos \varphi_i|} \geqslant 1$$

φ_i ... Winkel zwischen Rechts- und Linkseigenvektor des Eigenwertes λ_i der Matrix Π.

VII.2. Störungen der Koeffizienten der Strukturform

Das Gleichungssystem lautet

$Ay_t = By_{t-1}$ und mit A regulär

$y_t = A^{-1}By_{t-1} = \Pi\, y_{t-1}$

$d(A^{-1}B) = d\Pi = dA^{-1}B + A^{-1}dB$

dA^{-1} ergibt sich aus

$AA^{-1} = E$

$d(AA^{-1}) = 0$

$dAA^{-1} + AdA^{-1} = 0$

$dA^{-1} = -A^{-1}dAA^{-1}$

$d\Pi = A^{-1}dB - A^{-1}dAA^{-1}B$

$d\Pi = A^{-1}(dB - dA\Pi)$

Sonderfälle:

a) wird B nicht geändert, $dB = 0$

$d\Pi = -A^{-1}dA\,\Pi$

b) wird A nicht geändert, $dA = 0$

$d\Pi = A^{-1}dB$

VII.3. Ein Stabilitätskriterium (in linearer Näherung)

Die Differntiale in VII.2. werden durch Differenzen ersetzt.

$$\Delta \overline{\Pi} = A^{-1}(\Delta B - \Delta A \overline{\Pi})$$

$$\tilde{\overline{\Pi}} = \overline{\Pi} + \Delta \overline{\Pi} = A^{-1} \Delta B + (E - A^{-1} \Delta A) \overline{\Pi}$$

Ist $\| \tilde{\overline{\Pi}} \| \leq \| A^{-1} \| \; \| \Delta B \| + \| \overline{\Pi} \| \, (\| E \| + \| A^{-1} \| \; \| \Delta A \|) < 1$

so ist auch das gestörte System asymptotisch stabil.

Anmerkung

Um ein Kriterium für Instabilität zu erhalten, ist A und B zu **vertauschen,** $\overline{\Pi}$ mit $\overline{\Pi}^{-1}$, Δ A mit Δ B.

VIII. Eine Anwendung: Modell "ÖSTERREICH I"

VIII.1. Vorbemerkungen

Am Institut für Höhere Studien und Wissenschaftliche Forschung in Wien wurden verschiedene ökonometrische Modelle erstellt, die die österreichische Wirtschaft und die wichtigsten makroökonomischen Variablen zu beschreiben helfen. Eines dieser Modelle, das Modell "ÖSTERREICH I",*) das sich durch besondere Übersichtlichkeit und theoretische Klarheit auszeichnet, soll als Beispiel für eine Stabilitätsuntersuchung hier angeführt werden. Dieses Modell besteht aus 30 linearen Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten, alle 30 von höchstens erster Ordnung.

Das Modell arbeitet auf der Basis von durchschnittlichen jährlichen Veränderungsraten $(x_t - x_{t-1})/x_{t-1}$. Dieser Ansatz läßt sich als Näherung für die logarithmische Ableitung der Originalzeitreihe interpretieren.

Die Originalzeitreihe sei eine Funktion der Zeit X(t), in jedem Zeitpunkt definiert und differenzierbar. Dann ist aber

$$\frac{d}{dt} \ln X(t) = \frac{\dot{X}(t)}{X(t)} \approx \frac{X(t) - X(t-)}{X(t-1)}$$

Durch die Annahme des Gleichheitszeichens können die Koeffizienten in den Gleichungen als Elastizitäten interpretiert werden, d.h. bei einer einprozentigen Veränderung einer Variablen resultiert ceteris paribus eine α-prozentige zeitliche Veränderung der zweiten Variablen. α steht für den Koeffizienten in der Differenzengleichung.

---

*) Fleissner, Fürst, Löschner, Schebeck, Schleicher, Schwödiauer, Winter, Modell "ÖSTERREICH I", Forschungsmemoranden No. 44 und 45, Institut für Höhere Studien, Wien.

Die exakte Beziehung zwischen den Wachstumsraten würde lauten:*)

$$g(p.x) = g(p) + g(x) + g(p) \,.\, g(x)$$

g(.) steht als Operator zur Bildung von Veränderungsraten:

$$g(x) := (X(t) - X(t-1)) \,/\, X(t-1)$$

Den Beweis führt man leicht:

$$\begin{aligned} g(p.x) &= (X(t).P(t) - X(t-1).P(t-1))/X(t-1).P(t-1) = \\ &= (X(t).P(t) + X(t).P(t-1) - X(t).P(t-1) + X(t-1).P(t) - \\ &\quad -X(t-1).P(t) + X(t-1).P(t-1) - X(t-1).P(t-1) - X(t-1). \\ &\quad .P(t-1)) \,/\, X(t-1).P(t-1) = \\ &= (X(t) - X(t-1)) \,/\, X(t-1) + (P(t) - P(t-1)) \,/\, P(t-1) + \\ &\quad +(X(t) - X(t-1)) \,/\, X(t-1).(P(t) - P(t-1)) \,/\, P(t-1) = \\ &= g(x) + g(p) + g(x).g(p) \end{aligned}$$

Im Modell werden folgende Annahmen gemacht:

a) Das Produkt zweier Wachstumsraten kann vernachlässigt werden. Man erhält dann die Näherungsformel:

$$g(p.x) \mathrel{\hat{=}} g(p) + g(x)$$

b) Die Wachstumsrate $(X(t) - X(t-1)) \,/\, X(t-1)$ ist annähernd gleich dem Verhältnis $(X(t) - X(t-1)) \,/\, X(t)$.

Aus dieser Annahme folgt, daß

$$g(1/X) \mathrel{\hat{=}} -g(X),$$

denn: $g(1/X) = (1/X(t) \leqq 1/X(t-1) \,/\, (1/X(t-1)) = (X(t-1) - X(t)) \,/\, X(t)$, unter der Annahme b) folgt die obige Behauptung.

---

*) siehe auch unveröffentlichtes Manuskript von KEI MORI, Keio Universität, Tokyo.

