

STATIONÄRE ZUFALLSFOLGEN

(Zusammenstellung der wichtigsten Sätze
und Betrachtung eines Schätzverfahrens
für Spektraldichten)

Manfred DEISTLER
Horst WEGSCHEIDER

Forschungsbericht No.30
November 1969

I N H A L T

	Seite
Vorbemerkung	i
1. Stationäre Zufallsfolgen und ihre Kovarianzfunktion	1
2. Spektraldarstellung der Kovarianzfunktion stationärer Zufallsfolgen	12
3. Spektraldarstellung stationärer Zufalls- folgen	26
4. Ergodensätze	30
5. Anwendung linearer Operatoren auf statio- näre Zufallsfolgen	36
6. Beispiel eines Schätzverfahrens für Spektraldichten	39
Literatur	52
Zeichenerklärung	53

V O R B E M E R K U N G

Kapitel 1 bis 5 der vorliegenden Arbeit haben den Zweck, die Theorie 2. Ordnung (also im wesentlichen die der Kovarianzfunktion) der stationären Zufallsfolgen in ihren wichtigsten Sätzen zu skizzieren. Die Absicht war dabei, für prospektive Anwender einen einigermaßen konzisen Überblick zu geben, der von mathematischen Begriffen möglichst unbelastet sein sollte. Es wird in diesem Sinne eine Anzahl von Sätzen ohne Beweis zitiert. Das 6. Kapitel liefert den Konsistenzbeweis für ein spezielles Schätzverfahren für Spektraldichten und kann als Illustrationsbeispiel für das Vorhergehende dienen.

1. STATIONÄRE ZUFALLSFOLGEN UND IHRE KOVARIANZFUNKTIONEN

1.1 Grundlegende Definitionen

Def.1 Eine Zufallsfolge ist eine Familie $(X_t)_{t \in T}$ von komplexwertigen Zufallsvariablen X_t , deren Indexmenge T die Menge der ganzen Zahlen G ist.

Bem. Wir werden jedes Element $t \in G$ immer als einen Zeitpunkt interpretieren.

Die Zufallsvariablen X_t sind auf dem Merkmalsraum definiert. Analog zur elementaren Wahrscheinlichkeitstheorie gilt:

Def.2 Eine Realisierung $(X_t(\omega))_{t \in G}$ einer Zufallsfolge $(X_t)_{t \in G}$ ist eine Familie von Funktionswerten $X_t(\omega)$ der Zufallsvariablen X_t der Zufallsfolge für festes $\omega \in \Omega$, wobei die Indexmenge wieder G ist.

Bem. Eine Realisierung einer Zufallsfolge ist also eine komplexwertige Zeitfunktion $(X_t(\omega))_{t \in G} : G \rightarrow \mathbb{C}$.

Wir werden jede Realisierung als einen (diskreten) Ablauf eines bestimmten ökonomischen Geschehens interpretieren, z.B. als monatliche Preisentwicklung eines speziellen Gutes.

Da die harmonische Analyse komplexwertiger Funktionen einfacher ist, beschäftigen wir uns mit Familien komplexwertiger Zufallsvariable und gewinnen den reellen Fall als Sonderfall.

Def.3 Eine Zufallsfolge $(X_t)_{t \in G}$ heißt stationär (im weiteren Sinne) wenn gilt:

- (1) $E\{X_t\} = m = \text{const} \quad \forall t \in G$
- (2) $E\{|X_t|^2\} < \infty \quad \forall t \in G$
- (3) $E\{X_{t+s} \bar{X}_t\} = K(s) \quad \forall t \in G$; d.h. $E\{X_{t+s} \bar{X}_t\}$ ist

nur eine Funktion der Differenz s der Indexwerte.

$K : G \rightarrow \mathbb{C}$ wird als Kovarianzfunktion der Zufallsfolge bezeichnet.

Bem.(1) Wir werden in Zukunft das Wort stationär immer für stationär im weiteren Sinne gebrauchen.

Bem.(2) Mittelwert und Kovarianzfunktion einer stationären Zufallsfolge kennzeichnen diese in ihren wichtigsten Eigenschaften, legen aber nicht die Zufallsfolge eindeutig fest.

Bem.(3) Bed.(2) garantiert die Endlichkeit der Kovarianzfunktion.

Man kann sich ohne Beschränkung der Allgemeinheit nur mit stationären Folgen $(X_t)_{t \in G}$ begnügen, für die $E\{X_t\} = 0$ gilt, da man jede beliebige stationäre Folge sofort in eine zentrierte verwandeln kann: $E\{(X_t - m)\} = 0$.

Wir behandeln also ab jetzt, wenn nicht eigens erwähnt, nur Folgen mit $E\{X_t\} = 0$ dadurch wird auch die (4) Bezeichnung Kovarianzfunktion für K sinnvoll.

Analog zu den mehrdimensionalen Zufallsvariablen

$X = (X^{(1)} \dots X^{(n)})$ definiert man:

Def.4 Eine mehrdimensionale Zufallsfolge ist eine Familie $(X_t^{(1)} \dots X_t^{(n)})_{t \in T}$ von mehrdimensionalen, komplexwertigen Zufallsvariablen $(X_t^{(1)} \dots X_t^{(n)})$ deren Indexmenge G ist.

Def.5 Die Kovarianzmatrix $||K_{ij}||$ besitzt Elemente der folgenden Bauart:

$$K_{ij}(t,s) = E \{ X_t^{(i)} \bar{X}_s^{(j)} \} \quad (5)$$

Wir unterscheiden die Autokovarianzfunktion K_{ii} und die Kreuzkovarianzfunktion K_{ij} ; $i \neq j$

Def.6 Eine mehrdimensionale Zufallsfolge $(X_t^{(1)} \dots X_t^{(n)})_{t \in G}$ heißt stationär (im weiteren Sinne) wenn gilt:

$$E \{ X_t^{(i)} \} = 0; i = 1 \dots n; \forall t \in G \quad (6)$$

(Wir betrachten wieder nur zentrierte Folgen)

$$E \{ |X_t^{(i)}|^2 \} < \infty ; i = 1 \dots n; \forall t \in G \quad (7)$$

$$K_{ij}(t+s,t) = K_{ij}(s); i,j = 1 \dots n; \forall t \in G \quad (8)$$

hängt nur von der Differenz s . ab, nicht von t

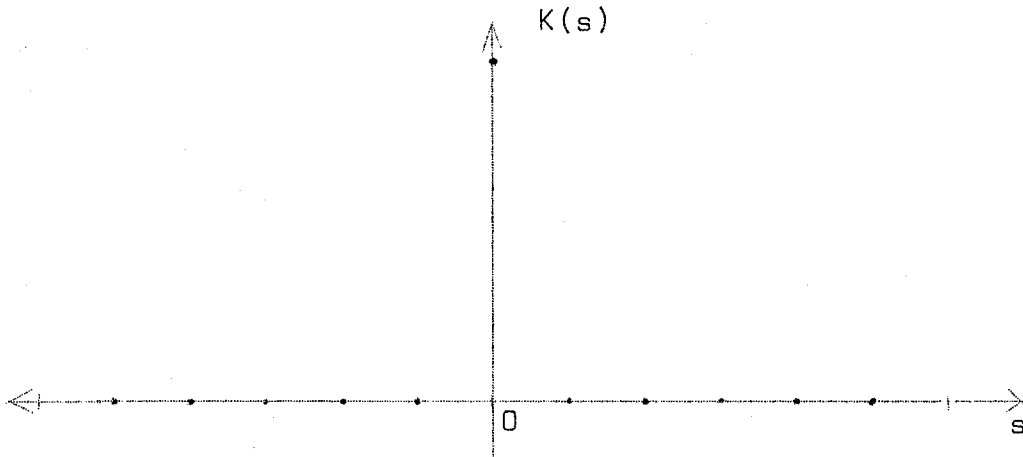
Bem.(1) Bed.(7) sichert wieder die Endlichkeit sämtlicher Werte der Kovarianz.

Beispiele stationärer Zufallsfolgen

Beisp.1 $(X_t)_{t \in G}$ sei eine stationäre Folge unkorrelierter Zufallsvariablen. Eine derartige Zufallsfolge bezeichnet man als weißes Rauschen. Für die Kovarianzfunktion gilt dann:

$$K(s) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{für } s = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (8*)$$

Bild 1 Kovarianzfunktion von weißem Rauschen



Beisp. 2 $(Y_t)_{t \in T}$ sei die in Beisp. 1 erwähnte Folge unkorrelierter Zufallsgrößen. Dann bezeichnen wir die Zufallsfolgen folgender Bauart, wobei a_i eine beliebige komplexe Zahl ist

$$X_t = \sum_{i=m}^n a_i Y_{t-i} \quad (9a)$$

$$X_t = \sum_{i=0}^{\infty} a_i Y_{t-i}, \quad \sum_{i=0}^{\infty} |a_i|^2 < \infty \quad (9b)$$

$$X_t = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i Y_{t-i}, \quad \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |a_i|^2 < \infty \quad (9c)$$

Der hier verwendete Konvergenzbegriff ist der der Konvergenz im Mittel:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left| X_t - \sum_{i=-n}^n a_i Y_{t-i} \right|^2 = 0$$

als Folgen gleitender Mittelwerte von weißem Rauschen

Diese Folgen gleitender Mittelwerte sind stationär: für die Mittelwerte ist dies evident.

Die Kovarianzfunktionen lauten hier:

für (9a):

$$K(s) = E\{X_{t+s} \bar{X}_t\} = E\left\{\sum_{i=m}^n a_i Y_{t+s-i} \sum_{j=m}^n \bar{a}_j \bar{Y}_{t-j}\right\} =$$

$$= \sum_{\substack{m \leq i+s \leq n \\ m \leq i \leq n}} a_{i+s} \bar{a}_i \sigma^2 \quad (10a)$$

für (9b):

$$K(s) = E\{X_{t+s} \bar{X}_t\} = \sum_{\substack{i+s \geq 0 \\ i \geq 0}} a_{i+s} \bar{a}_i \sigma^2 \quad (10b)$$

für (9c):

$$K(s) = E\{X_{t+s} \bar{X}_t\} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_{i+s} \bar{a}_i \sigma^2 \quad (10c)$$

unabhängig
von t

Die Bedingung $\sum |a_i|^2 < \infty$ stellt die Existenz der Varianz und damit auch der Kovarianzfunktionen der stationären Folgen gleitender Mittelwerte sicher.

