

STABILITÄTSÜBERLEGUNGEN DES KALDOR-
MODELLS UNTER VERWENDUNG EINER
ANALOGRECHENANLAGE

Peter FLEISSNER und Karlheinz HIETLER

Forschungsbericht Nr. 51

Februar 1971

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
I. EINFÜHRUNG	1
II. ALLGEMEINE DARSTELLUNG DES KALDOR-MODELLS	2
II.1. Die Sparfunktion	2
II.2. Die Investitionsfunktion	3
II.3. Die Technische Fortschrittsfunktion	3
III. DARSTELLUNG DER EINZELNEN FÄLLE	5
III.1. Das Kaldor-Modell bei klassischer Sparfunktion und sofortiger Anpassung	5
III.2. Das Kaldor-Modell bei klassischer Sparfunktion und endlicher Anpassungsgeschwindigkeit	8
III.3. Das Kaldor-Modell bei Kaldor-Sparfunktion und sofortiger Anpassung	9
III.4. Das Kaldor-Modell bei Kaldor-Sparfunktion und endlicher Anpassungsgeschwindigkeit	11
III.5. Resultierende Differentialgleichungen	13
IV. DARSTELLUNG DER ANALOGSCHALTPLÄNE UND RECHENERGEBNISSE	15
IV.1. Schaltsymbole	15
IV.2. Darstellung der in den Analogschaltplänen vorkommenden Parameter	16
IV.3. Darstellung der Differentialgleichungen III.5.1. bis III.5.4.	17
IV.4. Analogschaltpläne	19
IV.5. Darstellung der Kurven	23
V. INTERPRETATION DER ERGEBNISSE	26
V.1. Fall 1	26
V.2. Fall 2	27
V.3. Fall 3	28
V.4. Fall 4	28
V.5. Zusammenfassung	29
VI. ANHANG	30
VI.1. Verwendete Symbole	30
VI.2. Literaturverzeichnis	31

I. EINFÜHRUNG

Ziel dieser Arbeit ist die Untersuchung der Stabilität des Kaldor-Modells [1] in der Version von R.G.D. ALLEN [2] für den Nicht-Vintage-Fall.

Das Modell wurde durch Einführung eines Anpassungsprozesses, der die Beziehung zwischen tatsächlichem und gewünschtem Kapitalstock ausdrückt (Abbau der Überschusskapazität), modifiziert und unter der Annahme einer klassischen bzw. Kaldor-Sparfunktion analysiert.

Die resultierenden Differentialgleichungen wurden mit Hilfe einer Analogrechenanlage simuliert und graphisch dargestellt.

Die Grundlagen der Programmierung von Analogrechenanlagen werden in dieser Arbeit vorausgesetzt.*)

Vorläufige Ergebnisse in bezug auf Stabilitätsüberlegungen finden sich in [4].

Das Kaldor-Modell - eine zu starke Vereinfachung der ökonomischen Realität - diente in dieser Arbeit als Demonstrationsbeispiel für die Berechnung ökonomischer Modelle mit Analogrechenanlagen. Die Resultate dieser Untersuchung haben daher für die wirtschaftspolitische Praxis keine unmittelbare Bedeutung.

*) Wir danken den Mitgliedern des I. Instituts für Mathematik der Technischen Hochschule Wien für die Benutzung der Analogrechenanlage.

II. ALLGEMEINE DARSTELLUNG DES KALDOR-MODELLS

Das Kaldor-Modell im Nicht-Vintage-Fall stellt eine Weiterentwicklung des Wachstumsmodells von HARROD dar. Die Wachstumsraten der Kapitalintensität und des Pro-Kopf-Outputs bilden die abhängigen Variablen des Modells.

Das Modell wird im wesentlichen von drei Funktionen bestimmt:

- 1) Sparfunktion
- 2) Investitionsfunktion
- 3) Technische Fortschrittsfunktion

Im HARROD-Modell werden als Parameter die Sparneigung s , der Kapitalkoeffizient v und das natürliche Wachstum n des Arbeitskräftepotentials als konstant angenommen. Variiert man v , erhält man bei diskreter Veränderung lineare Programmierungsmodelle, bei kontinuierlicher Veränderung neoklassische Wachstumsmodelle.

Beim Keynes'schen (Kaldor-) Modell verzichtet man auf die Konstanz von s .

II.1. Die Sparfunktion

Unternehmer und Arbeitnehmer sparen mit verschiedenen Sparquoten s_p bzw. s_w , wobei

$$0 \leq s_w < s_p \leq 1 \quad \text{gelten soll.}$$

Eine Erklärung der Symbole findet man in VI.1.

a) Klassische Sparfunktion

$$S = s_p P, \quad s_w = 0$$

b) KALDOR'sche Sparfunktion

$$S = s_p P + s_w (Y - P)$$

II.2. Die Investitionsfunktion

Diese Funktion in der Gestalt

$$\frac{K^*}{Y} = v + \beta \cdot \frac{P}{K} \quad v, \beta > 0$$

enthält als erklärende Variable die Profitrate, wobei diese Größe als Substitut für erwartete Profite steht. Die Unternehmer bestimmen nach dieser Gleichung den erwünschten Kapitalkoeffizienten. Die Parameter v und β quantifizieren das Unternehmerverhalten.

II.3. Die Technische Fortschrittsfunktion

Als wesentlichste Abweichung von bisherigen Wachstumsmodellen kommt im Kaldor-Modell die Produktionsfunktion nicht mehr explizit vor. An ihre Stelle tritt die Technische Fortschrittsfunktion, die eine Relation zwischen dem Wachstum der Kapitalintensität und dem Wachstum der Produktivität (Pro-Kopf-Output) herstellt. Dadurch vermeidet Kaldor die

Ursachen des technischen Fortschritts auf zwei getrennte Faktoren zurückführen zu müssen, und zwar auf

- a) Veränderungen im Kapitalangebot relativ zur Arbeit, und
- b) technische Erfindungen und Innovation (Einführung neuer Kenntnisse).

Formal gilt:

$$\frac{\dot{y}}{y} = f\left(\frac{k}{k}\right) \quad \text{mit } y = \frac{Y}{L}, \quad k = \frac{K}{L}$$

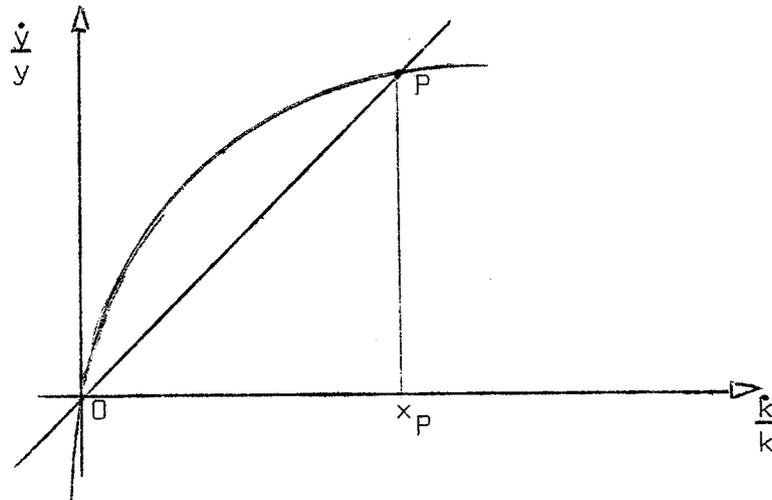
$$f'(x) > 0$$

$$f''(x) < 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$$

$$f(0) \geq 0$$

Diese Bedingungen entsprechen den Bedingungen für Produktionsfunktionen in Pro-Kopf-Größen.