VIII.2. Die Gleichungen des Modells und die Liste der verwendeten Variablen

1. $BEP = .171\ UMSN + .725\ BEP_{-1} - .160\ LBPN_{-1} + .147\ NBPN_{-1} - .171\ UMSN_{-1} + .472$

2. $IAPR = -5.869\ ALO + .660\ NLDN + .135\ ITON_{-1} + .358 NLDN_{-1} + .437\ NLDN_{-2} - 1.318\ PIAX_{-1} - .185$

3. $IBPR = -10.271\ DIB + .608\ ITON_{-2} + .277\ NLPN_{-1} - .734\ PIBX_{-1} + 2.140$

4. $ILDN = -.399\ PYMX + .415\ UMSN - .822\ LV2N + .352\ PYMX_{-1} - .220\ UMSN_{-1} + .159$

5. $IMIN = -.735\ PIYX + 1.919\ UMSN + .681\ PIMX - 1.178\ UMSN_{-1} + 1.627$

6. $LBPN = -1.686\ ALO + .536\ LBPN_{-1} + .359\ LTAX + .235\ LTAX_{-1} + .013$

7. $NLPN = .707\ UMSN + 1.532\ YBFR + .283\ EXIN_{-1} + .115\ ITON - 1.136\ LYF_{-1} - 1.532\ YBFR_{-1} + .779$

8. $PIAX = .100\ IAPN + .153\ LBPN + .071\ IAPN_{-1} + .069\ SDDN - .390$

9. $PIBX = .124\ IBPN + 1.211\ LTAX - .844\ LTAX_{-1} + .387\ PIBX_{-1} + .096\ SDDN - .096\ SDDN_{-1} - .729$

10. $PIYX = -.500\ PYMX + 1.000\ PIMX - .500\ PYMX_{-1}$

11. $PYMX = .616\ LBPN + .171\ UMSN - .537\ LBPN_{-1} + .327\ PIMX_{-1} + .027\ SDDN + .360\ SIDN_{-1} + .553$

12. $DNLD = 1.000\ NLDN_{-1}$

13. ALO = -.332 BEP +.534 BBS +.016 FRQ +.170

14. BET = .797 BEP +.202 BEO

15. CTPN = .576 LDTN +.118 NLDN +.623 PV2X -1.706 DLA -.160 RLA +
+.400

16. IAPN = 1.000 IAPR + 1.000 PIAX

17. IBPN = 1.000 IBPR + 1.000 PIBX

18. LDTN = .782 LLPN +.224 LLON -1.000 SDBN

19. LLPN = 1.000 BEP + 1.000 LBPN

20. LYF = 1.000 LBPN -1.000 YBFR

21. NLDN = 1.368 NLPN -.368 SDUN

22.PUMX = .733 PYMX +.267 PIMX

23. PV2X = .278 LBPN +1.459 DLA +.126 FRQ +.175 $PIMX_{-1}$ +
+.218 $SIDN_{-1}$ +.089

24. UMSN = .463 CTPN +.090 IAPN +.069 IBPN +1.000 ILDN +.108 CTON +
+.196 EXIN +.044 ITON

25. UMSR = -1.000 PUMX +1.000 UMSN

26. YBFR = -1.000 BET +1.000 YFBR

27. YFBR = 1.117 YMBR -.117 SISR

28. YMBN = -.278 IMIN +1.278 UMSN

29. YMBR = -1.000 PYMX +1.000 YMBN

30. NBPN = 1.000 NLPN - 1.000 BEP

Soweit sich die Gleichungen auf ökonomische Definitionen beziehen, wurden sie mit der Methode der kleinsten Quadrate geschätzt. Um der Methode B gerecht zu werden, wurden die Gleichungen so geordnet, daß zunächst Gleichungen mit verzögerten endogenen Variablen angeschrieben wurden. (Gleichungen 1 bis 12). Die Gleichung 12 entsteht aus der Substitution einer um zwei Jahre verzögerten Variablen.

VARIABLENLISTE

ALO	Rate der Arbeitslosigkeit
BBS	Arbeitskräftepotential
BEO	Öffentlich Beschäftigte
BEP	Privat Beschäftigte
BET	Beschäftigte gesamt
CTON	Öffentlicher Konsum, nominell
CTPN	Privater Konsum, nominell
DIB	Dummy-Wohnbau
DLA	Dummy-Landwirtschaft
EXIN	Exporte i.w.S., nominell
FRQ	Frostrate
IAPN	Private Ausrüstungsinvestitionen, nominell
IAPR	Private Ausrüstungsinvestitionen, real
IBPN	Private Bauinvestitionen, nominell
IBPR	Private Bauinvestitionen, real
ILDN	Lagerveränderungen / Umsatz
IMIN	Importe i.w.S., nominell
ITON	Öffentliche Investitionen
LBPN	Privates Lohnniveau
LDTN	Disponibles Lohneinkommen
LLON	Löhne u. Gehälter der öffentlich Beschäftigten
LLPN	Löhne u. Gehälter der privat Beschäftigten
LLTN	Löhne u. Gehälter, gesamt
LV2N	Lagerveränderungen / Umsatz (t-1)

LYF	Lohnwachstum minus Produktivitätswachstum
NBPN	Gewinn pro Beschäftigten
NLDN	Disponibles Nichtlohneinkommen
NLPN	Privates Nichtlohneinkommen
PIAX	Deflator der privaten Ausrüstungsinvestitionen
PIBX	Deflator der privaten Bauinvestitionen
PIMX	Deflator der Importe i.w.S.
PIYX	Preisverhältnis Importpreise / Inlandspreise
PUMX	Deflator des Umsatzes
PV2X	Verbraucherpreisindex
PYMX	Deflator des Bruttonationalprodukts
RLA	Rendite festverzinslicher Wertpapiere
SDBN	LLTN-LDTN
SDDN	Direkter Steuerdruck
SDUN	Direkte Steuern minus Lohnsteuer
SIDN	Indirekter Steuerdruck
SISR	Indirekte Steuern minus Subventionen
UMSN	Umsatz, nominell
UMSR	Umsatz, real
YBFR	Produktivität
YFBR	Bruttonationalprodukt zu Faktorkosten, real
YMBN	Bruttonationalprodukt zu Marktpreisen, nominell
YMBR	Bruttonationalprodukt zu Marktpreisen, real

VIII.3. Das homogene Gleichungssystem in Strukturform

Im folgenden wird die Strukturform des Modells "ÖSTERREICH I" ohne exogene Variable und unter Weglassung der Konstanten angegeben.

Es wurde im wesentlichen die Zerlegung nach Methode B, III.2.2., verwendet, da sie in diesem Fall Methode A überlegen ist. Die Anzahl der Komponenten von $y_t^{\Delta\Delta}$ übersteigt die Anzahl der Komponenten von y_t^{**}.

Auf den nächsten Seiten findet sich die Zerlegung der beiden Matrizen in Listendarstellung. Die nicht angeführten Elemente haben den Wert Null. Um die Verbindung von Listenform und Variablennamen herzustellen, werden Beispiele angeführt.

a) Das Element der Matrix Y_{11} in Zeile 5, Spalte 10 mit dem Wert 0.735 ist Koeffizient der Variablen PIYX in der Gleichung 5 für IMIN. Die Matrix Y_{11} ist eine 12 x 12 Matrix.

b) Das Element der Matrix Y_{22} in Zeile 3, Spalte 9 mit dem Wert -.118 ist Koeffizient der Variablen NLDN in der Gleichung 15 für CTPN.

c) Das Element der Matrix X_{12} in Zeile 2, Spalte 9 mit dem Wert .358 ist Koeffizient der Variablen $NLDN_{-1}$ in der Gleichung 2 für IAPR.

Y 11

ZEILE 1	SPALTE 1	1.0000
ZEILE 2	SPALTE 2	1.0000
ZEILE 3	SPALTE 3	1.0000
ZEILE 4	SPALTE 4	1.0000
ZEILE 4	SPALTE 11	.3990
ZEILE 5	SPALTE 5	1.0000
ZEILE 5	SPALTE 10	.7350
ZEILE 6	SPALTE 6	1.0000
ZEILE 7	SPALTE 7	1.0000
ZEILE 8	SPALTE 6	-.1530
ZEILE 8	SPALTE 8	1.0000
ZEILE 9	SPALTE 9	1.0000
ZEILE 10	SPALTE 10	1.0000
ZEILE 10	SPALTE 11	.5000
ZEILE 11	SPALTE 6	-.6160
ZEILE 11	SPALTE 11	1.0000
ZEILE 12	SPALTE 12	1.0000

Y 12

ZEILE 2	SPALTE 1	5.8690
ZEILE 2	SPALTE 9	-.6600
ZEILE 1	SPALTE 12	-.1710
ZEILE 4	SPALTE 12	-.4150
ZEILE 5	SPALTE 12	-1.9190
ZEILE 6	SPALTE 1	1.6860
ZEILE 7	SPALTE 12	-.7070
ZEILE 7	SPALTE 14	-1.5320
ZEILE 8	SPALTE 4	-.1000
ZEILE 9	SPALTE 5	-.1240
ZEILE 11	SPALTE 12	-.1710