Wir betrachten nun noch den folgenden Sonderfall von (9a)

näher: $a_i = \frac{1}{2m+1}$; $i = -m, \dots, +m$:

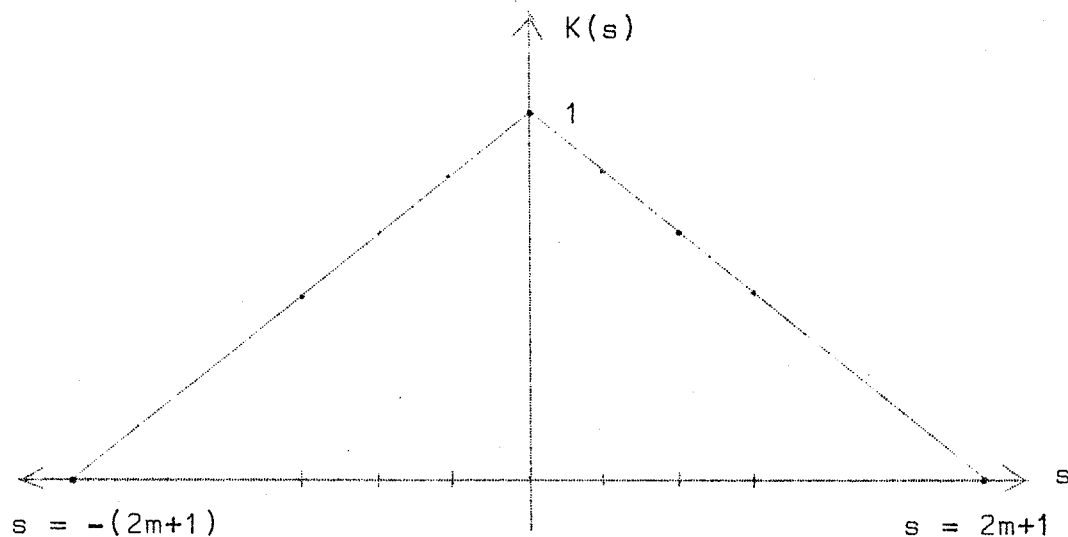
$$X_t = \frac{1}{2m+1} \sum_{i=-m}^m Y_{t-i} \quad (11)$$

wobei $E\{|Y_t|^2\} = 1$ gilt

dann erhält man als Kovarianzfunktion von $(X_t)_{t \in G}$:

$$K(s) = \begin{cases} \frac{2m+1-|s|}{2m+1} & \text{für } |s| \leq 2m+1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (12)$$

Bild 2 Kovarianzfunktion von Folge (11)



Beisp. 3 Wir betrachten eine stationäre Zufallsfolge folgender Bauart: $X_t = Y \cdot f(t)$; wobei Y eine Zufallsvariable und $f(t)$ eine Zeitfunktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ ist.

Da wir immer $E\{X_t\} = 0 \quad \forall t$ fordern, muß $E\{Y\} = 0$ gelten. Weiters muß, damit X_t stationär ist, die Funktion $E\{X_{t+s} \bar{X}_t\} = f(t+s) \cdot \bar{f}(t) \cdot E|Y|^2$ von t unabhängig sein, d.h. $f(t+s) \bar{f}(t)$ darf nicht von t abhängen.

Für $s = 0$ ergibt sich: $|f(t)|^2 = r^2 = \text{const.}$

Man setzt nun: $f(t) = r e^{i\phi(t)}$ wobei $r \in \mathbb{R}$ und $\phi : G \rightarrow \mathbb{R}$ gilt.

Durch Einsetzen in $f(t+s) \bar{f}(t)$ erhält man: $r^2 e^{i\phi(t+s)} e^{-i\phi(t)}$ d.h. die Differenz $\phi(t+s) - \phi(t)$ muß von t unabhängig sein.

Die Funktion $\phi(t) = \omega t + \theta$ genügt dieser Bedingung sicher: Man setzt daher: $f(t) = r e^{i(\omega t + \theta)}$

Den konstanten Faktor $r e^{i\theta}$ nimmt man in die Zufallsgröße Y hinein. Daher lautet die endgültige Form für die

stationäre Zufallsfolge:

$$X_t = Y e^{i \omega t} \quad (11)$$

wobei Y eine komplexe Zufallsvariable ist mit
 $E\{Y\} = 0$ $E\{|Y|^2\} < \infty$; $t \in G, \omega$: reelle Konstante.

Da t nur ganze Werte annimmt und bei ganzem $k, e^{i(\omega + 2\pi k)t} = e^{i(\omega t)} \quad \forall t \in G$ gilt, ist ω nur bis auf einen Summanden bestimmt, der ein Vielfaches von 2π ist. Daher kann man ω auf das Intervall $(-\pi, \pi)$ beschränken.

Die Zufallsfolge (11) beschreibt offenbar eine periodische Schwingung der Kreisfrequenz mit zufälliger Amplitude und Phase. Der Realteil jeder Realisierung stellt also die Folge der Form $X_t^R = a \cos(\omega t + \phi_1)$,
 $t = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ dar, wobei sich a und ϕ , von Realisierung zu Realisierung ändern.

Die Kovarianzfunktion hat die Gestalt:

$$K(s) = E\{Y e^{i\omega(t+s)} \overline{Y e^{i\omega t}}\} = \underline{e^{i\omega s} \cdot E\{|Y|^2\}} = \underline{e^{i\omega s} \cdot b} \quad (12)$$

Wobei b der Erwartungswert des Amplitudenquadrates ist.

Beisp. 4

Es sei $X_t = Y_1 e^{i\omega_1 t} + Y_2 e^{i\omega_2 t}$; $\omega_1 \neq \omega_2$

und $E\{Y_1\} = E\{Y_2\} = 0$; $E\{|Y_1|^2\} < \infty$, $E\{|Y_2|^2\} < \infty$ (13)

so folgt $E\{X_t\} = 0 \quad \forall t$

$$\begin{aligned} E\{X_{t+T}\bar{X}_t\} &= E\{(Y_1 e^{i\omega_1(t+T)} + Y_2 e^{i\omega_2(t+T)}) (\bar{Y}_1 e^{-i\omega_1 t} + \bar{Y}_2 e^{-i\omega_2 t})\} = \\ &= e^{i\omega_1 T} E\{|Y_1|^2\} + e^{i(\omega_1(t+T) - \omega_2 t)} E\{Y_1 \bar{Y}_2\} + \\ &\quad + e^{i(\omega_2(t+T) - \omega_1 t)} E\{Y_2 \bar{Y}_1\} + e^{i\omega_2 T} E\{|Y_2|^2\} . \end{aligned}$$

Damit der Prozeß (13) stationär wird, muß der obige Ausdruck von t unabhängig sein. Auf Grund der linearen Unabhängigkeit der Funktionen $e^{i(\lambda_1 - \lambda_2)t}$, $e^{-i(\lambda_1 - \lambda_2)t}$ und 1 ist der Ausdruck genau dann von t unabhängig, wenn

$$E\{Y_1 \bar{Y}_2\} = E\{\bar{Y}_1 Y_2\} = 0 \quad (14)$$

gilt.

In diesem Falle beschreibt X_t die Überlagerung zweier nicht-korrelierter Schwingungen mit verschiedenen Frequenzen und zufälligen Amplituden und Phasen.

Für die Kovarianzfunktion gilt:

$$\begin{aligned} K(s) &= e^{i\omega_1 s} E\{|Y_1|^2\} + e^{i\omega_2 s} E\{|Y_2|^2\} = \\ &= b_1 e^{i\omega_1 s} + b_2 e^{i\omega_2 s} \quad (b_1 > 0, b_2 > 0) \quad (15) \end{aligned}$$

Wobei b_1 und b_2 die Erwartungswerte der Amplitudenquadrate der jeweiligen Schwingungen sind. $K(s)$ hängt nicht von den Phasen der Schwingungen ab.

Während Zufallsfolgen von Bauart (11) immer komplex sind, können die vom Typ (13) auch reell sein. Und zwar dann, wenn

$$Y_1 = \bar{Y}_2 \quad ; \quad \omega_1 = -\omega_2$$

In diesem Falle kann man die Folge anschreiben als:

$$X_t = Z_1 \cos \omega t + Z_2 \sin \omega t \quad (16)$$

wobei gilt

$$Y_1 = \frac{1}{2} (Z_1 + iZ_2) \quad ; \quad Y_2 = \frac{1}{2} (Z_1 - iZ_2)$$

Z_1, Z_2 sind reellwertige Zufallsvariable

(15) wird zu

$$K(s) = c \cdot \cos(\omega s) \quad (17)$$

$$E\{Z_1^2\} = E\{Z_2^2\} = c \quad ; \quad E\{Z_1 Z_2\} = 0$$

Beisp. 5 Wir betrachten nun Zufallsfolgen, die eine Überlagerung von n zufälligen periodischen Schwingungen mit verschiedenen Frequenzen darstellen:

$$X_t = \sum_{k=1}^n Y_k e^{i\omega_k t}$$

$$E\{Y_k\} = 0 \quad k = 1 \dots n \quad (18)$$

$$E\{Y_k \bar{Y}_l\} = 0 \quad \forall k \neq l$$

$$E\{|Y_k|^2\} < \infty \quad k = 1 \dots n$$

Für die Kovarianzfunktion gilt

$$K(s) = \sum_{k=1}^n E \{ |Y_k|^2 \} e^{i\omega_k s} = \sum_{k=1}^n b_k e^{i\omega_k s} ; \quad (19)$$

$$b_k > 0, \quad k = 1 \dots n$$

Damit die Folge (18) reell wird, muß $n = 2m$ gerade sein und die $2m$ Summanden müssen in m Paare konjugiert komplexer Summanden zerfallen. Man kommt daraufhin zu folgender Darstellung:

$$X_t = \sum_{i=1}^m Z_{1i} \cos \omega_i t + Z_{2i} \sin \omega_i t$$

$$E \{ Z_{1i} Z_{2j} \} = 0 \quad ; \quad i, j = 1 \dots m \quad (20)$$

$$E \{ Z_{1i} Z_{1j} \} = \begin{cases} c_i & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad i = 1, 2$$

$$K(s) = \sum_{i=1}^m c_i \cos \omega_i s \quad (21)$$

Nun betrachten wir die zu (18) gehörige Grenzfolge für $n \rightarrow \infty$. Die Endlichkeit der Varianz wird durch

$$\sum_{k=1}^{\infty} E \{ |Y_k|^2 \} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k < \infty$$

sichergestellt. Diese Bedingung aber garantiert gleichzeitig die Konvergenz im Mittel von

$$X_t = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k e^{i\omega_k t} \quad (22)$$

Die Kovarianzfunktion von (22) lautet

$$K(s) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{i \omega_k s} \quad (23)$$

Beisp. 6 Zum Abschluß betrachten wir eine zweidimensional stationäre Zufallsfolge: $(X_t^{(1)}, X_t^{(2)})_{t \in G}$ wobei gilt:

$$X_t^{(i)} = \sum_{k=1}^n Y_k^{(i)} e^{i \omega_k t} \quad i = 1, 2 \quad (24)$$

$$E \{ Y_k^{(i)} \bar{Y}_l^{(j)} \} = 0 \quad \text{für } i \neq j \wedge k, l = 1 \dots n, \\ \text{bzw. für } i = j \wedge k \neq l.$$

$$E \{ |Y_k^{(i)}|^2 \} < \infty \quad i = 1, 2 ; k = 1 \dots n$$

Für die Kovarianzfunktion gilt dann

$$\begin{aligned} K_{i,j}(s) &= E \left\{ \sum_{k=1}^n Y_k^{(i)} e^{i \omega_k (t+s)} \sum_{l=1}^n \bar{Y}_l^{(j)} e^{-i \omega_l t} \right\} = \quad (25) \\ &= \sum_{k=1}^n e^{i \omega_k s} E \{ Y_k^{(i)} \bar{Y}_k^{(j)} \} = \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ \sum_{k=1}^n e^{i \omega_k s} E \{ |Y_k^{(i)}|^2 \} & \text{für } i = j \end{cases} \end{aligned}$$

2. SPEKTRALDARSTELLUNG DER KOVARIANZFUNKTION STATIONÄRER ZUFALLSFOLGEN

2.1 Einführung

Wir betrachten nochmals Zufallsfolgen der Bauart (22) von Beispiel 1.5 und die zugehörigen Kovarianzfunktionen (23). Diese Folgen bezeichnet man als Folgen mit diskretem Spektrum. Als Spektrum bezeichnet man die Menge aller in (22) vorkommenden Winkelfrequenzen: $\{\omega_1, \omega_2, \dots\} \subset (-\pi, \pi)$. Im Folgenden wird nun - zuerst für eindimensionale Zufallsfolgen - eine wichtige Verallgemeinerung der Darstellung (23) vorgenommen: Sie besagt, daß die Kovarianzfunktion jeder stationären Zufallsfolge in der Form

$$K(s) = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i \omega s} dF(\omega)$$

angeschrieben werden kann.