III. DARSTELLUNG DER EINZELNEN FÄLLE

Auf Grund von verschiedenen Annahmen über Sparfunktion und Anpassungsmechanismus ergeben sich folgende vier Fälle:

		Sparfunktion	
		klassisch	Kaldor
Anpassungs- prozess	$T = 0$	1	3
	$T > 0$	2	4

$\frac{1}{T}$ bedeutet hier die Anpassungsgeschwindigkeit von erwünschtem an den tatsächlichen Kapitalstock.

III.1. Das Kaldor-Modell bei klassischer Sparfunktion und sofortiger Anpassung

III.1.1. Voraussetzungen

a) Klassische Sparfunktion

$$S = s_p P$$

b) Erwünschter Kapitalstock = tatsächlicher Kapitalstock

$$K^* = K$$

c) Investitionsfunktion

$$K^* = vY + \beta \frac{P}{K} \cdot Y$$

d) Definitionsgleichung für Nettoinvestitionen

$$I = \dot{K} = \frac{d}{dt} K$$

e) Gleichgewichtsbedingung

$$I = S$$

f) Technische Fortschrittsfunktion

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = f\left(\frac{K}{L}\right), \quad y = \frac{Y}{L}, \quad k = \frac{K}{L}$$

g) Gleichgewicht am Arbeitsmarkt

$$L = L_0 e^{nt}$$

III.1.2. Berechnung

In diesem Fall werden die einzelnen Rechenschritte explizit angeführt, in den weiteren Fällen wird darauf verzichtet.

Aus b) und c) folgt

$$K = vY + \beta \frac{P}{K} \cdot Y$$

Division durch L führt zu

$$\frac{K}{L} = v \frac{Y}{L} + \beta \frac{P/L \cdot Y}{K/L \cdot L}$$

Nach abgekürzter Schreibweise von f) ergibt sich in Pro-Kopf-Größen:

$$k = v y + \beta \cdot \frac{P}{L} \cdot \frac{Y}{k}$$

Aus a), d) und e) folgt

$$P = \frac{K}{s_p}$$

Da aber $\dot{k} = \frac{\dot{K}}{L} - nk$, erhält man

$$k = v y + \frac{\beta}{s_p} \cdot \frac{Y}{k} \cdot (k + nk)$$

Division durch y ergibt

$$\frac{k}{y} = v + n \cdot \frac{\beta}{s_p} + \frac{\beta}{s_p} \cdot \frac{k}{k}$$

Logarithmische Differentiation liefert

$$\frac{\dot{k}}{k} - \frac{\dot{y}}{y} = \frac{\beta}{s_p} \cdot \frac{d}{dt} \cdot \frac{k}{k} / \left(v + n \frac{\beta}{s_p} + \frac{\beta}{s_p} \cdot \frac{k}{k} \right)$$

Unter Verwendung von f) und mit der Substitution $x = \frac{k}{k}$ kommt man zu einer Differentialgleichung, die den behandelten Fall vollständig beschreibt:

$$\dot{x} = [x - f(x)] \left[\frac{v s_p}{\beta} + n + x \right]$$

=====

III.2. Das Kaldor-Modell bei klassischer Sparfunktion und endlicher Anpassungsgeschwindigkeit

III.2.1. Voraussetzungen

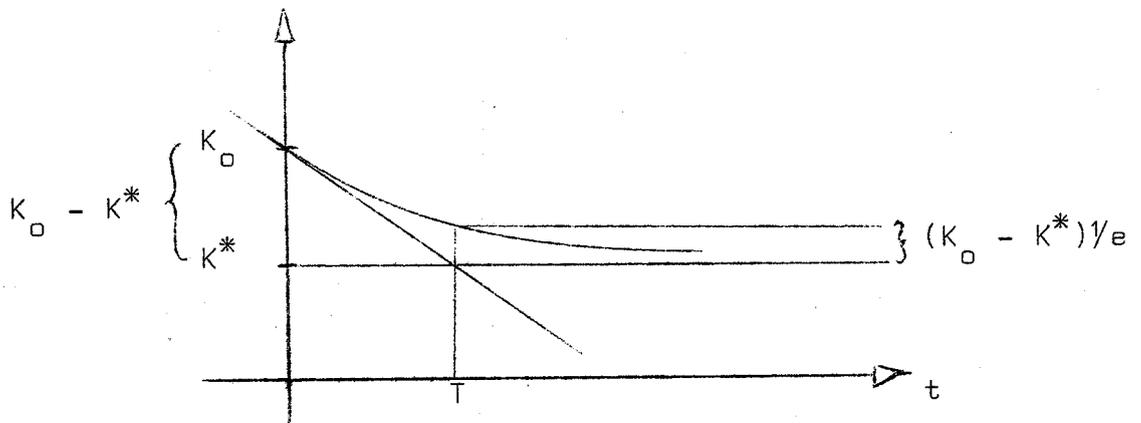
a) Klassische Sparfunktion

$$S = s_p P$$

b) Anpassungsmechanismus

$$K^* - K = T \cdot \dot{K}$$

Bei konstantem K^* und einem tatsächlichen Anfangskapital K_0 wird nach der Zeit T der Unterschied zwischen K^* und K_0 um den Faktor $1/e$ abgebaut.



c) bis g) wie bei III.1.1.

III.2.2. Berechnung

$$K + TK = vY + \beta \frac{P}{K} Y$$

$$k + T(k + nk) = vy + \frac{\beta}{s_p} \frac{\dot{k}}{k} y + \frac{\beta}{s_p} ny$$

$$1 + nT + Tx = (v + \frac{\beta}{s_p} n + \frac{\beta}{s_p} x) \frac{y}{k}$$

$$\frac{k}{y} = (v + \frac{\beta}{s_p} n + \frac{\beta}{s_p} x) / (1 + nT + Tx)$$

$$x - f(x) = \frac{\dot{x}}{\frac{s_p}{\beta} v + n + x} - \frac{\dot{x}}{\frac{1}{T} + n + x}$$

Die resultierende Differentialgleichung lautet:

$$\dot{x} = [x - f(x)] \left[\frac{vs_p}{\beta} + n + x \right] \left[\frac{1}{T} + n + x \right] \left[\frac{1}{\frac{1}{T} - \frac{vs_p}{\beta}} \right]$$

=====

III.3. Das Kaldor-Modell bei Kaldor-Sparfunktion und sofortiger Anpassung

III.3.1. Voraussetzungen

a) $S = s_p P + s_w (Y - P)$

b) $K^* = K$

c) bis g) wie bei III.1.1.