Y 21

ZEILE 1	SPALTE 1	.3320
ZEILE 2	SPALTE 1	-.7970
ZEILE 4	SPALTE 2	-1.0000
ZEILE 4	SPALTE 8	-1.0000
ZEILE 5	SPALTE 3	-1.0000
ZEILE 5	SPALTE 9	-1.0000
ZEILE 7	SPALTE 1	-1.0000
ZEILE 7	SPALTE 6	-1.0000
ZEILE 8	SPALTE 6	-1.0000
ZEILE 9	SPALTE 7	-1.3680
ZEILE 10	SPALTE 11	-.7330
ZEILE 11	SPALTE 6	-.2780
ZEILE 12	SPALTE 4	-1.0000
ZEILE 16	SPALTE 5	.2780
ZEILE 17	SPALTE 11	1.0000
ZEILE 18	SPALTE 1	1.0000
ZEILE 18	SPALTE 7	-1.0000

Y 22

ZEILE 1	SPALTE 1	1.0000
ZEILE 2	SPALTE 2	1.0000
ZEILE 3	SPALTE 3	1.0000
ZEILE 3	SPALTE 6	-.5760
ZEILE 3	SPALTE 9	-.1180
ZEILE 3	SPALTE 11	-.6230
ZEILE 4	SPALTE 4	1.0000
ZEILE 5	SPALTE 5	1.0000
ZEILE 6	SPALTE 6	1.0000
ZEILE 6	SPALTE 7	-.7820
ZEILE 7	SPALTE 7	1.0000
ZEILE 8	SPALTE 8	1.0000
ZEILE 8	SPALTE 14	1.0000
ZEILE 9	SPALTE 9	1.0000
ZEILE 10	SPALTE 10	1.0000
ZEILE 11	SPALTE 11	1.0000
ZEILE 12	SPALTE 3	-.4630
ZEILE 12	SPALTE 4	-.0900
ZEILE 12	SPALTE 5	-.0690
ZEILE 12	SPALTE 12	1.0000
ZEILE 13	SPALTE 10	1.0000
ZEILE 13	SPALTE 12	-1.0000
ZEILE 13	SPALTE 13	1.0000
ZEILE 14	SPALTE 2	1.0000
ZEILE 14	SPALTE 14	1.0000
ZEILE 14	SPALTE 15	-1.0000
ZEILE 15	SPALTE 15	1.0000
ZEILE 15	SPALTE 17	-1.1170
ZEILE 16	SPALTE 12	-1.2780
ZEILE 16	SPALTE 16	1.0000
ZEILE 17	SPALTE 16	-1.0000
ZEILE 17	SPALTE 17	1.0000
ZEILE 18	SPALTE 18	1.0000

X 11

ZEILE 1	SPALTE 1	.7250
ZEILE 1	SPALTE 6	-.1600
ZEILE 2	SPALTE 8	-1.3180
ZEILE 2	SPALTE 12	.4370
ZEILE 3	SPALTE 7	.2770
ZEILE 3	SPALTE 9	-.7340
ZEILE 4	SPALTE 11	.3520
ZEILE 6	SPALTE 6	.5360
ZEILE 9	SPALTE 9	.3870
ZEILE 10	SPALTE 11	-.5000
ZEILE 11	SPALTE 6	-.5370

X 12

ZEILE 1	SPALTE 12	-.1710
ZEILE 1	SPALTE 18	.1470
ZEILE 2	SPALTE 9	.3580
ZEILE 4	SPALTE 12	-.2200
ZEILE 5	SPALTE 12	-1.1780
ZEILE 7	SPALTE 8	-1.1360
ZEILE 7	SPALTE 14	-1.5320
ZEILE 8	SPALTE 4	.0710
ZEILE 12	SPALTE 9	1.0000

VIII.4. Die Umwandlung des Gleichungssystems nach Methode B

Geht man von der Zerlegung VIII.3. aus, so führt

$$Y_{11}y_t^{\Delta} + Y_{12}y_t^{\Delta\Delta} = X_{11}y_{t-1}^{\Delta} + X_{12}y_{t-1}^{\Delta\Delta}$$

$$Y_{21}y_t^{\Delta} + Y_{22}y_t^{\Delta\Delta} = 0$$

zu

$$y_t^{\Delta\Delta} = -Y_{22}^{-1}\,Y_{21}y_t^{\Delta}\,.$$

Substitution ergibt

$$(Y_{11} - Y_{12}Y_{22}^{-1}\,Y_{21})y_t^{\Delta} = (X_{11} - X_{12}Y_{22}^{-1}\,Y_{21})y_{t-1}^{\Delta}$$

oder

$$\widetilde{Y}y_t^{\Delta} = \widetilde{Y_-}y_{t-1}^{\Delta}$$

mit

$$\widetilde{Y} = Y_{11} - Y_{12}Y_{22}^{-1}\,Y_{21}$$

$$\widetilde{Y_-} = X_{11} - X_{12}Y_{22}^{-1}\,Y_{21}$$

Auf der folgenden Seite werden die Matrizen $\widetilde{Y}$ und $\widetilde{Y_-}$ dargestellt.

$$\tilde{Y} = Y_{11} - Y_{12} Y_{22}^{-1} Y_{21}$$

$\tilde{Y}$

.964E-00	-.153E-01	-.117E-01	-.171E-00	.000E-99	-.493E-01	-.127E-01	-.153E-01	-.117E-01	.000E-99	.000E-99	.000E-99
-.194E+01	.100E+01	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.000E-99	-.902E-00	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.000E-99
.000E-99	.000E-99	.100E+01	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.000E-99
-.865E-01	-.373E-01	-.286E-01	.585E-00	.000E-99	-.119E-00	-.310E-01	-.373E-01	-.286E-01	.000E-99	.399E-00	.000E-99
-.400E-00	-.172E-00	-.132E-00	-.191E+01	.100E+01	-.554E-00	-.143E-00	-.172E-00	-.132E-00	.735E-00	.000E-99	.000E-99
-.559E-00	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.100E+01	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.000E-99
.617E-00	-.260E-00	-.199E-00	-.289E+01	.475E-00	-.835E-00	.783E-00	-.260E-00	-.199E-00	.000E-99	.171E+01	.000E-99
.000E-99	-.100E-00	.000E-99	.000E-99	.000E-99	-.153E-00	.000E-99	.900E-00	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.000E-99
.000E-99	.000E-99	-.124E-00	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.876E-00	.000E-99	.000E-99	.000E-99
.000E-99	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.100E+01	.500E-00	.000E-99
-.356E-01	-.153E-01	-.117E-01	-.171E-00	.000E-99	-.665E-00	-.127E-01	-.153E-01	-.117E-01	.000E-99	.100E+01	.000E-99
.000E-99	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.100E+01

$$\tilde{Y}_- = X_{11} - X_{12} Y_{22}^{-1} Y_{21}$$

$\tilde{Y}_-$

.542E-00	-.153E-01	-.117E-01	-.171E-00	.000E-99	-.209E-00	.134E-00	-.153E-01	-.117E-01	.000E-99	.000E-99	.000E-99
.000E-99	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.489E-00	-.131E+01	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.437E-00
.000E-99	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.277E-00	.000E-99	-.734E-00	.000E-99	.000E-99	.000E-99
-.458E-01	-.198E-01	-.151E-01	-.220E-00	.000E-99	-.635E-01	-.164E-01	-.198E-01	-.151E-01	.000E-99	.352E-00	.000E-99
-.245E-00	-.106E-00	-.812E-01	-.117E+01	.000E-99	-.340E-00	-.880E-01	-.106E-00	-.812E-01	.000E-99	.000E-99	.000E-99
.000E-99	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.536E-00	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.000E-99
.197E-00	-.508E-01	-.390E-01	-.565E-00	.122E-00	-.129E+01	-.422E-01	-.508E-01	-.390E-01	.000E-99	.442E-00	.000E-99
.000E-99	.710E-01	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.710E-01	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.000E-99
.000E-99	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.387E-00	.000E-99	.000E-99	.000E-99
.000E-99	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.000E-99	-.500E-00	.000E-99
.000E-99	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.000E-99	-.537E-00	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.000E-99
.000E-99	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.136E+01	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.000E-99	.000E-99
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

VIII.5. Das Gleichungssystem in der reduzierten Form

Aus

$$\tilde{Y} y_t^{\Delta} = \tilde{Y}_{-} y_{t-1}^{\Delta}$$

ergibt sich

$$y_t^{\Delta} = \tilde{Y}^{-1} \; Y_{-} y_{t-1}^{\Delta}$$

$\tilde{Y}^{-1} \; Y_{-} = \tilde{Z}$, die Eingangsmatrix für das Hessenberg-Verfahren.