Diese Darstellung wird als Spektraldarstellung der Kovarianzfunktion bezeichnet. Sie wird im vorliegenden Abschnitt mit Ausnahme des Satzes von Herglotz bewiesen.

2.2 Eigenschaften der Kovarianzfunktionen; ihre Spektraldarstellung

Def.1 Eine Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ heißt positiv definit wenn gilt

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(t_i - t_j) z_i \bar{z}_j \geq 0 \quad \forall : \begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ t_1, \dots, t_n \in G \\ z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C} \end{cases} \quad (1)$$

Satz 1

Jede Kovarianzfunktion einer stationären Zufallsfolge ist positiv definit und umgekehrt ist jede Definition 1 erfüllende Funktion Kovarianzfunktion einer stationären Zufallsfolge, die als reell angenommen werden kann, wenn die Kovarianzfunktion reell ist.

Bew. $K(s)$ ist Kovarianzfunktion einer stationären Zufallsfolge. Beh.(1) : $K(s)$ ist positiv definit.

Bew.(1) Sei $n \in \mathbb{N}$, $s_1 \dots s_n \in G$, $z_1 \dots z_n \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \text{dann gilt} \quad & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K(s_i - s_j) z_i \bar{z}_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E \{ X_{s_i} \bar{X}_{s_j} \} z_i \bar{z}_j = \\ & = E \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_{s_i} \bar{X}_{s_j} z_i \bar{z}_j \right\} = E \left\{ \sum_{i=1}^n X_{s_i} z_i \sum_{j=1}^n \bar{X}_{s_j} \bar{z}_j \right\} = \\ & = E \left\{ \left| \sum_{i=1}^n X_{s_i} z_i \right|^2 \right\} \geq 0 \end{aligned}$$

Beh.(2) Jede Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ die positiv definit ist, ist Kovarianzfunktion einer stationären Zufallsfolge.

Bew.(2) $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ ist positiv definit $\implies \exists$ Gaußprozeß

$$\begin{aligned} (X_t)_{t \in G} : E \{ X_t \} &= 0 \quad \forall t \in G \\ f(s) &= E \{ X_{t+s} \bar{X}_t \} \quad \forall t \in G \end{aligned}$$

Ist $f(s)$ reell, dann kann der Gaußprozeß als reell angenommen werden (s. /2/ S.72)

Satz 2

Für alle Kovarianzfunktionen $K : G \rightarrow \mathbb{C}$ gilt:

(a) $K(s) \geq 0$; Weiters gilt $K(0) > 0$ genau dann, wenn X_t nicht mit Wahrscheinlichkeit 1 gleich Null ist.

(b) $K(-s) = \overline{K(s)}$

(c) $|K(s)| \leq K(0)$

Bew. Satz 1 \wedge Def (1) \implies

a) $n = 1, s_1 = 0, z_1 = 1 \implies K(0) \geq 0$

Der Zusatz folgt aus: $K(0) = \int |X_t|^2 dP$

b) $n = 2; s_1 = 0, s_2 = s; z_1, z_2$ beliebig \wedge Def (1)

$$\begin{aligned} \implies & K(0)|z_1|^2 + K(-s)z_1\bar{z}_2 + K(s)\bar{z}_1z_2 + K(0)|z_2|^2 = \\ & = \underbrace{K(0)(|z_1|^2 + |z_2|^2)}_{\geq 0} + K(-s)z_1\bar{z}_2 + K(s)\bar{z}_1z_2 \geq 0 \dots (1) \end{aligned}$$

(1) $\implies K(-s)z_1\bar{z}_2 + K(s)\bar{z}_1z_2 \in \mathbb{R} \dots\dots (2)$

Wir setzen nun: $\alpha + i\beta = z_1\bar{z}_1 \quad \alpha - i\beta = \bar{z}_1z_2$
 $c + id = K(s) \quad e + if = K(-s) \dots\dots (3)$
 $\alpha, \beta, c, d, e, f \in \mathbb{R}$

(2) \wedge (3) $\implies (e + if)(\alpha + i\beta) + (c + id)(\alpha - i\beta) \in \mathbb{R} \implies$

$\implies \alpha f + \beta e - \beta c + \alpha d = \alpha(d+f) + \beta(e-c) = 0 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \implies$

$\implies e = c, f = -d \dots\dots (4)$

(3) \wedge (4) $\implies K(-s) = \overline{K(s)}$

c) Annahme: $|K(s)| \neq 0$; $z_1 = K(s)$; $z_2 = -|K(s)| \dots (5)$

$$(5) \wedge \text{Def. 1} \implies 2K(0) |K(s)|^2 + \overline{K(s)} \cdot K(s).$$

$$\cdot (-|K(s)|) + K(s) \overline{K(s)} \cdot (-|K(s)|) \geq 0$$

$$2K(0) |K(s)|^2 - 2|K(s)|^3 \geq 0 \implies |K(s)| \leq K(0)$$

Satz 3

Eine Funktion $K : G \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann positiv definit, wenn sie in der Form

$$K(s) = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{is\omega} dF(\omega) \quad (2)$$

mit einer monoton nicht fallenden Funktion $F : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ dargestellt werden kann.

F ist bei geeigneter Normierung eindeutig durch K bestimmt. Die Normierung von F wird wie folgt vorgenommen:

- a) Man setzt $F(-\pi) = 0$
- b) Wir fordern $F(\omega+) = F(\omega) \quad \forall \omega \in (-\pi, \pi)$; d.h. die Rechtsstetigkeit der Funktion
- c) Hat F an der Stelle $-\pi$ einen Sprung, so wird dieser an die Stelle $+\pi$ verlegt.

Bew. Satz 3 wird als Satz von Herglotz bezeichnet. Auf den Beweis wird wegen seines Umfanges verzichtet. Es sei auf die Literatur verwiesen (/2/ S.474, 475, /1/ S.207).

Bem.1 Aus Satz 1 und Satz 3 folgt unmittelbar, daß jede Kovarianzfunktion eine Darstellung der Form (2) besitzt. Die der Kovarianzfunktion K eineindeutig (immer geeignete Normierung vorausgesetzt) zugeordnete Funktion F hat folgende Eigenschaften:

$$(a) F(+\pi) = 0 \quad F(\pi) = K(0) \quad (\text{folgt aus (2)})$$

$$(b) F(\omega+) = F(\omega)$$

(c) F monoton nicht fallend

Im Falle $K(0) = 1$ sind dies genau die Eigenschaften einer Verteilungsfunktion. Man bezeichnet $F : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ deshalb als die spektrale Verteilungsfunktion der Zufallsfolge $(X_t)_{t \in G}$.

Bem.2 F kann als monotone beschränkte Funktion nur eine einzige Art von Unstetigkeitsstellen aufweisen: nämlich höchstens abzählbar viele Sprungstellen.

Bem.3 Ist K reellwertig, dann gilt: $K(-s) = K(s) \quad \forall s \in G$; Da aus (2) ersichtlich ist, daß, wenn man $F(\omega)$ durch $-F(-\omega)$ ersetzt, die linke Seite zu $K(-s)$ wird, folgt aus der Eindeutigkeit von F :

$$F(\omega_2) - F(\omega_1-) = F(-\omega_1) - F(-\omega_2-); \quad +\pi < \omega_1 < \omega_2 \leq \pi$$

Definieren wir nun eine neue Funktion $G : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ durch:

$$G(\omega) = 2(F(\omega) - F(0+)) + F(0+) - F(0-) \quad \forall \omega \in (0, \pi)$$

$$G(\omega) = 0 \quad \omega = 0$$

dann kann man K darstellen durch:

$$K(s) = \int_0^\pi \cos \omega s \, dG(s)$$

Def.2 Kann man die spektrale Verteilungsfunktion F in der Form

$$F(\omega) = \int_{-\pi}^{\omega} f(\lambda) d\lambda \quad ; \quad f : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$$

darstellen, dann sagt man, für die Folge $(X_t)_{t \in G}$ existiere die spektrale Dichtefunktion f . Eine spektrale Verteilungsfunktion F , die sich in der Form (3) darstellen läßt, heißt absolut stetig.

Satz 4

F ist absolut stetig genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodaß für jede beliebige Menge von disjunkten Intervallen aus $(-\pi, \pi)$ gilt:

$$\sum_{k=1}^n b_k - a_k < \delta \implies \sum_{k=1}^n |F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon$$

ohne Beweis.

Satz 5

Aus

$$\sum_{s=-\infty}^{+\infty} |K(s)| < \infty \tag{4}$$

folgt: (a) F ist absolut stetig

(b) $F' = f$ ist stetig

ohne Beweis.

Bem.(1) Für den in der Praxis sehr häufigen Fall

$\sum_{s=-\infty}^{+\infty} |K(s)| < \infty$ ist also die Existenz der spektralen Dichtefunktion sichergestellt. Im Falle der Existenz kann die Spektraldarstellung der Kovarianzfunktion (2) angeschrieben werden als:

$$K(s) = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i \omega s} f(\omega) d\omega \quad (5)$$

Aus (5) erkennt man die Größen $\frac{1}{2\pi} K(s)$ als Fourierkoeffizienten der Funktion f . Daher gilt:

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} e^{-i \omega s} K(s) \quad \forall \omega \in (-\pi, \pi) \quad (6)$$

Bem.(2) Existiert eine stetige spektrale Dichtefunktion f so folgt aus der Monotonie F von F :

$$f \geq 0$$

Da jede in der Form (2) darstellbare Funktion $K : G \rightarrow \mathbb{C}$ Kovarianzfunktion einer stationären Zufallsfolge ist, wenn F nur monoton ist, hat man eine einfache Methode um zu prüfen, ob eine beliebige, gegebene Zeitfunktion $K : G \rightarrow \mathbb{C}$ Kovarianzfunktion einer stationären Zufallsfolge ist. Erfüllt sie Bedingung (4), so prüft man die Nichtnegativität des aus (6) berechneten f .

Bem.(3) Aus (5) folgt für $s = 0$:

$$K(0) = \int_{-\pi}^{+\pi} f(\omega) d\omega$$

Daher kann man $f(\omega)d\omega$ als jenen Anteil der Gesamtvarianz deuten, der auf das Intervall (Frequenzband) $(\omega - \frac{d\omega}{2}, \omega + \frac{d\omega}{2})$ fällt.

2.3 Beispiele für spektrale Verteilungs- und Dichtefunktionen

Beispiel 1 Wir betrachten das weiße Rauschen vom 1. Beispiel des 1. Abschnittes.