III.3.2. Berechnung

$$K = vY + \beta \frac{P}{K} Y$$

$$K = vY + \frac{\beta}{s_p - s_w} \left(\frac{K}{K} - s_w \frac{Y}{K} \right) Y$$

$$\frac{k}{y} = v + \frac{\beta}{s_p - s_w} \left(\frac{k}{k} + n \right) - \frac{\beta s_w}{s_p - s_w} \cdot \frac{y}{k}$$

Mit $z = \frac{k}{y}$ und $x = \frac{K}{Y}$ erhält man eine quadratische Gleichung in z

$$z^2 = \underbrace{\left(v + \frac{\beta n}{s_p - s_w} + \frac{\beta}{s_p - s_w} x \right)}_A z + \underbrace{\frac{\beta s_w}{s_p - s_w}}_B = 0$$

$$2z_1 = \sqrt{2(A \pm \sqrt{A^2 - 4B})}$$

Da $z = \frac{k}{y} = \frac{K}{Y}$ im allgemeinen größer als 1 ist, z bei negativem Vorzeichen und $s_w \rightarrow 0$ ebenfalls gegen 0 geht, wählt man als Lösung der quadratischen Gleichung

$$z = \sqrt{2(A + \sqrt{A^2 - 4B})}$$

Unter der Annahme $A^2 > 4B$ ergibt logarithmische Differentiation nach der Zeit:

$$x - f(x) = \frac{\dot{x}}{A + \sqrt{A^2 - 4B}} \left[\frac{\beta}{s_p - s_w} + \frac{A}{\sqrt{A^2 - 4B}} \cdot \frac{\beta}{s_p - s_w} \right]$$

$$x - f(x) = \frac{\beta}{s_p - s_w} \cdot \frac{1}{\sqrt{A^2 - 4B}} \cdot \dot{x}$$

Die resultierende Differentialgleichung lautet

$$\dot{x} = [x - f(x)] \cdot \sqrt{\left(\frac{v(s_p - s_w)}{\beta} + n + x\right)^2 - 4 \cdot \frac{s_w(s_p - s_w)}{\beta}}$$

=====

Für $A^2 = 4B$ gilt

$$z = \frac{A}{2}$$

Diese Differentialgleichung

$$\frac{k}{y} = \frac{1}{2} \left(v + \frac{\beta n}{s_p - s_w} + \frac{\beta}{s_p - s_w} x \right)$$

unterscheidet sich nur in den Konstanten vom Fall III.1.

III.4. Das Kaldor-Modell bei Kaldor-Sparfunktion und endlicher Anpassungsgeschwindigkeit

III.4.1. Voraussetzungen

a) $S = s_p P + s_w (Y - P)$

b) $K^* - K = TR$

c) bis g) wie bei III.1.1.

III.4.2. Berechnung

$$K + TR = vY + \frac{\beta}{s_p - s_w} \left(\frac{R}{K} - s_w \frac{Y}{K} \right) Y$$

$$\frac{K}{L} \left(1 + T \frac{R}{K} \right) = v \frac{Y}{L} + \frac{\beta}{s_p - s_w} \left(\frac{R}{K} - s_w \frac{Y}{K} \right) \cdot \frac{Y}{L}$$

Mit $\frac{K}{K} = x + n$ ergibt sich

$$\frac{k}{y}(1 + nT + xT) = v + \frac{\beta}{s_p - s_w} n + \frac{\beta}{s_p - s_w} x - \frac{s_w \beta}{s_p - s_w} \frac{v}{k}$$

Multiplikation mit $z = \frac{k}{y}$ führt zu

$$\underbrace{z^2(1 + nT + xT)}_C - \underbrace{\left(v + \frac{\beta}{s_p - s_w} n + \frac{\beta}{s_p - s_w} x\right)z}_A + \underbrace{\frac{\beta s_w}{s_p - s_w}}_B = 0$$

$$z = \frac{1}{2C} \left(A + \sqrt{A^2 - 4BC} \right)$$

Ist $A^2 > 4BC$, erhält man durch logarithmische Differentiation nach der Zeit

$$x - f(x) = -\frac{\dot{C}}{C} + \frac{\dot{A} + \frac{A\dot{A} - 2B\dot{C}}{\sqrt{A^2 - 4BC}}}{A + \sqrt{A^2 - 4BC}} =$$

$$= -\frac{\dot{C}}{C} + \frac{\dot{A}(A + \sqrt{A^2 - 4BC}) - 2B\dot{C}}{(A + \sqrt{A^2 - 4BC})\sqrt{A^2 - 4BC}}$$

$$[x - f(x)] \sqrt{A^2 - 4BC} = -\frac{\dot{C}}{C} \sqrt{A^2 - 4BC} + \dot{A} - \frac{2B\dot{C}}{A + \sqrt{A^2 - 4BC}}$$

$$\dot{C} = T\dot{x}, \quad \dot{A} = \frac{\beta}{s_p - s_w} \dot{x}$$

$$\dot{x} = [x - f(x)] \sqrt{A^2 - 4BC} \cdot \frac{1}{\frac{\beta}{s_p - s_w} - \frac{T}{C} \sqrt{A^2 - 4BC} - \frac{2BT}{A + \sqrt{A^2 - 4BC}}}$$

Die Umformung des Doppelbruches führt zu

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\frac{\beta}{s_p - s_w} - \frac{2T\sqrt{A^2 - 4BC}}{2C} - \frac{T(A - \sqrt{A^2 - 4BC})}{2C}} = \\
 & = \frac{1}{\frac{\beta}{s_p - s_w} - \frac{T(A + \sqrt{A^2 - 4BC})}{2C}} = \frac{1}{\frac{\beta}{s_p - s_w} - \frac{T \cdot 4BC}{2C(A - \sqrt{A^2 - 4BC})}} = \\
 & = \frac{1}{\frac{\beta}{s_p - s_w} \cdot \left(1 - \frac{2Ts_w}{A - \sqrt{A^2 - 4BC}}\right)}
 \end{aligned}$$

Die resultierende Differentialgleichung lautet:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= [x - f(x)] \sqrt{\left(\frac{v(s_p - s_w)}{\beta} + n + x\right)^2 - 4\frac{s_w(s_p - s_w)}{\beta}(1 + nT + xT)} \cdot \\
 & \cdot \frac{1}{1 - \frac{2Ts_w(s_p - s_w)}{\beta \left[\left(\frac{v(s_p - s_w)}{\beta} + n + x\right) - \sqrt{\left(\frac{v(s_p - s_w)}{\beta} + n + x\right)^2 - 4\frac{s_w(s_p - s_w)}{\beta}(1 + nT + xT)} \right]}}
 \end{aligned}$$

III.5. Resultierende Differentialgleichungen

III.5.1. Fall 1

$$\dot{x} = [x - f(x)] \left[\frac{vs_p}{\beta} + n + x \right]$$

III.5.2. Fall 2

$$\dot{x} = [x - f(x)] \left[\frac{vs_p}{\beta} + n+x \right] \left[\frac{1}{T} + n+x \right] \cdot \frac{1}{\frac{1}{T} - \frac{vs_p}{\beta}}$$

III.5.3. Fall 3

$$\dot{x} = [x - f(x)] \sqrt{\left(\frac{v(s_p - s_w)}{\beta} + n+x \right)^2 - 4 \frac{s_w(s_p - s_w)}{\beta}}$$