EINGANGSMATRIX

.578	-.022	-.019	-.286	.009	-.194	.168	-.085	-.032	0.000	.189	.020
.747	-.067	-.075	-1.093	.198	-.591	.831	-1.953	-.193	0.000	1.948	.625
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	.277	0.000	-.734	0.000	0.000	0.000
-.052	-.030	-.028	-.415	.018	.076	.029	-.150	-.053	0.000	.709	.039
.243	-.190	-.176	-2.557	.113	-.263	.328	-.928	-.329	0.000	2.585	.244
.323	-.012	-.011	-.160	.005	.427	.094	-.047	-.018	0.000	.105	.011
-.419	-.026	-.040	-.592	.198	-.235	.015	-.519	-.143	0.000	1.749	.163
.138	.069	-.010	-.148	.022	.006	.108	-.146	-.024	0.000	.234	.071
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	.039	0.000	.337	0.000	0.000	0.000
-.117	.007	.007	.107	-.006	.129	-.046	.049	.016	0.000	-.627	-.014
.235	-.014	-.014	-.214	.013	-.258	.092	-.099	-.032	0.000	.254	.028
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.368	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

VIII.6. Berechnung der Eigenwerte

Aus der Matrix der reduzierten Form können leicht die Eigenwerte berechnet werden. Als Rechenprogramm wurde ein modifiziertes HESSENBERG - Verfahren verwendet. (Siehe Anhang, Kap. IX).

Aus der Hessenbergmatrix

HESSENBERGMATRIX

.578	-.099	-.074	-.144	.080	.011	.016	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1.000	-.396	-.836	-.862	.567	.067	.152	.025	0.000	0.000	0.000	0.000
	1.000	-.357	1.122	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
		1.000	1.095	-.629	-.186	-.384	-.033	0.000	0.000	0.000	0.000
			1.000	.097	-.206	-.402	-.022	0.000	0.000	0.000	0.000
				1.000	-1.724	-2.150	.047	-.008	.002	-.003	0.000
					1.000	1.159	-.071	.004	-.001	.001	0.000
						1.000	.174	-.002	0.000	-.001	0.000
							1.000	.339	0.000	.001	.048
								1.000	.132	-.221	.208
									0.000	0.000	0.000
										0.000	0.000

errechnet man hiemit das charakteristische Polynom achter Ordnung.

CHARAKTERISTISCHES POLYNOM
NACH STEIGENDEN POTENZEN GEORDNET

```
 795473.01098977E-10
-351377.73284980E-08
 193251.00072471E-07
-386802.42213977E-07
-177631.53757164E-07
 122327.64466718E-06
 323203.09224275E-06
-109733.62900990E-05
 100000.00000000E-05
```

Zum Vergleich seien die Ergebnisse von KEI MORI, Keio Universität, Tokyo, die am "Second World Congress of the Econometric Society", Cambridge, 1970, vorgetragen wurden, angeführt.

```
CALCULAIED POLYNCMIAL =  C.79547301636446210-04   X**  0
                        -C.35137773326621830-02   X**  1
                         0.19325100085802710-01   X**  2
                        -C.38680242247215950-01   X**  3
                        -0.17763153689178010-01   X**  4
                         0.12232764456815180 00   X**  5
                         C.32320309238557860 00   X**  6
                        -0.10973362902043410 01   X**  7
                         C.10000000000000000D 01  X**  8
```

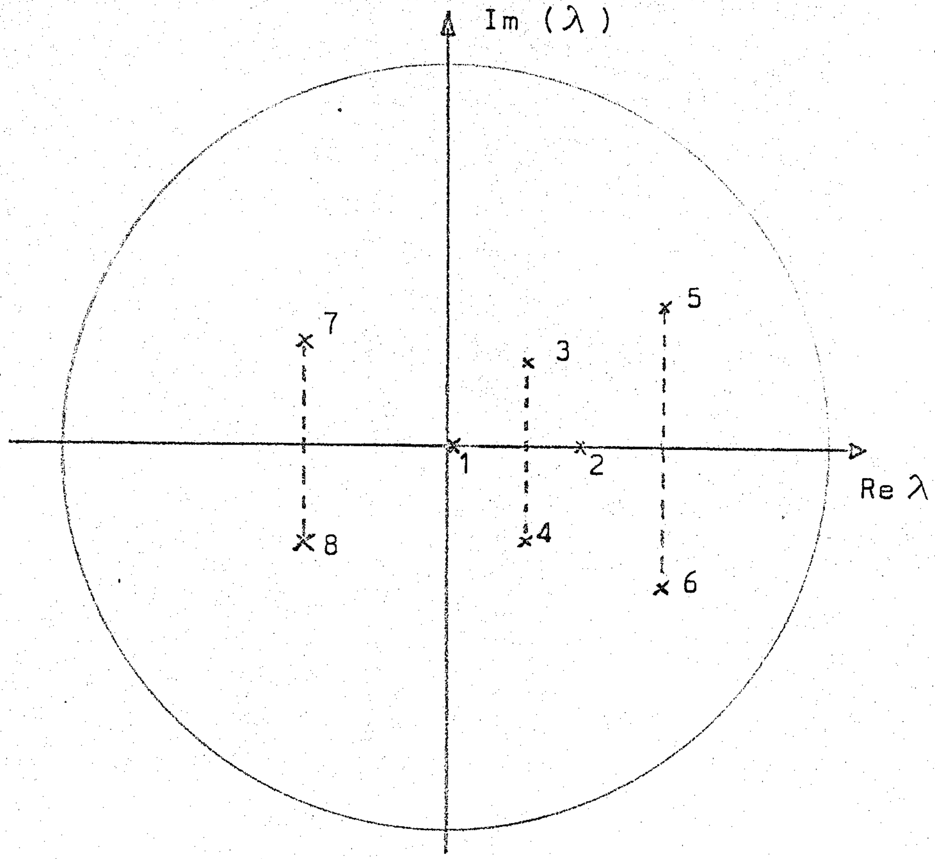
Die Nullstellensuche ergibt folgende Resultate:

EIGENWERTE Nr.	REALTEIL	IMAGINAERTEIL	Betrag	Schwingungsdauer (Einheit 1 Jahr)
1	26219151.532673E-09	00000000.000000E-99		
2	33291537.141450E-08	00000000.000000E-99		
3	20020149.556398E-08	23744142.989753E-08		
4	20020149.556398E-08	-23744142.989753E-08	0.311	7.22
5	55036179.404848E-08	37723145.119193E-08		
6	55036179.404848E-08	-37723145.119193E-08	0.667	10.46
7	-38146240.603654E-08	-25826339.203909E-08		
8	-38146240.603654E-08	25826339.203909E-08	0.461	2.47

Zum Vergleich die Werte von K.MORI:

	REAL PART	IMACINAPY PART
1	0.0262191517019340	0.C
2	0.3329153714228711	0.C
3	0.20C2C1495500C3659	C.2374414299154764
4	0.20C2014955003659	-0.2374414299154764
5	0.55C3617940943455	0.3772314512104576
6	0.5503617940943455	-C.3772314512104576
7	-0.3314624060549431	0.2582633921378826
8	-0.3814624C60549431	-0.2582633921378826

Die Darstellung der Nullstellen am Einheitskreis ergibt folgendes Bild:



Alle Nullstellen liegen also innerhalb des Einheitskreises. Damit ist für dieses Modell asymptotische Stabilität sichergestellt. Das Kriterium der Norm ist auf diese Matrix nicht sinnvoll anwendbar, da Spalten-, Zeilen- und Gesamtnorm Werte größer als eins ergeben.