Die Kovarianzfunktion $K(s) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{für } s = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

erfüllt wegen der Annahme $\sigma^2 < \infty$ die Bedingung (4).
Daher ist die Existenz der Spektraldichte sichergestellt.

$$(6) \text{ ergibt: } f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sigma^2 \quad (7)$$

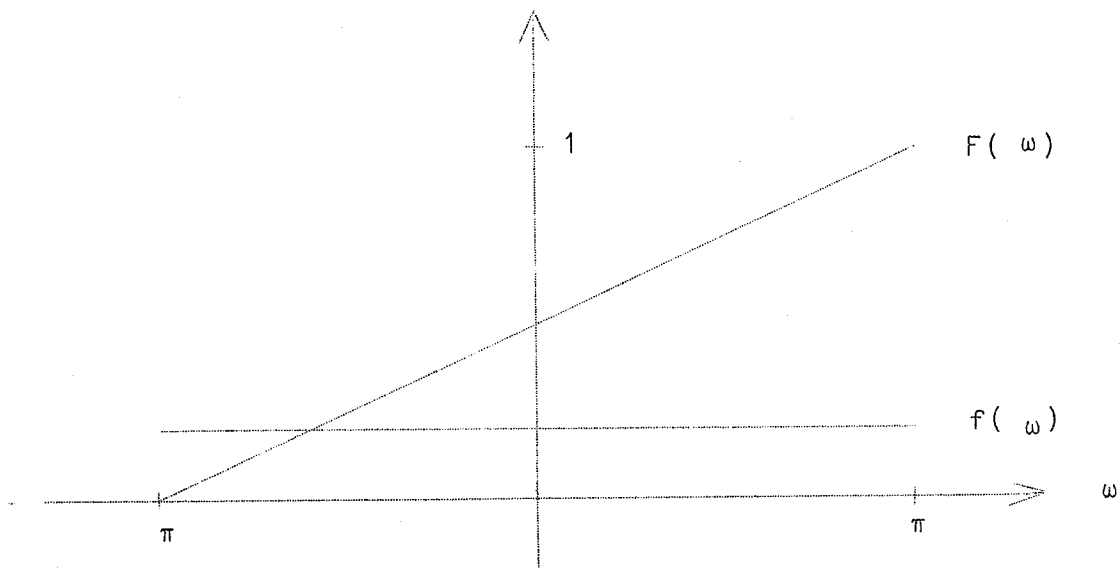
aus (3) erhält man:

$$F(\omega) = \int_{-\pi}^{\omega} \frac{1}{2\pi} \sigma^2 d\lambda = \frac{\omega}{2\pi} \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{2} \quad (8)$$

durch geeignete Normierung.

Weißes Rauschen ist also durch über das ganze Intervall $(-\pi, \pi)$ konstantes Spektrum charakterisiert.

Abb. 1 $f(\omega)$, $F(\omega)$ für weißes Rauschen mit $\sigma = 1$



Beispiel 2 $(X_t)_{t \in G}$ sei ein gleitender Mittelwert von weißem Rauschen $(Y_t)_{t \in G}$ der Bauart:

$$X_t = \frac{1}{2m+1} \sum_{i=-m}^{+m} Y_{t-i} ; K_{YY}(0) = 1 \quad (9)$$

Aus Beispiel 1.2 kennen wir die Kovarianzfunktion

$$K(s) = \begin{cases} \frac{2m+1-|s|}{2m+1} & \text{für } |s| \leq 2m+1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (1, 12)$$

Bedingung (4) ist wegen der Endlichkeit von m erfüllt; damit ist wiederum die Existenz der Spektraldichte f sichergestellt. (6) ergibt;

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-(2m)}^{2m} e^{-i\omega s} \frac{2m+1-|s|}{2m+1} = \quad (10) \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2m+1} \sum_{s=+m}^m \sum_{r=-m}^m e^{-i\omega s} e^{-i\omega r} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2m+1} \left(\sum_{s=-m}^m e^{i\omega s} \right)^2 = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2m+1} \cdot \\ &\cdot \left(e^{i\omega m} \frac{1-e^{+i\omega(2m+1)}}{1-e^{+i\omega}} \right)^2 = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2m+1} \left(\frac{\sin \omega \frac{2m+1}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} \right)^2 \end{aligned}$$

Beispiel 3 Wir betrachten nun wieder eine Folge von gleitenden Mittelwerten von weißem Rauschen, und zwar von folgender Bauart:

$$X_t = \sum_{i=0}^{\infty} a^i Y_{t-i}, \text{ wobei } K_{YY}(0) = 1, a \in \mathbb{R} \text{ und } |a| < 1 \quad (11)$$

gilt.

Die Bedingung $\sum_{i=0}^{\infty} |a^i| < \infty$ ist offenbar erfüllt, (11) definiert daher eine stationäre Zufallsfolge.

Die Kovarianzfunktion wird für $s \geq 0$ durch

$$K(s) = \sum_{i=s}^{\infty} a^i a^{i-s} = \sum_{l=0}^{\infty} a^l a^{l+s} = \sum_{l=0}^{\infty} a^{2l+s} = \frac{a^s}{1-a^2}$$

und für $s < 0$ durch $K(-s) = K(s)$ bestimmt, sodaß allgemein

$$K(s) = \frac{1}{1-a^2} a^{|s|} \quad (12)$$

gilt.

Bedingung (4) ist wieder erfüllt. Aus (6) folgt daher:

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} K(s) e^{-is\omega} = \frac{1}{2\pi(1-a^2)} \quad (13)$$

$$\cdot \left[\sum_{k=-\infty}^{-1} a^{-k} e^{-ik\omega} + \sum_{k=0}^{\infty} a^k e^{-ik\omega} \right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi(1+a^2-2a \cos \omega)}$$

Beispiel 4 $(X_t)_{t \in G}$ sei eine Zufallsfolge mit diskretem Spektrum, und zwar speziell die Folge (1.16) von Beispiel 1.4 mit $E\{z_1^2\} = c = 1$

Für die Kovarianzfunktion (1.17) schreiben wir die Spektraldarstellung (2)

$$K(s) = \cos \omega s = \int_{-\pi}^{+\pi} \cos \lambda s \, dF(\lambda) = \frac{1}{2} \cos(s(-\lambda)) + \frac{1}{2} \cos s \lambda$$

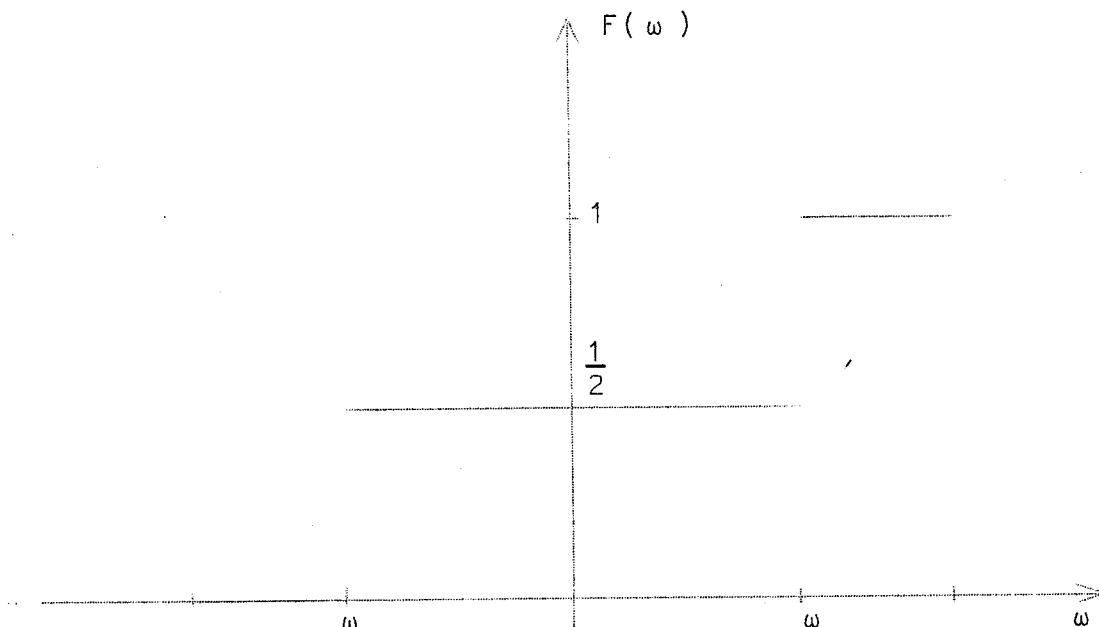
daher ist:

$$F(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\pi \leq \lambda < -\omega \\ \frac{1}{2} & \text{für } -\omega \leq \lambda < \omega \\ 1 & \text{für } \omega \leq \lambda \leq \pi \end{cases}$$

Abb. 2 Spektrale Verteilungsfunktion F der Folge

$$X_t = z_1 \cos \omega t + z_2 \sin \omega t$$

$$E\{z_1^2\} = 1, \quad E\{z_1 z_2\} = 0$$



Aus (14) sieht man, daß für F keine Darstellung der Form (3), also keine spektrale Dichtefunktion f existiert; das gilt allgemein für Folgen mit diskretem Spektrum.

2.4 Spektraldarstellung der Kovarianzmatrix

Satz 6

Für die Elemente der Kovarianzmatrix gilt $K_{ij}(s) = \overline{K_{ji}(-s)}$.
Weiters besitzt jedes Element, falls die mehrdimensionale
Zufallsfolge stationär ist, eine Spektraldarstellung der
Form

$$K_{ij}(s) = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i\omega s} dF_{ij}(\omega) \quad (15)$$

$F_{ij} : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{C}$ sind komplexwertige Funktionen beschränkter
Variation. Wir bezeichnen sie als Kreuzspektralfunktion und
die Matrix $\|F_{ij}\|$ als Spektralmatrix. Es gilt

$$F_{ij} = \overline{F_{ji}}$$

ohne Beweis.

Satz 7

Für beliebige ω und $\Delta\omega > 0$ ist die Matrix
 $\|\Delta F_{ij}(\omega)\| = \|F_{ij}(\omega + \Delta\omega) - F_{ij}(\omega)\|$ hermitesch und
nichtnegativ, d.h. für ihre Elemente gilt

$$\Delta F_{ij}(\omega) = \overline{\Delta F_{ji}(\omega)}; \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Delta F_{ij}(\omega) z_i \bar{z}_j \geq 0, \quad \forall z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$$

umgekehrt ist jede Matrix $\|F_{ij}\|$, die der obigen Bedingung
genügt, Spektralmatrix einer stationären Zufallsfolge
 $(X_t^{(1)} \dots X_t^{(n)})_{t \in G}$ ohne Beweis.

Def.6 Völlig analog zum eindimensionalen Fall gilt wieder:
Kann man jedes Element der Spektralmatrix in der Form

$$F_{ij}(\omega) = \int_{-\pi}^{\omega} f_{ij}(\omega) d\omega$$

darstellen, so spricht man von der Existenz einer spektralen Dichtefunktion f_{ij} .

Bem. Für die Matrix der Spektraldichten einer mehrdimensionalen Zufallsfolge gilt immer:

$$f_{ij}(\omega) = \overline{f_{ji}(\omega)} ; \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{ij}(\omega) z_i \overline{z_j} \geq 0$$

$$\forall \omega \in (-\pi, \pi) \quad \forall z_1 \dots z_n \in \mathbb{C}$$

Beispiel 5 Nun betrachten wir die zweidimensionale Zufallsfolge (1,24) von Beispiel 1.6

Aus dem Vergleich der Kovarianzfunktionen (1,25) mit ihren spektralen Darstellungen (15) erhalten wir wieder die spektralen Verteilungsfunktionen.

$$K_{11}(s) = \sum_{k=1}^n e^{i \omega_k s} E\{|X_k^{(1)}|^2\} = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i \omega s} dF_{11}(\omega)$$

$$F_{11}(\omega) = \frac{1}{\sum_{k=1}^n E\{|X_k^{(1)}|^2\}} \sum_{k: \omega_k \leq \omega} E\{|X_k^{(1)}|^2\}$$

analog:

$$F_{22}(\omega) = \frac{1}{\sum_{k=1}^n E\{|X_k^{(2)}|^2\}} \quad k: \omega_k \leq \omega \quad E\{|X_k^{(2)}|^2\}$$

$$K_{12} = 0 \quad ; \quad F_{12} = 0$$

$$K_{21} = 0 \quad ; \quad F_{21} = 0$$

3. SPEKTRALDARSTELLUNG STATIONÄRER ZUFALLSFOLGEN

Def.1 Eine Familie $(Z_t)_{t \in T}$, $T \subset \mathbb{R}$ von Zufallsvariablen $Z_t : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ bezeichnen wir als Zufallsprozeß.