III.5.4. Fall 4

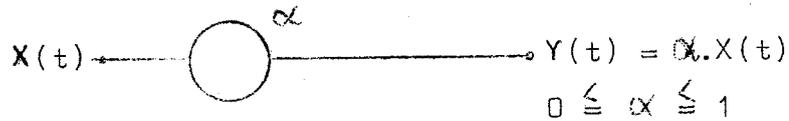
$$\dot{x} = [x - f(x)] \sqrt{\left(\frac{v(s_p - s_w)}{\beta} + n+x \right)^2 - 4 \frac{s_w(s_p - s_w)}{\beta} (1+nT+xT)}$$

$$\frac{1}{1 - \frac{2Ts_w(s_p - s_w)}{\beta \left[\frac{v(s_p - s_w)}{\beta} + n+x - \sqrt{\left(\frac{v(s_p - s_w)}{\beta} + n+x \right)^2 - 4 \frac{s_w(s_p - s_w)}{\beta} (1+nT+xT)} \right]}}$$

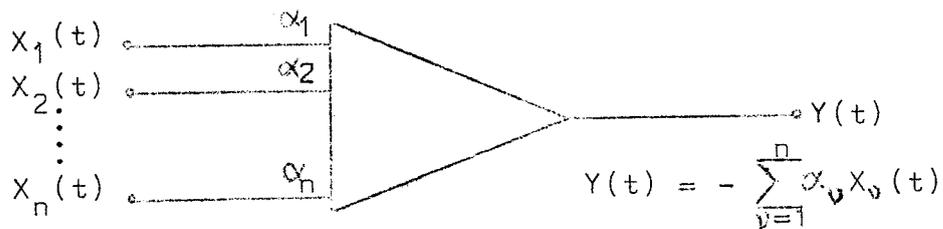
IV. DARSTELLUNG DER ANALOGSCHALTPLÄNE UND RECHENERGEBNISSE

IV.1. Schalt Symbole:¹⁾

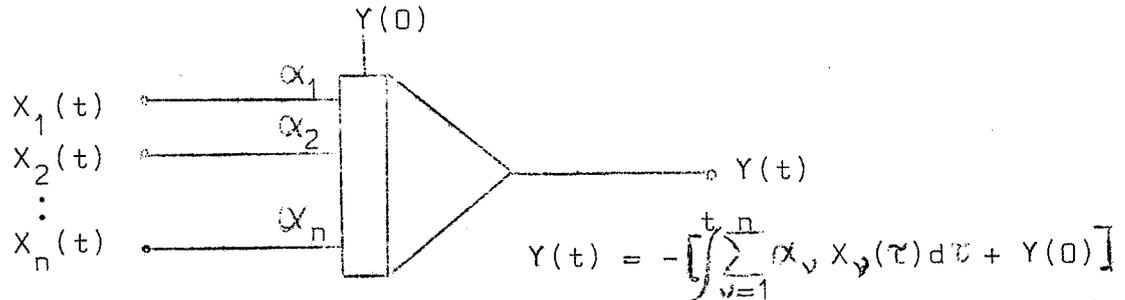
1. Potentiometer



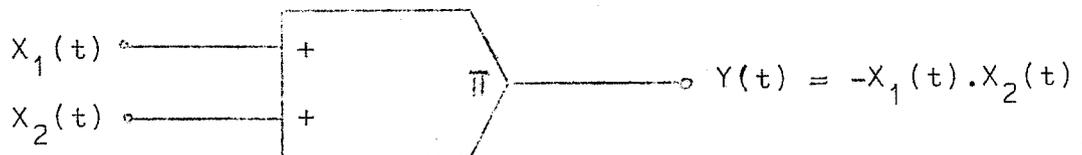
2. Summierer (Inverter)



3. Integrierer



4. Multiplizierer

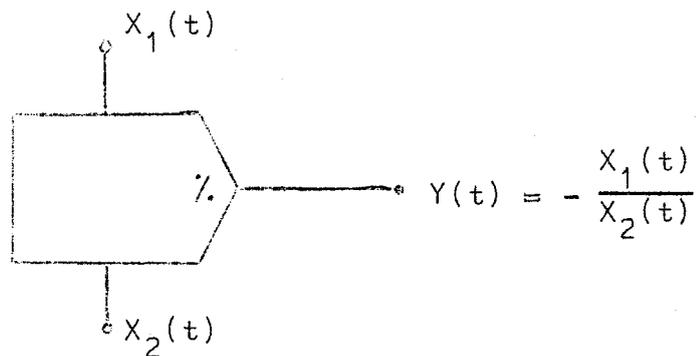


1) Siehe [3]

5. Quadratwurzel



6. Divisionschaltung



IV.2. Darstellung der in den Analog-Schaltplänen vorkommenden Parameter

$$c_1 = \frac{v \cdot s_p}{\beta} + n$$

$$c_2 = \frac{1}{T} + n$$

$$c_3 = 1 / \left(\frac{v \cdot s_p}{\beta} - \frac{1}{T} \right)$$

$$c_4 = \frac{v(s_p - s_w)}{\beta} + n$$

$$c_5 = \frac{4s_w(s_p - s_w)}{\beta}$$

$$c_6 = \frac{2T(s_p - s_w)s_w}{\beta}$$

Mit den Werten $v=2$, $s_p = 0,5$, $\beta = \frac{1}{0,69}$, $T = \frac{1}{0,39}$, $n = 0,01$,
 $s_w = 0,1$ erhält man

$$c_1 = 0,7$$

$$c_2 = 0,4$$

$$c_3 = 3,333$$

$$c_4 = 0,564$$

$$c_5 = 0,11$$

$$c_6 = 0,14$$

IV.3. Darstellung der Differentialgleichungen III.5.1. bis III.5.4.

unter Verwendung der in IV.2. definierten Konstanten und bei Spezifikation von $f(x)$. Zusätzlich müssen Normierungs- und Zeittransformationsbedingungen berücksichtigt werden.¹⁾

$$\text{Wahl von } f(x) : f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{4}x$$

IV.3.1. Fall 1

$$\dot{x} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x\right)\left(\frac{2}{3}c_1 + \frac{2}{3}x\right) = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{3}{8}x\right)\left(\frac{2}{3}c_1 + \frac{2}{3}x\right)$$

IV.3.2. Fall 2

$$x' = -\left(\frac{x^2}{2} - \frac{3}{8}x\right)\left(\frac{2}{3}c_1 + \frac{2}{3}x\right)(c_2 + x)\frac{c_3}{10}$$

Anmerkung: Zeittransformation : $\tau = 10t$

$$\dot{x} = \frac{dx}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = 10x'$$

$$x' = \frac{1}{10}\dot{x}$$

1) Siehe [3]

IV.3.3. Fall 3

$$\dot{x} = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{3}{8}x\right) \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 [(c_4 + x)^2 - c_5]}$$