Aus den so errechneten Eigenwerten ergeben sich neben den zwei exponentiell abklingenden Eigenwerten Nummer 1 und 2 drei Schwingungen.

Die Eigenwerte Nr. 3 und 4 führen zu einer stark gedämpften Schwingung mit der Periodenlänge von 7,2 Jahren.

Eigenwerte Nr. 5 und 6 ergeben die Schwingung geringster Dämpfung mit der Periodenlänge 10,5 Jahre.

Aus den Eigenwerten Nr. 7 und 8 läßt sich eine Periodenlänge von 2,5 Jahren errechnen.

VIII.7. Interpretation der Ergebnisse

Im Anschluß an die im Abschnitt II.2.1. dargestellte Lösung des homogenen Differenzengleichungssystems $y_t^h = S\Lambda^t c$ sollen an Hand der allgemeinen Lösung des inhomogenen Gleichungssystems Stabilitätsüberlegungen angestellt werden.

Das System lautet

$$y_t = \underline{Y}\, y_{t-1} + Uu_t$$

Als Partikulärlösung nach IV.3.4. ergibt sich

$$y_t^* = \sum_{k=0}^{t} \underline{Y}^k\, Uu_{t-k}$$

Daraus folgt mit II.2.1. die allgemeine Lösung

$$y_t = S\Lambda^t c + \sum_{k=0}^{t} Uu_{t-k}$$

Für t=0 ergibt sich aus

$$y_o = Sc + Uu_o$$
$$c = S^{-1}(y_o - Uu_o)$$

Substitution führt zu

$$y_t = S\Lambda^t S^{-1}(y_o - Uu_o) + \sum_{k=0}^{t} \underline{Y}^k\, Uu_{t-k} \quad (7.1)$$

Obige Gleichung kann als Ausgangspunkt für die Analyse von Störungen verwendet werden.

Grundsätzlich ergibt sich folgende Einteilung der Störungen:

a) Störungen der Anfangsbedingungen y_o,

b) Störungen der exogenen Variablen u_k. Hier wird weiter unterteilt in Störungen der exogenen Variablen zur Zeit t=0 und $t > 0$.

VIII.7.1. Störung von y_o um ε.

In diesem Fall ergeben sich als sinnvolle Bezugsgrößen für die Stabilitätsuntersuchung entweder die Partikulärlösung

$$y_t^* = \sum_{k=0}^{t} \underline{Y}^k \, Uu_{t-k}$$

oder die ungestörte allgemeine Lösung

$$y_t = \underline{Y}^t (y_o - Uu_o) + \sum_{k=0}^{t} Uu_{t-k}$$

Bei beiden Lösungen erhält man dieselbe Differenzengleichung der gestörten Bewegung

$$\tilde{y}_t = \underline{Y}\tilde{y}_{t-1} \; .$$

Diese Gleichung beschreibt den Zeitverlauf der Abweichung von der jeweiligen Partikulärlösung. Um die Anfangswerte und ihre Störungen explizit aufzuzeigen, kann folgende Darstellungsweise gewählt werden.

Bezüglich der Partikulärlösung y^* erhält man

$$\overset{\varepsilon}{y}_t - y_t^* = \underline{Y}^t (y_o + \varepsilon - Uu_o) \; ,$$

bezüglich der ungestörten allgemeinen Lösung y_t

$$\overset{\varepsilon}{y}_t - y_t = Y_-^t \varepsilon ,$$

wobei $\overset{\varepsilon}{y}_t$ den Zeitverlauf der gestörten allgemeinen Lösung dar-stellt.

VIII.7.2. Störung von u_o um δ.

Analog zu der Tatsache, daß eine Störung von y_o um ε auf die partikuläre Lösung y_t^* keinen Einfluß hat, wirkt sich eine Störung von u_o um δ auf die allgemeine Lösung nicht aus. Für ökonomische Fragestellungen ist aber eine Analyse der Auswirkungen von Störungen der exogenen Variablen relevant.

Untersucht man die gestörte partikuläre Lösung $\overset{\delta}{y}{}_t^*$ bezüglich der ungestörten Lösung y_t^*, so erhält man für die Abweichung von der ungestörten Partikulärlösung folgenden Zeitverlauf:

$$\overset{\delta}{y}{}_t^* - y_t^* = Y_-^t U \delta$$

Die Stabilitätseigenschaften der um δ gestörten partikulären Lösung bezüglich der ungestörten Lösung sind also identisch mit den Stabilitätseigenschaften der allgemeinen Lösung bei Störung der Anfangsbedingung y_o.

VIII.7.3. Störung von u_τ um μ , $\tau > 0$.

Wie unter VIII.7.2. wird wieder die gestörte partikuläre Lösung $\overset{\mu}{y}{}_t^*$ bezüglich der ungestörten partikulären Lösung y_t^* betrachtet. Für $t < \tau$ sind die ungestörte und die gestörte Lösung identisch.

Für $t < \tau$ ergibt sich folgende Abweichung:

$$\overset{\gamma}{y}{}^{*}_{t} - y^{*}_{t} = \sum_{k=0}^{t} \underline{Y}^{k}\, U u_{t-k} + \underline{Y}^{k-\tau}\, U \gamma - \sum_{k=0}^{t} \underline{Y}^{k}\, U u_{t-k}$$

$$= \underline{Y}^{t-\tau}\, U \gamma \,.$$

Die Stabilitätseigenschaften, die ja asymptotische Eigenschaften sind, bleiben wieder erhalten.

VIII.7.4. Folgerungen

Aus VIII.7.1. bis VIII.7.3. folgt, daß bei asymptotisch stabilen linearen Modellen, gleichgültig, ob die Anfangsbedingungen der endogenen Variablen oder die exogenen Variablen gestört werden, die gestörte Lösung immer zur Partikulär- (Gleichgewichts-) Lösung tendiert.

VIII.7.5. Beständig wirkende konstante Störungen der exogenen Variablen u_k.

Ist das Modell asymptotisch stabil und stört man die exogenen Variablen u_k beständig um den additiven Störungsvektor η , so ergibt sich im limes folgende Abweichung von der ungestörten allgemeinen, aber auch ungestörten partikulären Lösung

$$\lim_{t\to\infty} (\overset{\eta}{y}_{t} - y_{t}) = \lim_{t\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \underline{Y}^{k}\, U \eta = (I - \underline{Y})^{-1}\, U \eta \,.$$

Die gestörte Lösung tendiert auch nach sehr langer Zeit i.a.

nicht zur Gleichgewichtslösung. Einen weiteren, mathematisch äquivalenten Zugang stellt das Konzept der kumulativen Effekte und des Gleichgewichtsmultiplikators dar.*)

---

*) Siehe auch St. Schleicher, Wirtschaftspolitische Simulation mit dem ökonometrischen Modell Österreich I. Forschungsmemorandum Nr. 50, November 1970, Institut für Höhere Studien, Wien.

IX. ANHANG

Ein modifiziertes Hessenberg-Verfahren zur Berechnung der Eigenwerte beliebiger reeller Matrizen. (Fortran-Programm mit Anwendungsbeispiel).

ANHANG

Die numerische Berechnung der Eigenwerte

1. Das Hessenbergverfahren:

Mit dem Hessenbergverfahren ist es möglich, eine beliebige reelle, reguläre und quadratische Matrix A auf Fasdreiecksform zu transformieren. Die so entstandene umgeformte Matrix P, die überdies in der Subdiagonale nur Einsen enthält, besitzt die gleichen Eigenwerte wie die ursprüngliche Matrix. Aus der Fastdreiecksmatrix errechnet sich leicht das charakteristische Polynom und aus diesem die Eigenwerte.