Bem. Eine Zufallsfolge ist also ein spezieller Zufallsprozeß mit $T = \mathbb{G}$

Def.2 Ein Zufallsprozeß $(Z_t)_{t \in T}$ heißt Prozeß mit orthogonalen Zuwächsen, wenn gilt:

$$(a) \quad E\{|Z_t - Z_s|^2\} < \infty \quad \forall s, t \in T$$

$$(b) \quad s_1, t_1, s_2, t_2 \in T \wedge s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2 \implies E\{(Z_{t_2} - Z_{s_2})(\overline{Z_{t_1} - Z_{s_1}})\} = 0$$

Satz 1

Ist $(Z_t)_{t \in T}$ ein Prozeß mit orthogonalen Zuwächsen, dann existiert eine Funktion $F : T \rightarrow \mathbb{R}$, sodaß

$$E\{|Z_t - Z_s|^2\} = F(t) - F(s) \quad s < t \quad (1)$$

gilt. F ist monoton nicht fallend und bis auf eine additive Konstante bestimmt.

Bew. Aus Def.2(b) und $s_1 < t_1 = s_2 < t_2 \implies E\{|Z_{t_2} - Z_{s_1}|^2\} =$

$$= E\{|Z_{t_2} - Z_{t_1}|^2\} + E\{|Z_{t_1} - Z_{s_1}|^2\} \quad \forall s_1, t_1, t_2 \in T \quad (1)$$

$$\implies F(t) - F(s) = E\{|Z_t - Z_s|^2\}$$

Die Eindeutigkeit bis auf eine additive Konstante folgt aus Def.2(a), die Monotonität folgt unmittelbar aus (1).

Nun werden wir ein Integral der Form

$$Y = \int_a^b f(t) dZ_t$$

definieren, wobei Y eine Zufallsvariable und $(Z_t)_{t \in T}$ ein Zufallsprozeß ist.

Def.3 Es sei $(Z_t)_{t \in T}$ ein Zufallsprozeß mit orthogonalen Zuwächsen, dessen Indexmenge T ein endliches, abgeschlossenes Intervall $(a,b) \subset \mathbb{R}$ ist; und es sei die Funktion $f : (a,b) \rightarrow \mathbb{C}$ in (a,b) stetig.

Weiters sei

$$\begin{aligned} \text{Zer}_N(a,b) &= \{ a = t_1, t_2, \dots, t_{n+1} = \\ &= b ; t_j < t_{j+1} \wedge t_j \leq t_j^! \leq t_{j+1}; j = 1 \dots n \} \end{aligned}$$

eine Zerlegung des Intervalles und $\delta = \max_j (t_{j+1} - t_j)$, sodaß die Punkte $t_j, j = 2 \dots n$ Stetigkeitspunkte von $F : (a,b) \rightarrow \mathbb{R} : F(t) = E \{ |Z_t - Z_a|^2 \}$ sind, und sodaß, wenn a oder b Sprungstellen von F sind, Z_a durch Z_{a-} und Z_b durch Z_{b+} ersetzt wird.

Dann definieren wir das stochastische Integral als:

$$\int_a^b f(t) dZ_t = \int_a^b f(t) dZ(t) := \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} f(t_j^!) (Z_{t_{j+1}} - Z_{t_j})$$

Dieser Grenzwert ist unabhängig von der speziellen Wahl der Zerlegung.

Satz 2

Für bel. $a_i \in C$ gilt für das stochastische Integral

$$\sum_{i=1}^n a_i \int_a^b f_i(t) dZ(t) = \int_a^b \sum_{i=1}^n a_i f_i(t) dZ(t)$$

ohne Beweis.

Satz 3

Für das stochastische Integral gilt

$$\int_a^b \int_a^b |f(t) - f_n(t)|^2 dF(t) = E \left\{ \left| \int_a^b f(t) dZ(t) - \int_a^b f_n(t) dZ(t) \right|^2 \right\}$$

daher konvergiert die Folge stochastischer Integrale

$$\int_a^b f_n(t) dZ(t) \text{ im Mittel gegen } \int_a^b f(t) dZ(t) \text{ genau dann,}$$

wenn die Integranden im Mittel gegen $f(t)$ (mit $dF(t)$ gewichtet) konvergieren.

Weiters gilt:

$$\text{aus } X_i = \int_a^b f_i(t) dZ(t) \quad i = 1, 2$$

$$\text{folgt } E X_i \bar{X}_j = \int_a^b f_i(t) \bar{f}_j(t) dF(t)$$

Satz 4

(Satz von der spektralen Darstellung einer stationären Zufallsfolge). Jede stationäre Zufallsfolge $(X_t)_{t \in G}$ hat eine spektrale Darstellung der Form:

$$X_t = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i\omega t} dZ(\omega) \quad t \in G \quad (2)$$

wobei $(Z_\omega)_{\omega \in (-\pi, \pi)} = (Z(\omega))_{\omega \in (-\pi, \pi)}$ ein Prozeß mit orthogonalen Zuwächsen ist.

Satz 5

Erweitert man das stochastische Integral auf mehrdimensionale Zufallsvariable, so gilt analog zu Satz 4: Jede mehrdimensionale stationäre Zufallsfolge $(X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(n)})_{t \in G}$ hat eine Spektraldarstellung der Form

$$\begin{pmatrix} X_t^{(1)} \\ \dots \\ X_t^{(n)} \end{pmatrix} = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i\omega t} d \begin{pmatrix} Z^{(1)}(\omega) \\ \dots \\ Z^{(n)}(\omega) \end{pmatrix}$$

Wobei $(Z^{(1)}(\omega), \dots, Z^{(n)}(\omega))_{\omega \in (-\pi, \pi)}$ ein Prozeß mit orthogonalen Zuwächsen ist (dieser ist genau so wie im eindimensionalen Fall definiert).

Aus der Stationaritätsbedingung folgt:

$$\begin{aligned} \omega_1 < \omega_2 \leq \omega_3 < \omega_4 \implies E \{ (Z^{(i)}(\omega_2) - Z^{(i)}(\omega_1)) \cdot \\ \cdot \overline{(Z^{(j)}(\omega_4) - Z^{(j)}(\omega_3))} \} = 0 \\ i, j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

F_{ij} ergibt sich aus

$$\begin{aligned} F_{ij}(\omega + \Delta\omega) - F_{ij}(\omega) = E \{ (Z_i(\omega + \Delta\omega) - Z_i(\omega)) \cdot \\ \cdot \overline{(Z_j(\omega + \Delta\omega) - Z_j(\omega))} \} \end{aligned}$$

4. ERGODENSÄTZE

In vielen Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung hat man es mit Versuchen zu tun, die oft wiederholt werden. Als Schätzwert z.B. für den Mittelwert dient dann das arithmetische Mittel der Realisierungen. Bei Zufallsfolgen hat man aber oft, z.B. bei ökonomischen Anwendungen, nur eine Realisierung zur Verfügung. Dadurch wird der Erwartungswert eine nicht operationale Definition. Es ist intuitiv plausibel, dass man im Falle der Stationarität die Mittelung über den Merkmalsraum durch die Mittelung über die Zeit ersetzen kann. Die Ergodensätze geben nun die genauen Voraussetzungen an, unter denen dies zulässig ist. Wir behandeln zwei Ergodensätze: Einer bezieht sich auf den Mittelwert der Folge, der andere auf die Kovarianzfunktion.

In diesem Abschnitt gehen wir von der Voraussetzung $E\{X_t\} = 0$ ab. Es ist unmittelbar einsichtig, daß dadurch die Spektraldarstellung (3.2)

$$X_t - \mu = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i \omega t} dZ_{\mu}(\omega) \quad (1a)$$

zu

$$X_t = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i \omega t} dZ(\omega) \quad (1)$$

wird, sonst aber alles gleich bleibt.

Dabei gilt:

$$Z_{\mu}(\omega) = \begin{cases} Z(\omega) & \text{für } \omega < 0 \\ Z(\omega) - \mu & \text{für } \omega \geq 0 \end{cases}$$

also $(Z_{\mu}(\omega))_{\omega \in (-\pi, \pi)}$ und $(Z(\omega))_{\omega \in (-\pi, \pi)}$ unterscheiden sich nur um einen Sprung von der Größe μ bei $\omega = 0$.

Satz 1

Es sei $(X_t)_{t \in \mathbb{G}}$ eine stationäre Zufallsfolge mit Spektral-
darstellung (1) und mit

$$E \{ |dZ(\omega)|^2 \} = dF(\omega), \quad E \{ |dZ_{\mu}(\omega)|^2 \} = dF_{\mu}(\omega)$$

dann gilt:

$$\lim_{n-m \rightarrow \infty} \frac{1}{n-m+1} \sum_{t=m}^n X_t = Z(0) - Z(0-) \quad (2)$$

und

$$\lim_{n-m \rightarrow \infty} \frac{1}{n-m+1} \sum_{s=m}^n K(s) = E \{ |Z(0) - Z(0-)|^2 \} = \quad (3)$$

$$= F(0) - F(0-)$$

Bew. Durch Einsetzen in (1) erhält man

$$\begin{aligned} \frac{1}{n-m+1} \sum_{t=m}^n X_t &= \frac{1}{n-m+1} \sum_{t=m}^n \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i\omega t} dZ(\omega) = \\ &= \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{n-m+1} \sum_{t=m}^n e^{i\omega t} dZ(\omega) = \\ &= \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{i\omega m}}{n-m+1} \cdot \frac{1 - e^{i\omega(n-m+1)}}{1 - e^{i\omega}} dZ(\omega) \end{aligned}$$

und analog

$$\frac{1}{n-m+1} \sum_{s=m}^n K(s) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{i\omega m}}{n-m+1} \cdot \frac{1 - e^{i\omega(n-m+1)}}{1 - e^{i\omega}} dF(\omega)$$

für den Integranden gilt:

$$J_{n-m+1} = \frac{e^{i\omega}}{n-m+1} \cdot \frac{e^{i\omega \frac{1}{2}(n-m+1)} (e^{-i\omega \frac{1}{2}(n-m+1)} - e^{i\omega \frac{1}{2}(n-m+1)})}{e^{i\frac{1}{2}\omega} (e^{-i\frac{1}{2}\omega} - e^{i\frac{1}{2}\omega})} =$$

$$= \frac{e^{i\omega \frac{1}{2}(n+m)}}{n-m+1} \cdot \frac{\sin \omega \frac{n-m+1}{2}}{\sin \frac{1}{2}\omega}$$

$$|J_{n-m+1}(\omega)| = \frac{1}{n-m+1} \cdot \left| \frac{\sin \omega \frac{n-m+1}{2}}{\sin \frac{1}{2}\omega} \right| \leq 1$$

und weiter:

$$\lim_{n-m \rightarrow \infty} |J_{n-m+1}(\omega)| = \begin{cases} 1 & \text{für } \omega = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = \kappa(\omega)$$

Da hier beschränkte Konvergenz vorliegt, kann man Limes und Integral vertauschen. Aus Satz 3,3 und $J_{n-m+1} \rightarrow \kappa$ folgt:

$$\lim_{n-m \rightarrow \infty} \frac{1}{n-m+1} \sum_{t=m}^n (X_t - \mu) = \int_{-\pi}^{+\pi} \kappa(\omega) dZ(\omega) = Z(0) - Z(0-)$$

Ebenfalls wegen der beschränkten Konvergenz gilt:

$$\lim_{n-m \rightarrow \infty} \frac{1}{n-m+1} \sum_{s=m}^n K(s) = \int_{-\pi}^{+\pi} \kappa(\omega) dF(\omega) = F(0) - F(0-)$$

Bem.(1) Satz 1 kann man verbal wie folgt formulieren:
Ist $(X_t)_{t \in G}$ eine stationäre Zufallsfolge, so konvergiert das Zeitmittel im Mittel gegen die Summe aus $E\{X_t\} = \mu$ und einer Zufallsvariablen $Z(0) - Z(0-)$, die die Varianz $F_\mu(0) - F_\mu(0-)$ besitzt.