IV.3.4. Fall 4

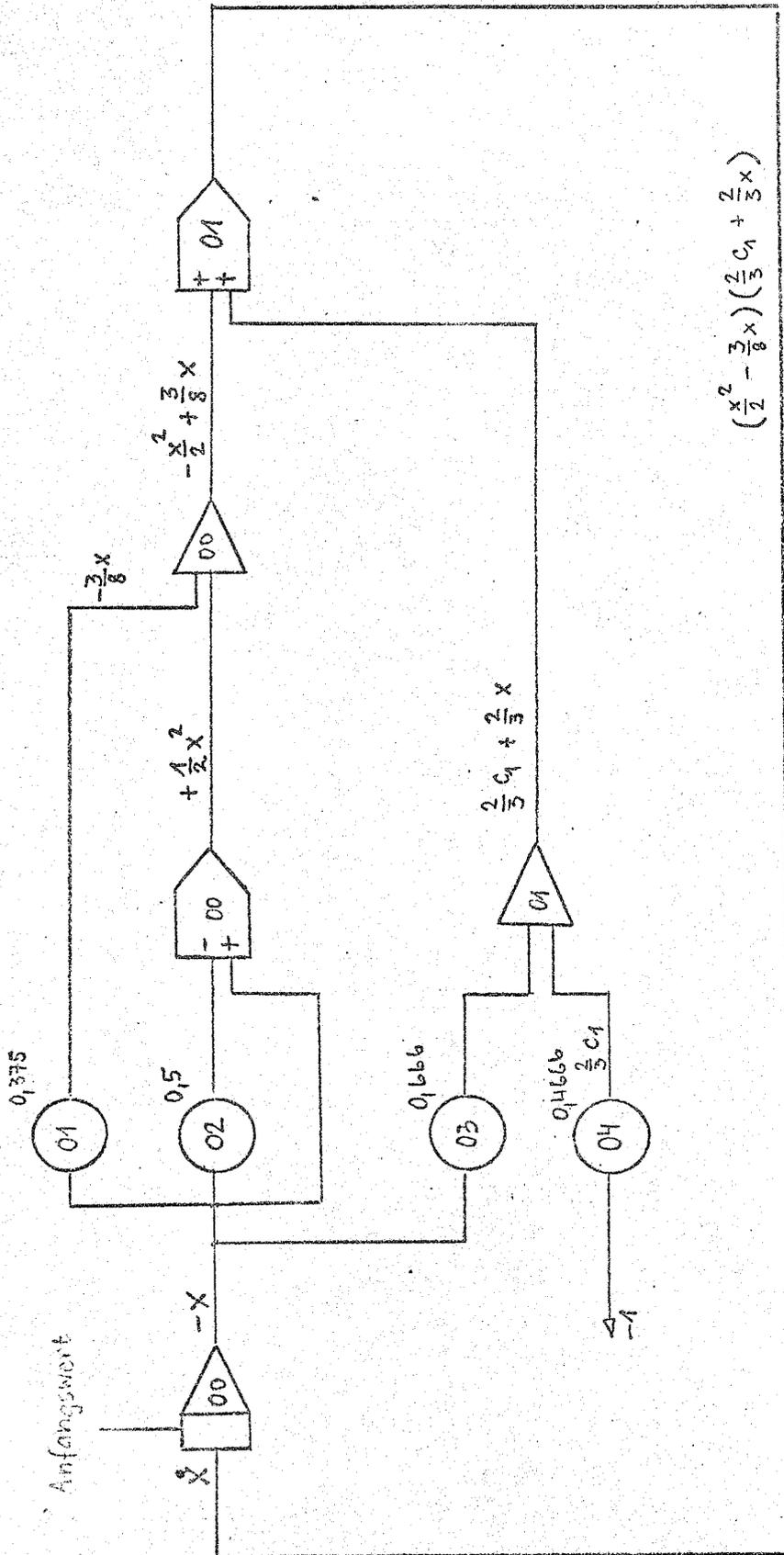
$$x' = \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{x^2}{2} - \frac{3}{8}x\right) \frac{\frac{2}{3}(c_4 + x - W)}{\frac{2}{3}(c_4 - c_6 + x - W) \frac{2}{3}W}$$