Für Rechenautomaten bewährt sich folgende Transformationsmatrix T:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & t_{n2} & t_{n3} & \dots & \cdot \end{bmatrix}$$

Durch eine Ähnlichkeitstransformation

$$T^{-1} A T = B$$

entsteht die Matrix B, eine Fastdreiecksmatrix

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & & & b_{1n} \\ b_2 & b_{22} & & & b_{2n} \\ 0 & b_3 & \dots & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & \cdot b_n & b_{nn} \end{bmatrix}$$

Mit Hilfe einer Diagonalmatrix D

$$D = \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & b_2 & & & 0 \\ & & b_2 b_3 & & 0 \\ & & \cdot & \ddots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & b_2 b_3 \ldots b_n \end{bmatrix}$$

geht die Matrix B in die Matrix P über, deren Subdiagonale nur Einsen enthält.

$$D^{-1}\ B\ D = P$$

Diese Ähnlichkeitstransformation ist identisch mit einer <u>elementweisen</u> Multiplikation der Matrix B mit einer Matrix von folgender Gestalt (n = 4)

$$\begin{bmatrix} 1 & b_2 & b_2 b_3 & b_2 b_3 b_4 \\ 1/b_2 & 1 & b_3 & b_3 b_4 \\ 0 & 1/b_3 & 1 & b_4 \\ 0 & 0 & 1/b_4 & 1 \end{bmatrix}$$

Diese Transformation ist divisionsfrei, da die Elemente der Subdiagonale automatisch zu 1 werden.

Das charakteristische Polynom der Matrix P erhält man rekursiv, indem man die Hauptabschnittsdeterminanten von $(\lambda E - P)$ der Reihe nach nach ihrer letzten Spalte entwickelt. Man erhält auf diese Weise die folgenden Polynome $f_i(\lambda)$ mit $f_n(\lambda) = p(\lambda)$, dem charakteristischen Polynom.

$$f_1(\lambda) = -p_{11} + \lambda$$
$$f_2(\lambda) = -p_{12} + (-p_{22} + \lambda)\ f_1(\lambda)$$
$$f_3(\lambda) = -p_{13} - p_{23} f_1(\lambda) + (-p_{33} + \lambda)\ f_2(\lambda)$$

$$\vdots$$

$$f_i(\lambda) = -p_{1i} - p_{2i} f_1(\lambda) - p_{3i} f_2(\lambda) \ .\ .\ + (-p_{ii} + \lambda) f_{i-1}(\lambda)$$

$$\vdots$$

Durch skalare Produktbildung läßt sich die Bildung der Koeffizienten schematisch durchführen. Wir bezeichnen ein Polynom i-ten Grades mit

$$f_i(\lambda) = f_{io} + f_{i1}\,\lambda + \quad . \; . \; . \; + f_{i,i-1}\,\lambda^{i-1} + \lambda^{i}$$

Die Matrix $-P$ wird rechts vom Schema der Koeffizienten f_{ij} angeordnet:
(n = 4)

			0	1	$-p_{11}$	$-p_{12}$	$-p_{13}$	$-p_{14}$
			1	f_{10}	(-1)	$-p_{22}$	$-p_{23}$	$-p_{24}$
		1	f_{21}	f_{20}	0	(-1)	$-p_{33}$	$-p_{34}$
	1	f_{32}	f_{31}	f_{30}	0	0	(-1)	$-p_{44}$
1	f_{43}	f_{42}	f_{41}	f_{40}				

Die Koeffizienten f_{ik} von $f_i(\lambda)$ ergeben sich, indem die i-te Spalte von $-P$ der Reihe nach skalar mit den Spalten der Koeffizientenmatrix multipliziert wird, wobei zum Schluß noch das rechts neben dem vorletzten Element $f_{i-1,k}$ stehende $f_{i-1,k-1}$ addiert wird mit Ausnahme von k=0. Dadurch wird der Summand λ im Faktor $(-p_{ii} + \lambda)$ berücksichtigt. Die Subdiagonalelemente der $-P$-Matrix sind dabei auszuklammern.

Für n = 4 erhält man rekursiv

$$\begin{aligned}
f_{40} &= -p_{14}\cdot 1 - p_{24}\cdot f_{10} - p_{34}\cdot f_{20} - p_{44}\cdot f_{30} \\
f_{41} &= \qquad\qquad - p_{24}\cdot 1 \;\; - p_{34}\cdot f_{21} - p_{44}\cdot f_{31} + f_{30} \\
f_{42} &= \qquad\qquad\qquad\qquad\quad - p_{34}\cdot 1 \;\; - p_{44}\cdot f_{32} + f_{31} \\
f_{43} &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad - p_{44}\cdot 1 \;\;\; + f_{32}
\end{aligned}$$

als Koeffizienten des charakteristischen Polynoms. Der Koeffizient bei λ^4 ist natürlich 1.

Näherer Erläuterung bedarf noch die Matrix T. Sie läßt sich als Produkt von n-2 Matrizen T_i aufbauen.

$$T = T_2 \cdot T_3 \cdot T_4 \cdot T_5 \; . \; . \; . \; T_{n-1}$$

wobei sich das einzelne T_i von der Einheitsmatrix nur in der Spalte i unterscheidet. Die Inverse von T_i hat den gleichen Bau wie T_i, nur mit negativen Transformationselementen $-t_{ji}$.

Für n=5 und i=2 gilt

$$T_2 = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & t_{32} & 1 & & \\ & t_{42} & & 1 & \\ & t_{52} & & & 1 \end{bmatrix} \qquad T_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & -t_{32} & 1 & & \\ & -t_{42} & & 1 & \\ & -t_{52} & & & 1 \end{bmatrix}$$

Mit diesen Elementartransformationen kann das Verfahren schrittweise durchgeführt werden, wobei jeder Schritt aus zwei Teilen besteht. In den i-1 -ten Spalten von A seien die Elemente unterhalb der Subdiagonale schon zu Null gemacht worden. Der i-te Schritt beginnt mit der Elimination der Elemente a_{ij} der Spalte i für $j \geq i+2$.

$$a_{kj} := a_{kj} - t_{k,i+1} a_{i+1,j}$$

oder in Matrixschreibweise

$$A := T_{i+1}^{-1} A$$

Aus $a_{k,i} = 0$ folgt $t_{k,i+1} = \dfrac{a_{ki}}{a_{i+1,i}}$

$k=i+2, i+3, \; . \; . \; ., n; \; i=1,2,...,n-2; \; j=i, i+1,...n.$

In der zweiten Hälfte des i-ten Schrittes vervollständigt man die Ähnlichkeitstransformation

$$A: = A\ T_{i+1},$$

wobei sich nur die Spalte i+1 ändert in

$$a_{k,i+1}: = a_{k,i+1} + a_{k,i+2} \cdot t_{i+2,i+1} + \dots a_{k,n} \cdot t_{n,i+1}$$

für $k=1,2,\dots,n$; $i=1,2,\dots,n-2$.

Zur Dämpfung von Rundungsfehlern wird vor Ausführung jeder Teilspaltenelimination das betragsgrößte der Elemente $a_{k,i}$ für $k=i+1,\dots,n$ durch Zeilen- und Spaltentausch zum Subdiagonalelement $a_{i+1,i}$. Damit werden alle $|t_{k,i+1}| \leq 1$.

2. Das modifizierte Hessenbergverfahren:

Das oben beschriebene Verfahren ergibt unkorrekte Werte, wenn Spalten der Matrix A ganz oder unter der Hauptdiagonale aus Nullen bestehen. In ökonometrischen Modellen ist dies häufig der Fall. Es wurde daher eine Modifikation erarbeitet, die auch in solchen degenerierten Fällen das charakteristische Polynom richtig wiedergibt.

Das modifizierte Verfahren unterscheidet sich in zwei Punkten vom Hessenbergverfahren:

a) In der Bildung der Matrix D
b) In der Berechnung des charakteristischen Polynoms.