Ist also $Z_\mu(0) - Z_\mu(0-) = 0$, was genau dann der Fall ist, wenn F_μ an der Stelle 0 stetig ist, dann konvergiert das Zeitmittel gegen den Mittelwert μ .

Bem.(2) Aus Satz 1 und Bem.(1) sehen wir, wenn $(X_t - \mu)$ die zentrierte Folge ist,

$$\begin{aligned}
 Z_\mu(0) = Z_\mu(0-) &\iff (F_\mu(0) = F_\mu(0-)) \iff \\
 &\iff \underbrace{\left(\lim_{n-m \rightarrow \infty} \frac{1}{n-m+1} \sum_{s=m}^n K(s) = \mu^2 \right)}_{(4)} \iff \\
 &\iff \underbrace{1.i.m. \lim_{n-m \rightarrow \infty} \frac{1}{n-m+1} \sum_{t=m}^n X_t = \mu}_{\text{(mit Wahrscheinlichkeit 1)}}
 \end{aligned}$$

Der unterstrichene Teil obiger Relation ist ebenfalls eine sehr gebräuchliche Formulierung des Ergodensatzes.

Bem.(3) Ist F absolut stetig, so ist F nach Satz 2,4 sicher im ganzen Intervall $(-\pi, \pi)$ stetig, also gilt für Zufallsfolgen, für die die spektrale Dichtefunktion f existiert, immer Beziehung (4) mit $\mu = 0$.

Auch für Zufallsfolgen von Bauart (1,18) (Beispiel 1,5) gilt (4) wegen

$$K(s) = \sum_{k=1}^N b_k e^{i \omega_k s} \quad \text{und}$$

$$\lim_{n-m \rightarrow \infty} \frac{1}{n-m+1} \sum_{s=m}^n \sum_{k=1}^N b_k e^{i \omega_k s} = 0$$

Satz 2

Es sei $(X_t)_{t \in G}$ eine zentrierte stationäre Zufallsfolge. Wir definieren nun eine neue Zufallsfolge $(Y_t)_{t \in G}$ durch: $Y_t = X_{t+u} \overline{X_t}$, wobei u eine feste ganze Zahl ist. Im allgemeinen wird diese Folge nicht zentriert sein. Ist nun:

$$L(s) = E \{ X_{t+u+s} \overline{X_{t+s}} \overline{X_{t+u} X_t} \}$$

unabhängig von $t \quad \forall s \in G$, dann existiert der Grenzwert

$$\text{l.i.m.}_{n-m \rightarrow \infty} \frac{1}{n-m+1} \sum_{t=m}^n X_{t+u} \overline{X_t} \quad (5)$$

Dieser Grenzwert ist gleich $K(u)$ (mit Wahrscheinlichkeit 1) genau dann, wenn

$$\lim_{n-m \rightarrow \infty} \frac{1}{n-m+1} \sum_{s=m}^n E \{ X_{s+u} \overline{X_s} \overline{X_u X_0} \} = |K(u)|^2$$

gilt.

Bew. Es gilt $E\{Y_t\} = E\{X_{t+u} \bar{X}_t\} = K(u) \quad \forall t \in G$

Deshalb ist die Folge $(Y_t - K(u))_{t \in G}$ stationär und zentriert. Auf diese Folge wenden wir nun Satz 1 an: Aus diesem folgt die Existenz des Grenzwertes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n-m+1} \sum_{t=m}^n (Y_t - K(u)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n-m+1} \sum_{t=m}^n (X_{t+u} \bar{X}_t - K(u))$$

Dieser Grenzwert gleicht der Nullzufallsvariablen genau dann (Satz 1, Bem.(2)), wenn gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n-m \rightarrow \infty} \frac{1}{n-m+1} \sum_{s=m}^n E \{ (Y_s - K(u)) \overline{(Y_0 - K(u))} \} &= \\ = \lim_{n-m \rightarrow \infty} \frac{1}{n-m+1} \sum_{s=m}^n L(s) - |K(u)|^2 &= 0 \end{aligned}$$

Bem. Wie man aus (4) und (5) sieht, erlauben die Ergodensätze Aussagen über die Konsistenz der Schätzfunktionen

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n-m+1} \sum_{t=m}^n X_t \quad \text{und} \quad \hat{K}(s) = \frac{1}{n-m+1} \sum_{t=m}^n X_{t+s} \bar{X}_t$$

5. ANWENDUNG LINEARER OPERATOREN AUF STATIONÄRE ZUFALLSFOLGEN

Def.1 Es sei $(X_t)_{t \in G}$ eine stationäre Zufallsfolge. Unter einem linearen, endlichen, diskreten Operator verstehen wir eine Funktion, die $n-m+1$ Zufallsvariablen der Zufallsfolge $(X_t)_{t \in G}$ eine neue Zufallsvariable Y_t wie folgt zuordnet.

$$Y_t = \sum_{j=m}^n a_j X_{t-j} \quad a_j \in \mathbb{C} \quad \forall t \in G \quad (1)$$

Eine Vorrichtung, die einen derartigen Operator realisiert, nennen wir ein lineares digitales Filter. $(X_t)_{t \in G}$ nennen wir Eingang, $(Y_t)_{t \in G}$ Ausgang.

Satz 1

Ist $(X_t)_{t \in G}$ eine stationäre Zufallsfolge, so ist auch die zweidimensionale Zufallsfolge $(X_t, Y_t)_{t \in G}$ stationär.

Bew. Daß $(Y_t)_{t \in G}$ stationär ist, ist leicht zu sehen, denn

$$\begin{aligned} K_{YY}(s) &= E\{Y_{t+s} \bar{Y}_t\} = E\left\{ \sum_{j=m}^n a_j X_{t+s-j} \cdot \sum_{i=m}^n \bar{a}_i \bar{X}_{t-i} \right\} = \\ &= \sum_{j=m}^n \sum_{i=m}^n a_j \bar{a}_i K(s+i-j) \end{aligned}$$

ist nur eine Funktion von s .

Weiters gilt:

$$K_{YX}(s) = E\{Y_{t+s}, \bar{X}_t\} = E\left\{\sum_{j=m}^n a_j X_{t+s-j}, \bar{X}_t\right\} = \sum_{j=m}^n a_j K(s-j)$$

ist nur eine Funktion von s .

Die vollständige Beschreibung eines derartigen Filters kann auf zwei Arten, durch Gewichtsfunktion oder durch Übertragungsfunktion geschehen.

Def.2 Die durch

$$g(t) = \begin{cases} a_t & \text{für } m \leq t \leq n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

bestimmte Funktion nennen wir Gewichtsfunktion, ihre Fouriertransformierte

$$\gamma(\omega) = \sum_{j=m}^n a_j e^{-i\omega j}$$

nennen wir Übertragungsfunktion.

Bem. Wie man sofort sieht, erhält man die Gewichtsfunktion als Ausgang, wenn der Eingang die Form

$$X_t = \begin{cases} 1 & \text{für } t=0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

besitzt, die Übertragungsfunktion ergibt sich als Quotient von Aus- und Eingang, wenn der Eingang von der Gestalt $e^{i\omega t}$ ist.

Satz 2

Ist der stationäre Prozeß $(X_t)_{t \in G}$ Eingang und ist $(Y_t)_{t \in G}$ Ausgang eines linearen digitalen Filters mit Übertragungsfunktion γ , so gilt:

$$Y_t = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i\omega t} \gamma(\omega) dZ_{XX}(\omega)$$

und

$$F_{YY}(\omega) = \int_{-\pi}^{\omega} |\gamma(\lambda)|^2 dF_{XX}(\lambda)$$

$$F_{YX}(\omega) = \int_{\pi}^{\omega} \gamma(\lambda) dF_{XX}(\lambda)$$

Existieren die spektralen Dichtefunktionen, so gilt:

$$\gamma(\omega) = \frac{f_{YX}(\omega)}{f_{XX}(\omega)}$$

Bew. Aus der spektralen Darstellung von X_t folgt:

$$\begin{aligned} Y_t &= \sum_{j=m}^n a_j X_{t-j} = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{j=-m}^n a_j e^{-i\omega j} \right) e^{i\omega t} dZ_{XX}(\omega) = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega t} \gamma(\omega) dZ_{XX}(\omega) \end{aligned}$$

Für die Kovarianzfunktionen gilt dann weiter:

$$K_{YY}(s) = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i\omega s} |\gamma(\omega)|^2 dF_{XX}$$

und

$$K_{YX}(s) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega s} \gamma(\omega) dF_{XX}$$

Aus (2,15) folgt dann der Rest von Satz 2.

6. BEISPIEL EINES SCHÄTZVERFAHRENS FÜR SPEKTRALDICHTEN

6.1 Heuristische Diskussion

Die naheliegende Idee, die Fouriertransformierte der Funktion

$$\hat{K}(s) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-s} X_{t+s} X_t \quad \text{als Schätzfunktion für die spektrale}$$

Dichtefunktion zu verwenden, ist insofern nicht angebracht, als die Schätzungen nicht konsistent sind (s. 4). Durch geeignete Mittelungsverfahren (Anwendung eines linearen Filters) gelingt es aber, konsistente Schätzgrößen zu konstruieren.

Das im folgenden behandelte Verfahren der komplexen Demodulation ist ein Beispiel für diese Vorgangsweise.

Wir benützen die in Satz 3.4 gezeigte Möglichkeit und schreiben die stationäre Zufallsfolge X_t :

$$X_t = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega t} dZ(\omega) \quad (1)$$

Nun bilden wir die "komplexe Demodulierte"

$$D_t(\lambda) = \mathcal{L}(X_t e^{-i\lambda t}) = \sum_{j=-m}^m b_j X_{t-j} e^{-i\lambda(t-j)} \quad (2)$$

wobei \mathcal{L} einen linearen Operator (Tiefpaßfilter) im Sinne des Kapitels 5 darstellt.

Einsetzen von (1) liefert

$$\begin{aligned}
 D_t(\lambda) &= \sum_{j=-m}^m b_j e^{-i\lambda(t-j)} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega(t-j)} dZ(\omega) = & (3) \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\omega-\lambda)t} \sum_{j=-m}^m b_j e^{-i(\omega-\lambda)j} dZ(\omega) = \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\omega-\lambda)t} \gamma(\omega-\lambda) dZ(\omega)
 \end{aligned}$$

Mit $\gamma(\omega) = \sum_{j=-m}^m b_j e^{-i\omega j}$ bezeichnen wir die Übertragungsfunktion des Filters.