wobei $W = \sqrt{(c_4 + x)^2 - c_5(c_2 + xT)}$

IV.4. Analogschaltpläne

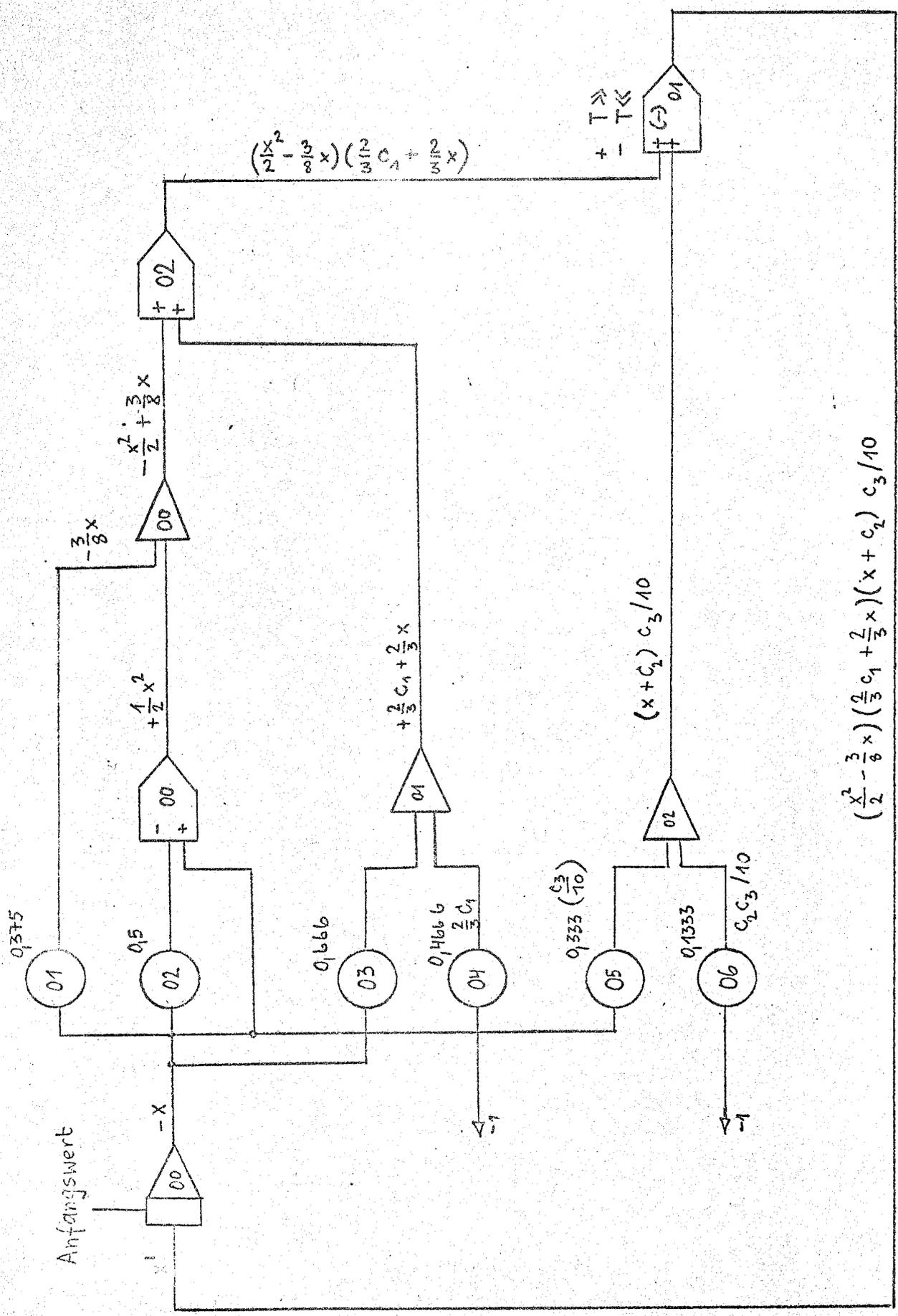
IV.4.1. Fall 1

Bild 1



IV.4.2. Fall 2

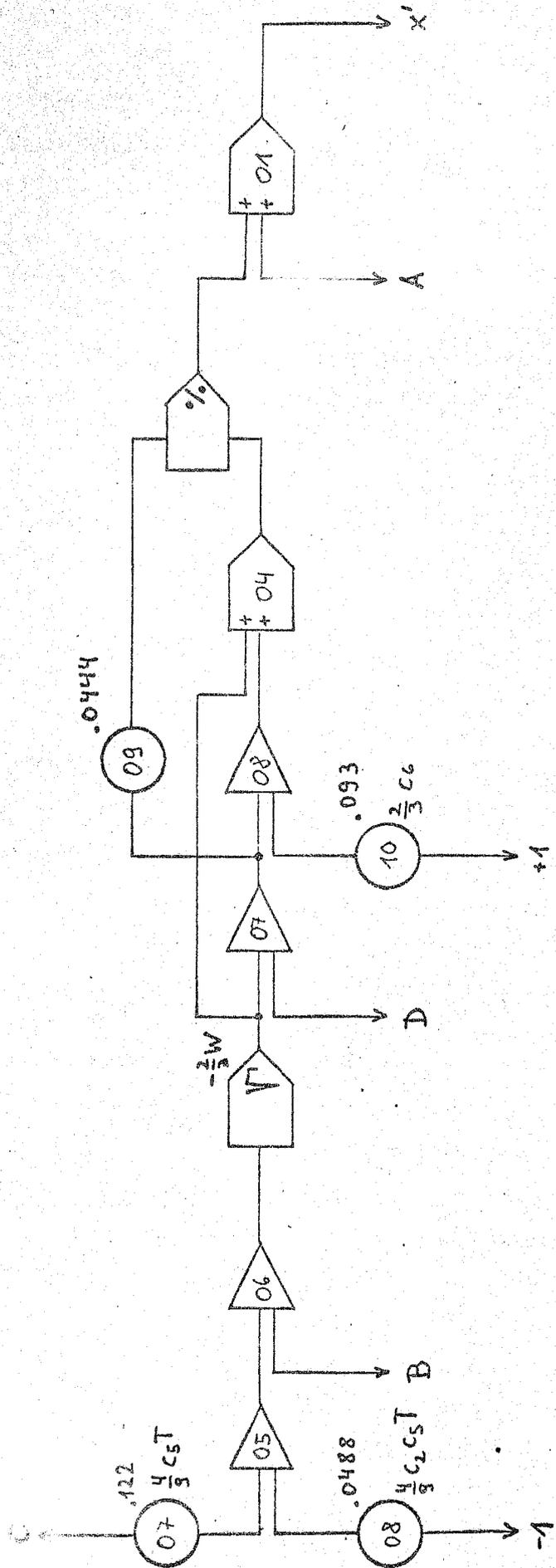
Bild 2



$$\left(\frac{x^2}{2} - \frac{3}{8}x\right) \left(\frac{2}{3}c_1 + \frac{2}{3}x\right) (x + c_2) \frac{c_3}{10}$$