Da die Matrix B in der Subdiagonale Nullen besitzen kann, in der Matrix D^{-1} jedoch durch diese Nullen zu dividieren wäre, muß die Bildung von D verändert werden, und zwar so, daß für den Aufbau von D einfach die Elemente b_i, die Null waren, den Wert 1 annehmen. Dadurch erhält man nach vollständiger Ähnlichkeitstransformation eine Matrix P, die in der Subdiagonale Nullen oder Einsen enthält.

Punkt b) ist etwas aufwendiger zu beschreiben.

Die Problemstellung lautet: Man berechne das charakteristische Polynom aus einer Fastdreiecksmatrix, deren Subdiagonalelemente d_i Null oder Eins sein können. Es wurde versucht, ohne große Änderungen des Hessenbergverfahrens zu einer Lösung zu kommen.

Zu berechnen ist also:

$$\begin{bmatrix} \lambda-p_{11} & -p_{12} & -p_{13} & -p_{14} & -p_{15} & \cdots \\ d_2 & \lambda-p_{22} & -p_{23} & -p_{24} & -p_{25} & \cdots \\ 0 & d_3 & \lambda-p_{33} & -p_{34} & -p_{35} & \cdots \\ 0 & 0 & d_4 & \lambda-p_{44} & -p_{45} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & d_5 & \lambda-p_{55} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & d_6 & \cdots \\ 0 & 0 & & & & \end{bmatrix}$$

Für n=4 entwickeln wir nach der letzten Zeile, wobei D_4 die Hauptabschnittsdeterminante mit den ersten vier Reihen, E_3 eine 3 x 3 Determinante, bei der die dritte Spalte durch die letzte Spalte von D_4 ersetzt wurde, bedeutet.

$$D_4 = (\lambda - p_{44})\, D_3 + d_4 E_3$$
$$E_3 = -p_{34} \cdot D_2 + d_3 E_2$$
$$E_2 = -p_{24} \cdot D_1 + p_{14} \cdot d_2$$

Durch Substitution erhält man

$$D_4 = (\lambda - p_{44})D_3 + d_4 \cdot (-p_{34}D_2 + d_3(-p_{24}D_1 + d_2(-p_{14})))$$

Schreibt man die Hauptabschnittsdeterminanten als Polynome von λ, $D_i = f_i(\lambda)$, erhält man ein allgemeineres Rekursionsschema, ähnlich dem bei Hessenberg.

$$f_i(\lambda) = (\lambda - p_{ii})f_{i-1}(\lambda) + d_i(-p_{i-1,i}f_{i-2}(\lambda) + d_{i-1}(\ldots d_2(-p_{1i})))$$

Man bemerkt sofort, daß, da d_i nur Null oder Eins werden kann, ab einem bestimmten d_j, das Null ist, weitere Summanden keine Rolle mehr spielen.

Für die Automatenrechnung wurde eine neue Boole'sche Variable gebildet

$$BOL(J,I) = \prod_{k=J+1}^{I} d_k \qquad \text{für } J < I$$

$$BOL(J,I) = 1 \qquad \text{für } J \geq I$$

Diese Variable wurde multiplikativ jedem $-p_{j,i}$ bei der Berechnung der $f_i(\lambda)$ hinzugefügt. Dadurch war es möglich, den Hessenbergalgorithmus nahezu unverändert zu übernehmen.