Bilden wir nun den Erwartungswert des Betragsquadrates der Demodulierten

$$\begin{aligned}
 E \{ D_t(\lambda) \overline{D_t(\lambda)} \} &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\omega-\lambda-u+\lambda)t} \gamma(\omega-\lambda) \overline{\gamma(u-\lambda)} \cdot \\
 &\quad \cdot E \{ dZ(\omega) \overline{dZ(u)} \}
 \end{aligned}$$

so folgt aus den Eigenschaften von $Z(\omega)$ (siehe Kap. 3)

$$E | D_t(\lambda) |^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |\gamma(\omega-\lambda)|^2 dF(\omega) \quad (4)$$

$F(\omega)$ ist die spektrale Verteilungsfunktion unserer ursprünglichen Folge.

Wir sehen also, daß uns bei geeignet vorgegebenem Filter die Mittelung der Betragsquadrate der Demodulierten eine Schätzung der spektralen Verteilungsfunktion bzw. der spektralen Dichte abgeben müßte.

Betrachten wir noch für $\lambda_1 \neq \lambda_2$ die Kovarianz

$$E (D_t(\lambda_1) \overline{D}_t(\lambda_2)) = e^{i(\lambda_1 - \lambda_2)t} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \gamma(\omega - \lambda_1) \cdot \gamma(\omega - \lambda_2) dF(\omega) \quad (5)$$

so sehen wir, daß abhängig von den Eigenschaften des Filters die Demodulierten verschiedener Frequenzen kovariieren werden, und zwar kann der Faktor $e^{i(\lambda_2 - \lambda_1)t}$ eine Art Schwebungseffekt verursachen, was wegen der Nichtlinearität der Prozedur ja auch zu erwarten war. Jedoch kann für geeignet gewählte Übertragungsfunktionen Unkorreliertheit erreicht werden.

Entsprechend (4) verwenden wir als Schätzfunktion für den Wert der spektralen Dichtefunktion $f(\lambda)$ den Ausdruck

$$\hat{f}_N(\lambda) = \frac{1}{(N-2m)} \sum_{t=m+1}^{N-m} |D_t(\lambda)|^2 \quad (6)$$

Mit N bezeichnen wir die Länge der vorgegebenen Realisierung der Folge X_t ; $2m+1$ ist die Gesamtlänge des verwendeten Filters. Im folgenden beweisen wir die Konsistenz dieser Schätzgröße.

6.2 Asymptotische Eigenschaften der Schätzung mittels

komplexer Demodulierter

Def.1 Es sei $(X_t)_{t \in G}$ eine stationäre reelle Zufallsfolge. Eine lineare Transformation der Folge $(X_t e^{-i\lambda t})_{t \in G}$ der Form

$$D_t(\lambda) = \sum_{j=-m}^m b_j (X_{t-j} e^{-i(t-j)\lambda})$$

heißt komplexe Demodulierte zur Frequenz λ , wenn die b_j so gewählt werden, daß die Übertragungsfunktion

$$\gamma_m(\omega) = \sum_{j=-m}^m b_j e^{-i\omega j} \quad \text{nur in einer Umgebung von Null}$$

wesentlich von Null verschieden ist (Tiefpaßfilter).

Bem.(1) Um die Rechnung zu vereinfachen, beschränken wir uns auf reelle und symmetrische Filter, d.h.: $b_{-j} = b_j, b_j \in \mathbb{R}$ daher ist γ reell und gerade.

Bem.(2) Wie unmittelbar aus der Definition folgt, ist γ periodisch mit 2π

Satz 1

Unter den Annahmen:

- (a) $(X_t)_{t \in G}$ sei stationär und besitze eine stetige Spektraldichte f
- (b) Die Übertragungsfunktion γ habe folgende Eigenschaften:

$$b\ 1 \quad \int_{-\pi}^{+\pi} |\gamma_m(\omega)|^2 d\omega = 1 \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

$$b\ 2 \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{|\omega| < \epsilon} |\gamma_m(\omega)|^2 d\omega = 1 \quad \forall \epsilon > 0$$

$$b\ 3 \quad \lim_{m \rightarrow \infty} |\gamma_m(\omega)|^2 = 0 \text{ gleichm\u00e4\u00dfig f\u00fcr alle } \omega \\ \forall 0 < \epsilon \leq |\omega| \leq \pi$$

liefert der Ausdruck

$$\hat{f}_N(\lambda) = \frac{1}{N-2m} \sum_{t=m+1}^{N-m} \sum_{j=-m}^m \sum_{l=-m}^m b_j b_l X_{t-j} X_{t-l} e^{-i\lambda(1-j)}$$

eine asymptotisch erwartungstreue Sch\u00e4tzfunktion f\u00fcr die Spektraldichte $f(\lambda)$

Satz 2

Unter den Voraussetzungen von Satz 1 sowie unter den zus\u00e4tzlichen Voraussetzungen:

(c) $(X_t)_{t \in \mathbb{G}}$ ist ein reeller Gau\u00dfproze\u00df, d.h. alle endlich dimensionalen Verteilungen sind Gau\u00df-Verteilungen.

b 4 Es sei

$$\int_{-\pi}^{+\pi} (\gamma_m(\omega))^4 d\omega < \infty \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

b 5 Es existiere zu jedem $\epsilon > 0$ ein L_0 , soda\u00df f\u00fcr $L > L_0$, $A < L$ gilt:

$$\sup_{|u| \leq \frac{\pi A}{L}} \left| \frac{\int_{-\pi}^{+\pi} \gamma_m^2(\omega) \gamma_m^2(\omega+u) d\omega}{\int_{-\pi}^{+\pi} \gamma_m^4(\omega) d\omega} - 1 \right| < \epsilon$$

folgt:

$$\text{Var} \{ \hat{f}_N(\lambda) \} = \begin{cases} \frac{2\pi f^2(\lambda)}{N-2m} \int_{-\pi}^{+\pi} \gamma_m^4(\omega) d\omega + o\left(\frac{1}{N-2m} \int_{-\pi}^{+\pi} \gamma_m^4(\omega) d\omega\right) & \text{für } \lambda \neq 0 \\ \frac{4\pi f^2(0)}{N-2m} \int_{-\pi}^{+\pi} \gamma_m^4(\omega) d\omega + o\left(\frac{1}{N-2m} \int_{-\pi}^{+\pi} \gamma_m^4(\omega) d\omega\right) & \text{für } \lambda = 0 \end{cases}$$

Korollar: Beispielsweise ist für

$$\gamma_m(\omega) = \sqrt{\frac{3(2m+1)^3}{2\pi(2(2m+1)^2 + 1)} \left(\frac{\sin \frac{(2m+1)\omega}{2}}{(2m+1)\sin \frac{\omega}{2}} \right)^2}$$

$\hat{f}_N(\lambda)$ asymptotisch erwartungstreu.

Bem. Wird aus einer Zeitreihe $(X_t)_{t \in G}$ durch Bildung von gleitenden Mittelwerten der Form

$$Y_t = \sum_{j=-m}^m \frac{1}{2m+1} X_{t+j}$$

eine neue Zeitreihe $(Y_t)_{t \in G}$ erzeugt, und wird auf diese noch einmal dieselbe Operation angewendet, so erhält man als Übertragungsfunktion des gesamten Vorgangs eine Funktion der Form

$$\left(\frac{\sin \frac{(2m+1)\omega}{2}}{(2m+1)\sin \frac{\omega}{2}} \right)^2 \cdot C$$

Der oben unter der Wurzel auftretende Ausdruck entsteht durch Einsnormierung von γ .

Bew. zu Satz 1

$$E \hat{f}_N(\lambda) = \frac{1}{N-2m} \sum_{t=m+1}^{N-m} \sum_{j=-m}^m \sum_{l=-m}^m b_j b_l e^{-i\lambda(1-j)K(1-j)}$$

unter Benutzung der Spektraldarstellung von K (2,5) schreiben wir:

$$\begin{aligned} E \hat{f}_N(\lambda) &= \int_{-\pi}^{+\pi} \sum_{j=-m}^m \sum_{l=-m}^m b_j b_l e^{-i(\lambda-\omega)(1-j)} f(\omega) d\omega = \\ &= \int_{-\pi}^{+\pi} \gamma_m^2(\lambda-\omega) f(\omega) d\omega \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\pi}^{+\pi} (f(\omega) - f(\lambda)) \gamma_m^2(\lambda-\omega) d\omega \right| &\leq \left| \int_{|\lambda-\omega| < \epsilon} (f(\omega) - f(\lambda)) \cdot \right. \\ &\cdot \gamma_m^2(\lambda-\omega) d\omega \left. \right| + \left| \int_{\epsilon \leq |\lambda-\omega| \leq \pi} (f(\omega) - f(\lambda)) \gamma_m^2(\lambda-\omega) d\omega \right| \end{aligned}$$

Wenn m gegen unendlich geht, so kann der erste Term der rechten Seite wegen der Stetigkeit von f(ω) und b₂ beliebig klein gemacht werden. Dasselbe gilt wegen der Beschränktheit von f(ω) (f ist in (-π, π) stetig) und b₃ für den zweiten Term. Benutzen wir noch b₁, so erlangen wir das gewünschte Resultat.

Bew. zu Satz 2

Die Annahme (c) impliziert (s. /4/ Kap.9):

$$\begin{aligned} E \{X_{a-b} X_{a-c} X_{d-e} X_{d-f}\} &= E \{X_{a-b} X_{a-c}\} E \{X_{d-e} X_{d-f}\} + \\ &+ E \{X_{a-b} X_{d-e}\} E \{X_{a-c} X_{d-f}\} + E \{X_{a-b} X_{d-f}\} E \{X_{a-c} X_{d-e}\} \end{aligned}$$

Für die Varianz der Schätzfunktion können wir nun schreiben:

$$\begin{aligned} \text{Var} (\hat{f}_N(\lambda)) &= E \{ \hat{f}_N(\lambda) \}^2 - (E \hat{f}_N(\lambda))^2 = \\ &= \frac{1}{(N-2m)^2} \sum_{t_1, t_2, j_1, j_2, l_1, l_2} b_{j_1} b_{l_1} b_{j_2} b_{l_2} \cdot \\ &\cdot e^{-i\lambda(l_1+l_2-j_1-j_2)} \cdot \{ K(t_1-t_2+j_2-j_1) \cdot \\ &\cdot K(t_1-t_2+l_2-l_1) + K(t_1-t_2+l_2-j_1) \cdot K(t_1-t_2+j_2-l_1) \} \end{aligned}$$

Führen wir nun wieder die Spektraldarstellung der Kovarianzfunktion und die Übertragungsfunktion des Filters ein, so erhalten wir nach etwas langwierigeren Umformungen mit der Abkürzung $L = N-2m$

$$\begin{aligned} \text{Var} (\hat{f}_N(\lambda)) &= \frac{1}{2L^2} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(u) \cdot f(v) \left(\frac{\sin \frac{L(u-v)}{2}}{\sin \frac{(u-v)}{2}} \right)^2 \cdot \\ &\cdot \{ \gamma_m(u+\lambda) \gamma_m(v+\lambda) + \gamma_m(u-\lambda) \gamma_m(v-\lambda) \}^2 du dv \end{aligned}$$

Diesen Ausdruck spalten wir in 3 Integrale auf:

$$I_1(\lambda) = \frac{1}{2L^2} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(u) f(v) \left(\frac{\sin \frac{L}{2}(u-v)}{\sin \frac{1}{2}(u-v)} \right)^2 \gamma_m^2(u+\lambda) \gamma_m^2(v+\lambda) du dv$$

$$\begin{aligned} I_2(\lambda) &= \frac{1}{2L^2} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(u) f(v) \left(\frac{\sin \frac{L}{2}(u-v)}{\sin \frac{1}{2}(u-v)} \right)^2 \gamma_m(u+\lambda) \gamma_m(v+\lambda) \cdot \\ &\cdot \gamma_m(u-\lambda) \gamma_m(v-\lambda) du dv \end{aligned}$$

$$I_3(\lambda) = \frac{1}{2L^2} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(u) f(v) \left(\frac{\sin \frac{L}{2}(u-v)}{\sin \frac{1}{2}(u-v)} \right)^2 \gamma_m^2(u-\lambda) \gamma_m^2(v-\lambda) du dv$$

I_1 und I_3 stimmen bis auf das Vorzeichen von λ überein.
 Im folgenden betrachten wir nur I_1 und I_2 . Weiters bemerken wir noch, daß für $\lambda = 0$ gilt.

$$\text{Var} (\hat{f}_N(0)) = 4 I_1(0)$$

Für die Abschätzung von I_2 nehmen wir $\lambda \neq 0$ an: Wegen der Periodizität aller unter dem Integralzeichen stehenden Funktionen können wir im folgenden bei Substitution der Integrationsvariablen die Grenzen gleich lassen.