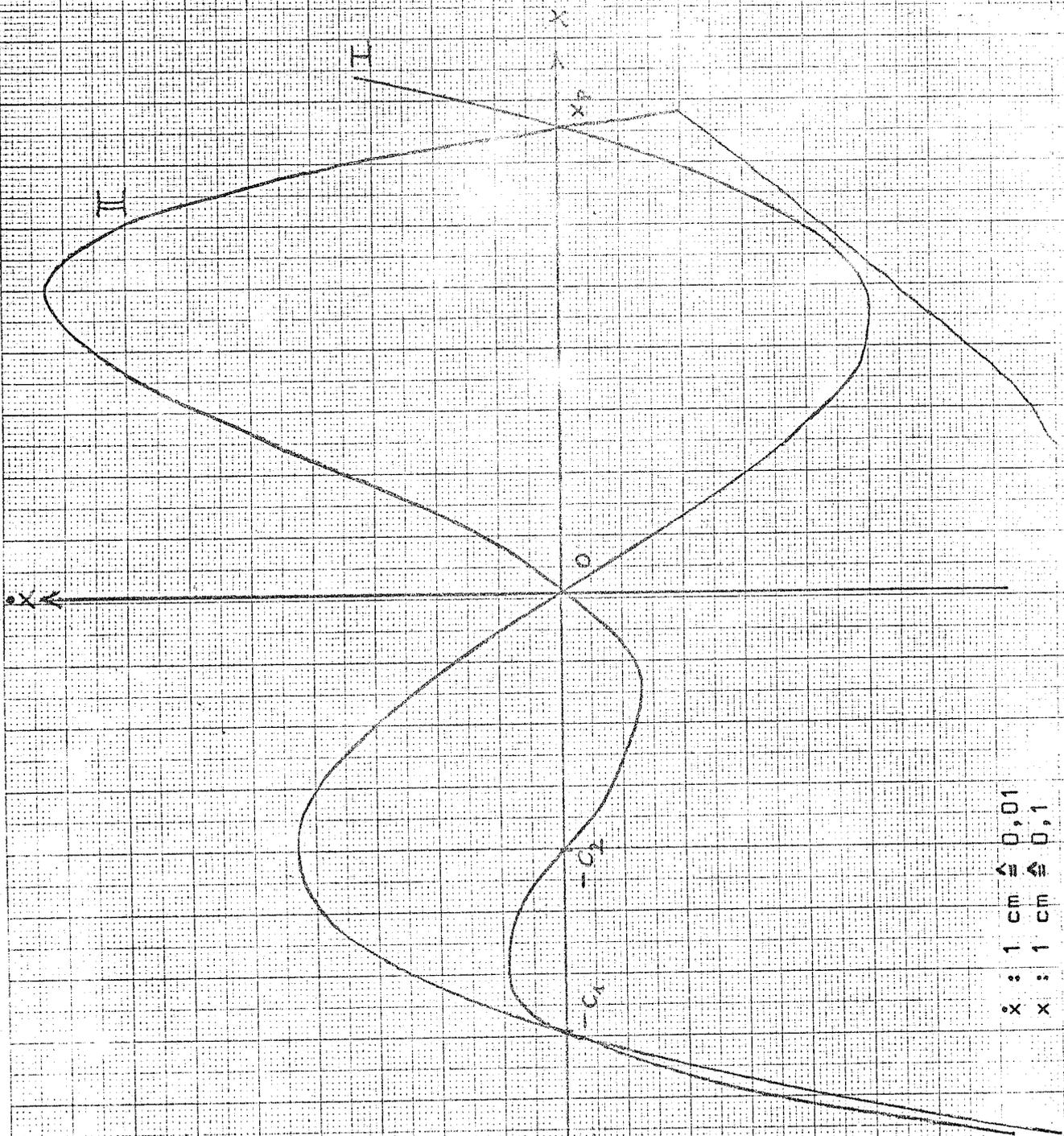
IV.4.4. Fall 4

Bild 4



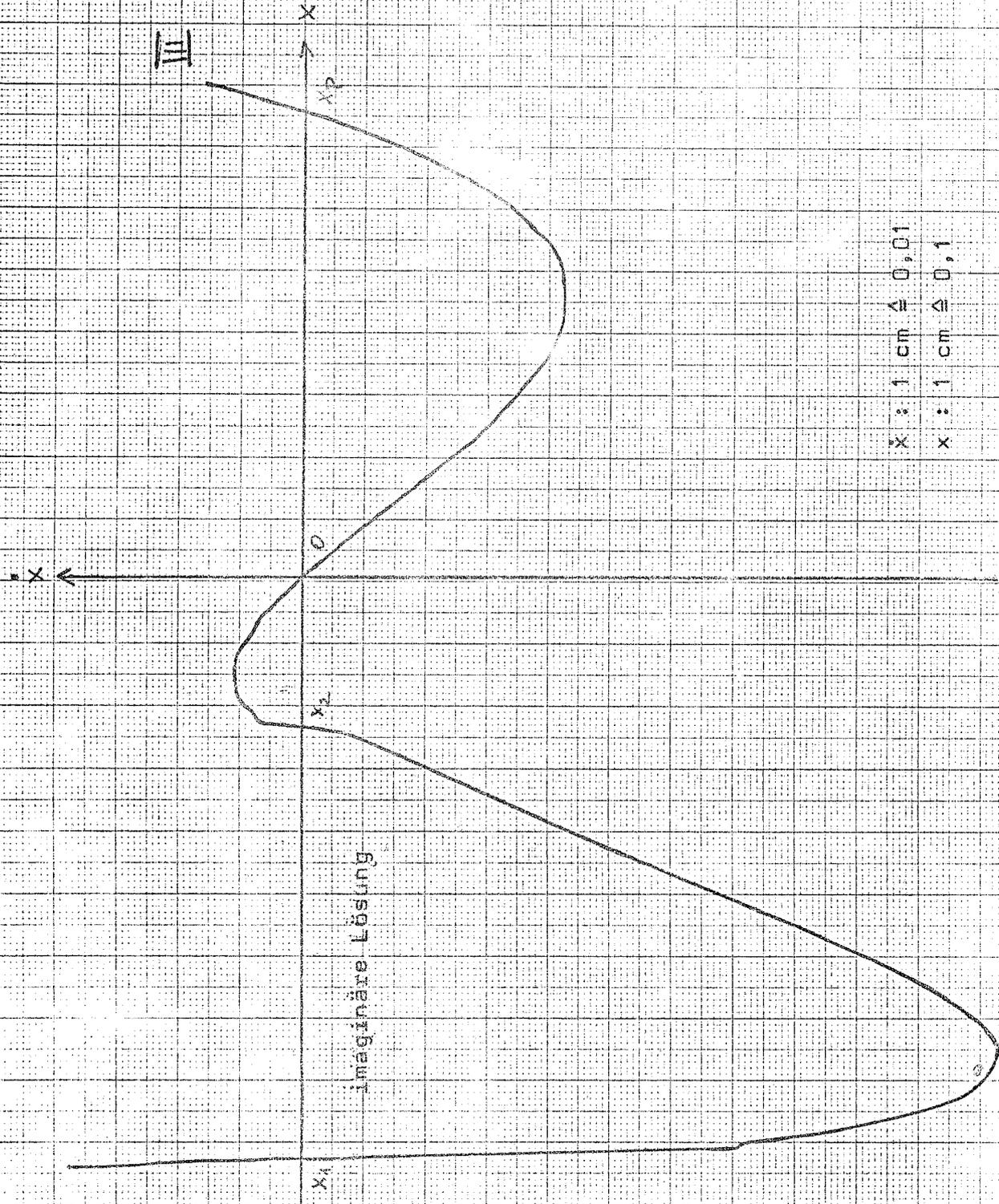
IV.5. Darstellung der Kurven

Bild 5



$\dot{x} : 1 \text{ cm} \hat{=} 0,01$
 $x : 1 \text{ cm} \hat{=} 0,1$

Bild 6



$x : 1 \text{ cm} \hat{=} 0,01$
 $y : 1 \text{ cm} \hat{=} 0,1$

imaginäre Lösung

x_1

x_2

0

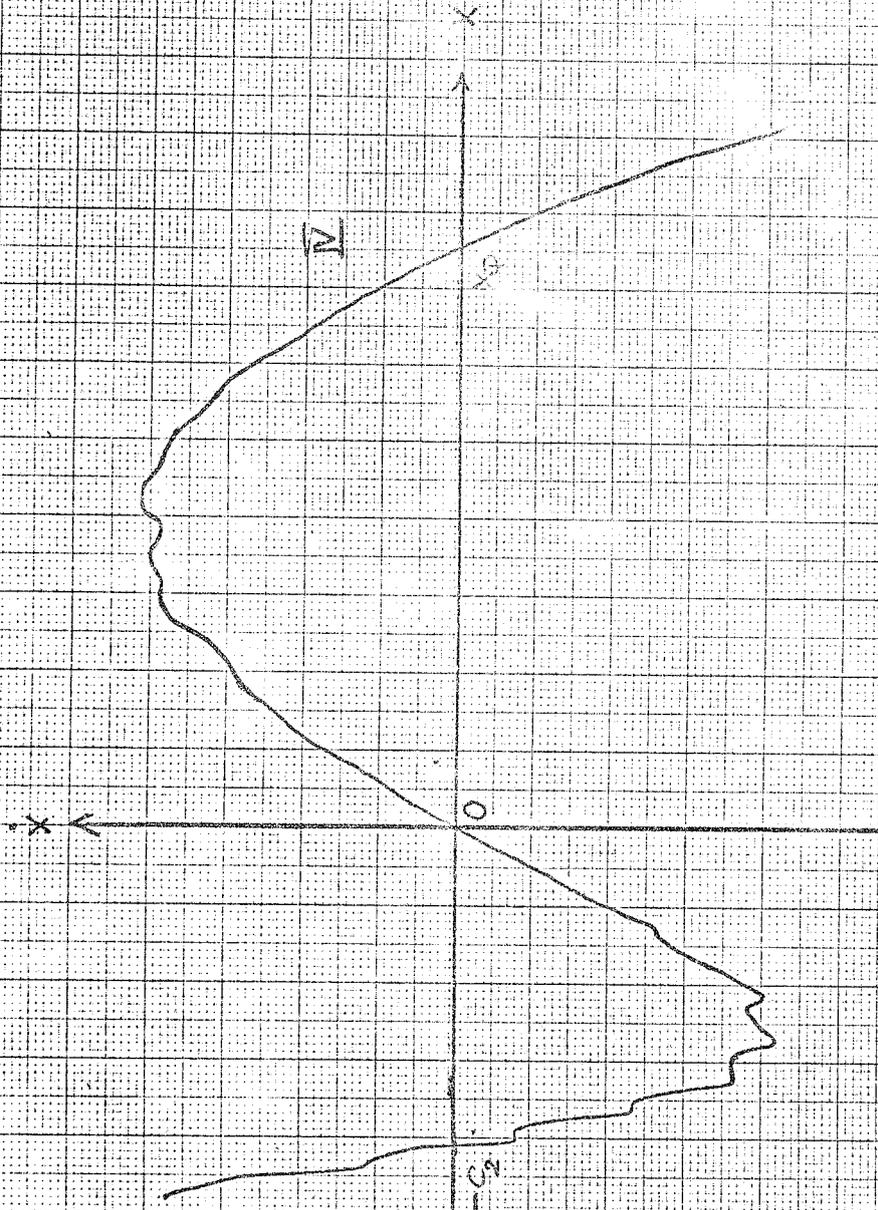
x_p

III

x

y

Bild 7



$\dot{x}, x : 1 \text{ cm} \hat{=} 0,1$

V. INTERPRETATION DER ERGEBNISSE

In [1] betrachtet Kaldor den Punkt P in II.3., ein Punkt, in dem die positiven Wachstumsraten des Pro-Kopf-Outputs und der Kapitalintensität gleich sind, als langfristigen Gleichgewichtspunkt und die zugehörige Wachstumsrate x_p als stationär.