COMPUTER-PROGRAMM

Fortran II

```
*DELETEIWEV

*LDISKEIWEV
*LIST PRINTER
*FANDK1405
**
C
C     MODIFIZIERTES HESSENBERGVERFAHREN  (HAUPTPROGRAMM)
C
      DIMENSION IVEK(20)
      DIMENSION LW(20) ,MW(20)
      DIMENSION X(20,20)
      DIMENSION A(20,20),B(20),F(21,21),POL(21),ROOTR(20),ROOTI(20),
     1COF(21)
    1 FORMAT (I2)
    2 FORMAT (I1,5X,I2,I2,8X,E20.12)
    3 FORMAT (1X,12F6.3/)
    7 FORMAT (1H1,14HEINGANGSMATRIX//)
   12 READ 1,N
      DO 10 I=1,N
      B(I)=0.
      ROOTR(I)=0.
      ROOTI(I)=0.
      DO 10 J=1,N
      X(I,J)=0.
   10 A(I,J)=0.
      DO 60 I=1,N
   60 IVEK(I)=I
C
C     DATEN EINLESEN IN DIE EINGANGSMATRIX A
C
   77 READ 2,LG,I,J,ZAHL
      IF (LG-1) 8,9,8
    8 A(I,J)=ZAHL
      GO TO 77
    9 CONTINUE
      PRINT 7
C
C     MATRIX A AUSDRUCKEN
C
      DO 13 I=1,N
   13 PRINT 3,(A(I,J),J=1,N)
C
      CALL HESSBG (A,B,F,X,COF,POL,ROOTR,ROOTI,IVEK,N)
      CALL EXIT
      END
```

```
*DELETHESSBG

*LDISKHESSBG
*FANDK1405
*LIST PRINTER
C
C       MODIFIZIERTES HESSENBERGVERFAHREN ( UNTERPROGRAMM )
C
        SUBROUTINE HESSBG (A,B,F,X,COF,POL,ROOTR,ROOTI,IVEK,N)
C
        DIMENSION A(20,20),B(20) ,  F(21,21),X(20,20)
        DIMENSION COF(1),POL(1),ROOTR(1),ROOTI(1),IVEK(20)
      3 FORMAT (1X,12F6.3/)
      4 FORMAT(1X///1X,10HEIGENWERTE//11X,8HREALTEIL,9X,13HIMAGINAERTEIL/)
      5 FORMAT (1X,2E20.6)
      6 FORMAT (//1X,16HHESSENBERGMATRIX//)
      7 FORMAT      (20(E20.8/))
     48 FORMAT(//1X,26HCHARAKTERISTISCHES POLYNOM,/,1X,33HNACH STEIGENDEN
       1POTENZEN GEORDNET//)
     61 FORMAT (1X,I3)
        N2=N-2
        DO 43 K=1,N2
        Z=0.
        K1=K+1
        K2=K+2
C
C       AUFSUCHEN DES GROESSTEN ELEMENTS Z DER SPALTE K AB DEM K+1-TEN ELEMENT.
C       IST Z KLEINER ALS EINE VORGEGEBENE SCHRANKE,WIRD SPALTE K AB DEM K+1-TEN
C       ELEMENT NULL GESETZT, ANSONSTEN ZEILENTAUSCH,DAMIT Z IN DER K+1-TEN ZEILE
C       STEHT
C
        DO 39 J=K1,N
        IF (Z-ABSF(A(J,K)))15,41,39
     15 Z=ABSF(A(J,K))
     41 JS=J
     39 CONTINUE
     16 IF (Z-1.E-05)    17,18,18
     17 DO 19 J=K1,N
     19 A(J,K)=0.
```

```
      GO TO 43
   18 DO 20  J=K,N
      Y=A(K1,J)
      A(K1,J)=A(JS,J)
   20 A(JS,J)=Y
      IDAX=IVEK(K1)
      IVEK(K1)=IVEK(JS)
      IVEK(JS)=IDAX
C
C     SPALTENTAUSCH
C
      DO 21  J=1,N
      Y=A(J,K1)
      A(J,K1)=A(J,JS)
   21 A(J,JS)=Y
      DO 42  I=K2,N
      B(I)=A(I,K)/A(K1,K)
      A(I,K)=B(I)
C
C     DIE K-TE SPALTE WIRD AB DEM K+1-TEN ELEMENT GLEICH NULL.
C
      DO 22  J=K1,N
   22 A(I,J)=A(I,J)-B(I)*A(K1,J)
   42 CONTINUE
C
C     VERVOLLSTAENDIGUNG ZUR AEHNLICHKEITSTRANSFORMATION
C
      DO 46  I=1,N
      DO 14  J=K2,N
   14 A(I,K1)=A(I,K1)+A(I,J)*B(J)
   46 CONTINUE
   43 CONTINUE
C
C     MATRIX B AUSDRUCKEN
C
      PRINT 3,((A(I,J),J=1,N),I=1,N)
  100 DO 23  K=2,N
      K1=K-1
C
C     IST DAS SUBDIAGONALELEMENT KLEINER ALS EINE VORGEGEBENE SCHRANKE,WIRD ES
C     NULL GESETZT
C
      IF(ABSF(A(K,K-1))-1.E-06) 25,26,26
   25 A(K,K-1)=0.
```

```
C
C     AUFBAU DES VEKTORS B
C
      B(K)=0.
      X(1,K)=1.
      GO TO 27
   26 B(K)=1.
      X(1,K)=A(K,K-1)
C
C     NULL-EINS-NORMIERUNG DER SUBDIAGONALE.ES ENTSTEHT DIE MATRIX P DURCH DIE
C     AEHNLICHKEITSTRANSFORMATION P = D**-1 * B * D
C
   27 DO 44 J=K,N
      DO 24 I=1,K1
   24 A(I,J)=A(I,J)*X(1,K)
   44 CONTINUE
      IF (ABSF(A(K,K1))-1.E-06) 23,23,63
   63 A(K,K1)=1.
   23 CONTINUE
      PRINT 6
C
C     MODIFIZIERTE HESSENBERGMATRIX P AUSDRUCKEN
C
      DO 1 I=1,N
    1 PRINT 3, (A(I,J),J=1,N)
      N1=N+1
      DO 47 I=1,N1
      POL(I)=0.
      COF(I)=0.
      DO 47 J=1,N1
   47 F(I,J)=0.
      DO 31 I=1,N1
   31 F(I,I)=1.
C
C     REKURSIVE BERECHNUNG DES CHARAKTERISTISCHEN POLYNOMS MIT HILFE DES
C     BOOLESCHEN AUSDRUCKS BOL(B,J,I)
C
      DO 45 I=2,N1
      I1=I-1
      DO 32 K=I,I1
      K1=K-1
      DO 34 J=1,I1
   34 F(I,K)=F(I,K)-F(J,K)*A(J,I1)*BOL(B,J,I1)
```

```
      IF (K-1) 32,32,35
   35 F(I,K)=F(I,K)+F(I1,K1)
   32 CONTINUE
   45 CONTINUE
      PRINT 61,(IVEK(I),I=1,N)
      DO 33 I=1,N1
   33 POL(I)=F(N1,I)
      PRINT 48
      PRINT 7,(POL(I),I=1,N1)
  203 IF(ABSF(POL(1))-1.E-08) 200,200,201
  200 DO 202 I5=1,N
  202 POL(I5)=POL(I5+1)
      N=N-1
      GO TO 203
  201 CONTINUE
      N1=N+1
C
C     CHARAKTERISTISCHES POLYNOM AUSDRUCKEN
C
      PRINT 7,(POL(I),I=1,N1)
C
C     MIT DEM UNTERPROGRAMM POLRT WERDEN DIE NULLSTELLEN EINES POLYNOMS VOM GRAD
C     N BERECHNET
C
      CALL POLRT (POL,COF,N,ROOTR,ROOTI,IER)
      PRINT 4
C
C     EIGENWERTE AUSDRUCKEN
C
      DO 40 I=1,N
   40 PRINT5,ROOTR(I),ROOTI(I)
      RETURN
      END
```

```
*DELETBOL

*LDISK
*FANDK1405
*LIST PRINTER
C
C     DIE BOOLESCHE VARIABLE BOL(B,J,I) BESITZT FUER J GROESSER ODER GLEICH I
C     DEN WERT 1.,
C     FUER J KLEINER I DEN WERT BOL = B(J+1)*B(J+2)*....*B(I)
C
      FUNCTION BOL(B,J,I1)
C
      DIMENSION B(1)
      J1=J+1
      C=1.
      IF(J1-I1) 2,2,3
    2 DO 1 I=J1,I1
    1 C=C*B(I)
    3 BOL=C
      RETURN
      END
 12
        1  1              .57819091856E+00
        2  1              .74770763018E+00
        4  1             -.52721141644E-01
        5  1              .24312048058E+00
        6  1              .32364352306E+00
        7  1             -.41965931272E+00
        8  1              .13809802447E+00
       10  1             -.11760869076E+00
       11  1              .23521738150E+00
        1  2             -.22430290124E-01
        2  2             -.67857574736E-01
        4  2             -.30991092095E-01
        5  2             -.19045729831E+00
        6  2             -.12555399759E-01
        7  2             -.26749927989E-01
        8  2              .69214740403E-01
       10  2              .73872081907E-02
       11  2             -.14774416375E-01
        1  3             -.19798207115E-01
        2  3             -.75480558911E-01
        4  3             -.28677797362E-01
        5  3             -.17649935112E+00
        6  3             -.11082086029E-01
        7  3             -.40873199053E-01
        8  3             -.10270683393E-01
       10  3              .74128860578E-02
       11  3             -.14825772110E-01
        1  4             -.28693053791E+00
        2  4             -.10939211437E+01
        4  4             -.41562025165E+00
```

5	4	-.25579616103E+01
6	4	-.16060994245E+00
7	4	-.59236520376E+00
8	4	-.14885048396E+00
10	4	.10743313127E+00
11	4	-.21486626246E+00
1	5	.96991381871E-02
2	5	.19847278287E+00
4	5	.18334499159E-01
5	5	.11363935984E+00
6	5	.54291119998E-02
7	5	.19889014544E+00
8	5	.22975480470E-01
10	5	-.65217355970E-02
11	5	.13043471181E-01
1	6	-.19407717495E+00
2	6	-.59103934080E+00
4	6	.76722130290E-01
5	6	-.26344507380E+00
6	6	.42736491317E+00
7	6	-.23577708310E+00
8	6	.69809973700E-02
10	6	.12922302360E+00
11	6	-.25844604718E+00
1	7	.16832666731E+00
2	7	.83167391675E+00
3	7	.27700000000E+00
4	7	.29565077842E-01
5	7	.32857857841E+00
6	7	.94221188684E-01
7	7	.15443978015E-01
8	7	.10842581504E+00
9	7	.39210045660E-01
10	7	-.46073670968E-01
11	7	.92147341898E-01
12	7	.13680000000E+01
1	8	-.85424346723E-01

2	8	-.19538102866E+01
4	8	-.15007017471E+00
5	8	-.92852331291E+00
6	8	-.47816448939E-01
7	8	-.51984789100E+00
8	8	-.14632993928E+00
10	8	.49744639696E-01
11	8	-.99489279320E-01
1	9	-.32861679326E-01
2	9	-.19326047129E+00
3	9	-.73400000000E+00
4	9	-.53371972815E-01
5	9	-.32955672487E+00
6	9	-.18394390727E-01
7	9	-.14313001311E+00
8	9	-.24600432123E-01
9	9	.33788127854E+00
10	9	.16196812014E-01
11	9	-.32393624015E-01
1	11	.18933836878E+00
2	11	.19485925048E+01
4	11	.70991057871E+00
5	11	.25858714261E+01
6	11	.10598253062E+00
7	11	.17495848602E+01
8	11	.23452730852E+00
10	11	-.62731180392E+00
11	11	.25462360764E+00
1	12	.20886496763E-01
2	12	.62531209042E+00
4	12	.39482214799E-01
5	12	.24471536296E+00
6	12	.11691258340E-01
7	12	.16349302718E+00
8	12	.71466635071E-01
10	12	-.14044155970E-01
11	12	.28088311916E-01