Mit $|f(u)| < M$ ist:

$$|I_2| \leq \left| \frac{M^2}{L} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\frac{\sin \frac{Lx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2 \gamma_m(v+x+\lambda) \gamma_m(v+x-\lambda) \gamma_m(v+\lambda) \gamma_m(v-\lambda) dv dx \right|$$

Aus der Schwarz'schen Ungleichung (wegen b 4 anwendbar)

$$\begin{aligned} & \left(\int_{-\pi}^{+\pi} \gamma_m(v+x-\lambda) \gamma_m(v+x-\lambda) \gamma_m(v+\lambda) \gamma_m(v-\lambda) dv \right)^2 \leq \\ & \leq \left(\int_{-\pi}^{+\pi} (\gamma_m(v+\lambda) \gamma_m(v-\lambda))^2 dv \right)^2 \end{aligned}$$

erhalten wir weiters

$$|I_2| \leq \frac{M^2}{L^2} \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\frac{\sin \frac{Lx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2 dx \int_{-\pi}^{+\pi} (\gamma_m(v+\lambda) \gamma_m(v-\lambda))^2 dv$$

Aus b.1 und b 3 folgt für $\lambda \neq 0$ und beliebig vorgegebenes $\epsilon > 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\gamma_m(v+\lambda) \gamma_m(v-\lambda))^2 dv < \epsilon$$

wenn nur m groß genug ist.

Also gilt für $m > m_0(\epsilon)$

$$|I_2| \leq \frac{M^2}{L^2} \cdot \epsilon \cdot 2\pi L = \frac{2\pi\epsilon M^2}{L}$$

I_1 schreiben wir zunächst um:

$$I_1 = \frac{1}{2L^2} \iint_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin \frac{Lx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2 f(v) f(v+x) \gamma_m^2(v+\lambda) \gamma_m^2(v+x+\lambda) dv dx$$

und führen die Abschätzung nun in 2 Schritten durch:

$$I_1 = \frac{1}{2L^2} \int_{\pi \geq |x| \geq \frac{\pi A}{L}} + \frac{1}{2L^2} \int_{|x| < \frac{\pi A}{L}} = I_{11} + I_{12}$$

Mit $|f(\lambda)| \leq M$, $0 < A < L$ wird

$$\begin{aligned} |I_{11}| &\leq \frac{M^2}{2L^2} \int_{\pi \geq |x| \geq \frac{\pi A}{L}} \left(\frac{\sin \frac{Lx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2 \int_{-\pi}^{\pi} \gamma_m^2(v+\lambda) \gamma_m^2(v+x+\lambda) dv dx \leq \\ &\leq \frac{M^2}{L^2} \int_{\frac{\pi A}{L}}^{\pi} \left(\frac{\sin \frac{Lx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2 dx \int_{-\pi}^{\pi} \gamma_m^4(v) dv \end{aligned}$$

Hier haben wir für das innere Integral wieder die Schwarz'sche Ungleichung benützt.

Nun ist im Intervall $(\frac{\pi A}{L}, \pi)$

$$\int_{\frac{\pi A}{L}}^{\pi} \left(\frac{\sin \frac{Lx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2 dx \leq \int_{\frac{\pi A}{L}}^{\pi} \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{2}} = 2 \operatorname{ctg} \frac{\pi A}{2L} \leq \frac{4L}{\pi A}$$

somit

$$|I_{11}| \leq \frac{2M^2}{\pi A} \left(\frac{1}{L} \int_{-\pi}^{\pi} \gamma_m^4(v) dv \right)$$

und da man A beliebig groß machen kann (freilich mit $A < L$), erhalten wir

$$I_{11} = o\left(\frac{1}{L} \int_{-\pi}^{\pi} \gamma_m^4(v) dv\right)$$

Im 2. Schritt betrachten wir

$$I_{12} = \frac{1}{2} \int_{|x| < \frac{\pi A}{L}} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin \frac{Lx}{2}}{L \sin \frac{x}{2}} \right)^2 f(v) f(v+x) \gamma_m^2(v+\lambda) \gamma_m^2(v+x+\lambda) dv dx$$

Ersetzen wir in I_{12} $f(v) f(v+x) \gamma_m^2(v+\lambda) \gamma_m^2(v+x+\lambda)$ durch $f^2(v) \gamma_m^4(v+\lambda)$, so erhalten wir wegen b 5 folgende Fehlerabschätzung:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(v) f(v+x) \gamma_m^2(v+\lambda) \gamma_m^2(v+\lambda+x) - f^2(v) \gamma_m^2(v+\lambda) \gamma_m^2(v+\lambda+x) + \right. \right. \\ & \left. \left. + f^2(v) \gamma_m^2(v+\lambda) \gamma_m^2(v+\lambda+x) - f^2(v) \gamma_m^4(v+\lambda) \right) dv \right| \leq \\ & \leq \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(v) (f(v+x) - f(v)) \gamma_m^2(v+\lambda) \gamma_m^2(v+\lambda+x) dv \right| + \\ & + \left| \int_{-\pi}^{\pi} f^2(v) (\gamma_m^2(v+\lambda) \gamma_m^2(v+\lambda+x) - \gamma_m^4(v+\lambda)) dv \right| \leq \\ & \leq M^2 \varepsilon \left| \int_{-\pi}^{\pi} \gamma_m^4(v) dv \right| + M \delta \left| \int_{-\pi}^{\pi} \gamma_m^2(v+\lambda) \gamma_m^2(v+\lambda+x) dv \right| \leq \\ & \leq \underbrace{(M\varepsilon + \delta)}_{\varepsilon'} M \int_{-\pi}^{\pi} \gamma_m^4(v) dv \end{aligned}$$

Der Fehler F ist also:

$$F \leq \varepsilon' \int_{|x| \leq \frac{\pi A}{L}} \left(\frac{\sin \frac{Lx}{2}}{L \sin \frac{x}{2}} \right)^2 dx \int_{-\pi}^{\pi} \gamma_m^4(v) dv \leq$$

$$\leq 2 \pi A \varepsilon' \left(\frac{1}{L} \int_{-\pi}^{\pi} \gamma_m^4(v) dv \right)$$

$$F = o \left(\frac{1}{L} \int_{-\pi}^{\pi} \gamma_m^4(v) dv \right)$$

$$I_{12} = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi A}{L}}^{\frac{\pi A}{L}} \left(\frac{\sin \frac{Lx}{2}}{L \sin \frac{x}{2}} \right)^2 \cos \int_{-\pi}^{\pi} f^2(v) \gamma_m^4(v+\lambda) dv + o \left(\frac{1}{L} \int_{-\pi}^{\pi} \gamma_m^4(v) dv \right) =$$

$$= \frac{1}{2L^2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin \frac{Lx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2 dx - 2 \int_{-\frac{\pi A}{L}}^{\frac{\pi A}{L}} \left(\frac{\sin \frac{Lx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2 dx \right) \cdot$$

$$\cdot \left(\int_{-\pi}^{\pi} f^2(v) \gamma_m^4(v+\lambda) dv + o \left(\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \gamma_m^4(v) dv \right) \right)$$

Unter Benützung der Abschätzung aus dem ersten Schritt und der Bedingung b 3 erhalten wir

$$I_{12} = \frac{\pi f^2(\lambda)}{L} \int_{-\pi}^{\pi} \gamma_m^4(v) dv + o \left(\frac{1}{L} \int_{-\pi}^{\pi} \gamma_m^4(v) dv \right)$$

Da sich I_3 genau wie I_1 berechnen läßt, haben wir schließlich die asymptotischen Beziehungen

$$\text{Var} \{ \hat{f}_N(\lambda) \} \sim \frac{2\pi f^2(\lambda)}{L} \int_{-\pi}^{\pi} \gamma_m^4(v) dv \quad \text{für } \lambda \neq 0 \text{ und}$$

$$\text{Var} \{ \hat{f}_N(0) \} \sim \frac{4\pi f^2(0)}{L} \int_{-\pi}^{\pi} \gamma_m^4(v) dv \quad \text{für } \lambda = 0.$$

Damit unsere Schätzung konsistent ist, muß also die Übertragungsfunktion des Filters so beschaffen sein, daß

$\int_{-\pi}^{\pi} \gamma_m^4(v) dv$ schwächer gegen ∞ geht als L . Dies liefert uns eine Bedingung für das Verhältnis von Datenlänge N zu Filterlänge $2m+1$.

L I T E R A T U R

- /1/ M.LOEVE: Probability Theory
3rd Ed. Princeton 1963
- /2/ J.DOOB: Stochastic Processes
Wiley, N.Y. 1953
- /3/ U.GRENANDER,
M.ROSENBLATT: Statistical Analysis of
Stationary Time Series
Wiley, N.Y. 1957
- /4/ M.S.BARTLETT: An Introduction to
Stochastic Processes
Cambridge, 1962
- /5/ R.BLACKMAN,
J.W.TUKEY: The Measurement of Power
Spectra
Dover N.Y. 1958
- /6/ C.BINGHAM,
M.D. GODFREY,
J.W.TUKEY: Modern Techniques of
Power Spectrum Estimation
IEEE Trans. Vol. AU-15,Nr.2
Juni 1967
- /7/ R.C.SINGLETON: On Computing the Fast
Fourier Transform.
Comm. ACM, Vol.10,Nr.10,
Oct. 1967
- /8/ C.W.J.GRANGER: Spectral Analysis of
Economic
Time Series
Princeton 1964
- /9/ M.D.GODFREY: An Explanatory Study of
Economic Time Series
Applied Statistic Vol.XIV,
Nr.1, 1965

ZEICHENERKLÄRUNG

$N = (1, 2, 3, \dots)$ Menge der natürlichen Zahlen

$\bar{N} = (0, 1, 2, \dots)$ Menge der nichtnegativen ganzen Zahlen

$G = (\dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots)$ Menge der ganzen Zahlen

R : Menge der reellen Zahlen

C : Menge der komplexen Zahlen

Ist a eine komplexe Zahl, so bedeutet \bar{a} ihr Konjugium

$p \Rightarrow q$ bedeutet: aus p folgt q

$p \Leftrightarrow q$ bedeutet: Die Aussagen p und q sind äquivalent

\exists bedeutet: Es existiert

\forall bedeutet: Für alle

\wedge bedeutet: und

\lrcorner deutet das Ende eines Beweises an