In bezug auf die dieser Arbeit zugrunde liegenden Annahmen macht Kaldor keine Aussagen über Stabilität.

Im folgenden werden die einzelnen Fälle diskutiert, insbesondere in Hinblick auf Stabilität.

V.1. F a l l 1

Wie Kurve I in Bild 5 zeigt, wird für ein x_0 mit $0 < x_0 < x_p$ \dot{x} negativ; x muß daher im Zeitverlauf abnehmen und entfernt sich damit von x_p . Wählt man dagegen $x_0 > x_p$, ergibt sich ein positives \dot{x} ; x wächst daher im Zeitverlauf und entfernt sich ebenfalls von x_p . Der Punkt x_p stationären Wachstums ist daher ein instabiler Punkt. Startet man mit einer von x_p abweichenden Wachstumsrate der Kapitalintensität, so kann der stationäre Wachstumspfad nicht mehr angenähert werden.

Weitere Punkte konstanten Wachstums sind $x=0$ und $x=-c_1$. Führt man für diese Punkte analoge Stabilitätsüberlegungen durch, erweist sich der Punkt $x=0$ als asymptotisch stabil und $x=-c_1$ als instabil.

$x=0$ bedeutet ökonomisch eine über die Zeit konstante Kapitalintensität. Der Kapitalstock wächst mit der gleichen Rate wie das Arbeitskräftepotential.

Startet man im offenen Intervall $] -c_1, x_p [$, dem Einzugsbereich von $x=0$, so nähert sich $x(t)$ dem Punkt $x=0$ für wachsende t .

Aus dem Aufbau der Differentialgleichung III.5.1. ist ersichtlich, daß Variationen von $c_1 = \frac{v s_p}{\beta} + n$ keinerlei Einfluß auf die Instabilität von x_p haben.

Wollte man mit diesem Modell ein stabiles positives Wachstum erreichen, müßten die Voraussetzungen der technischen Fortschrittsfunktionen wesentlich geändert werden. Denkbar wäre eine technische Fortschrittsfunktion in Gestalt einer logistischen Kurve.

V.2. F a l l 1 2

Stabilität bzw. Instabilität von x_p wird von T beeinflusst. Für $I=0$ ergibt sich Fall 1. Ist $T \in] 0, T_K [$, wobei $T_K = \frac{\beta}{v \cdot s_p}$, die kritische Anpassungszeit, so bleibt x_p instabil. Erst für $T > T_K$ wird x_p asymptotisch stabil.

Bild 5 (Kurve II) zeigt die rechte Seite der Differentialgleichung für $T \doteq 2,5 > T_K \doteq 1,4$ Jahre. Zum Unterschied von Fall 1 erhält man eine zusätzliche Nullstelle für $x = -c_2$. Für $T \rightarrow \infty$ wird $-c_2 = -n$. Dem Punkt $x = -n$ entspricht eine Wirtschaft, in der der Kapitalstock konstant bleibt. Die Kapitalintensität schrumpft mit der Wachstumsrate n des Arbeitskräftepotentials.

V.3 F a l l 3

Aus Bild 6 ist ersichtlich, daß x_p instabil ist.

Wie im Fall 1 haben auch hier die Parameter der Differentialgleichung keinen Einfluß auf die Stabilität des Resultats.

Interessant ist jedoch, daß für $x \in]x_1, x_2 [$ die Lösung der Differentialgleichung im Reellen nicht existiert. Die Werte x_1 und x_2 hängen von den Parametern in folgender Weise ab:

$$2x_1 = -\frac{v(s_p - s_w)}{\beta} - n \pm \sqrt{\frac{4s_w(s_p - s_w)}{\beta}}$$

V.4. F a l l 4

Bild 7 zeigt für $T = 2,5$ Jahre ein asymptotisch stabiles x_p .

Bei näherer Analyse findet man, daß die kritische Anpassungszeit T_K von den Parametern wie folgt abhängt:

$$\frac{1}{T_K} = \frac{v(s_p - s_w)}{2\beta} + \sqrt{\frac{v^2(s_p - s_w)^2}{4\beta^2} - \frac{s_w(s_p - s_w)}{\beta}}$$

Ist $T \in]0, T_K [$, ist x_p bei der getroffenen Wahl der Parameter instabil; komplexe Lösungen der Differentialgleichungen sind möglich.

$$\text{Ist } T \in]T_K, \infty [\text{, } 1 / \left(\frac{v(s_p - s_w)}{2\beta} - \sqrt{\frac{v^2(s_p - s_w)^2}{4\beta^2} - \frac{s_w(s_p - s_w)}{\beta}} \right) \text{ [,}$$

ist x_p stabil und die Differentialgleichung hat für alle x reelle Lösungen.

Wird T größer, bleibt x_p stabil, komplexe Lösungen sind aber wieder möglich.

T_K wird bei Parameterwerten von IV.2. etwa 2 Jahre.

V.5. Zusammenfassung

Ein Vergleich der vier Fälle zeigt, daß für die Stabilität von x_p vor allem der Anpassungsprozeß zwischen erwünschtem und tatsächlichem Kapitalstock relevant ist. Die Sparfunktion verändert nur die kritische Anpassungszeit. Erfolgt die Anpassung mit unendlicher Geschwindigkeit, ($K = K^*$), so bleibt die Instabilität von x_p auch bei beliebiger Wahl der Parameter erhalten. Die Verwendung eines Analogrechners gestattete es, die mathematischen Zusammenhänge in anschaulicher Form darzustellen.

VI. ANHANG

VI.1. Verwendete Symbole

S	Sparen
I	Nettoinvestitionen
P	Profite
Y	Output
K	Kapitalstock (tatsächlich)
K*	Kapitalstock (erwünscht)
L	Arbeitskräfte
T	Maß für die Anpassungszeit
s _p	Sparquote der Unternehmer
s _w	Sparquote der Arbeitnehmer
n	natürliche Wachstumsrate (des Arbeitskräftepotentials)
v, β	Parameter der Investitionsfunktion

VI.2. L i t e r a t u r v e r z e i c h n i s

- [1] N. KALDOR: A Model of Economic Growth, Ec. Journal,
Dec. 1957, (S.591-624).
- [2] R.G.D. ALLEN: Macroeconomic Theory, MacMillan, New York,
1967.
- [3] J. HEINHOLD, U. KULISCH, Analogrechnen, BI-Taschenbuch
Nr. 168/168*, Mannheim, 1969.
- [4] P.FLEISSNER, U. SCHUBERT, Stability in Neo-Classical
and Neo-Keynesian Growth Models, Forschungs-
bericht Nr. 35 des Institutes für Höhere
Studien, April 1969.