DYNAMISCHE MODELLE ZUR SIMULTANEN OPTIMIERUNG VON PRODUKTIONS- UND INVESTITIONSENTSCHEIDUNGEN

Stefan Schleicher

Research Memorandum No. 27

September 1968

I N H A L T

Einleitung

0.1 Unbefriedigende Aussagen in der neoklassischen Theorie der Unternehmung

Nur als ein Abfallprodukt der Theorie der Marktformen erscheint in der klassischen Ökonomie die Theorie der Unternehmung. Der historische Ursprung der Theorie der Unternehmung findet sich 1838 bei Cournot. In einer rund hundertjährigen Entwicklung wurden seine Gedanken mittels der Infinitesimalrechnung formalisiert. Diese neoklassische Theorie der Unternehmung ist also noch überraschend jung und es verwundert nicht, daß sie immer mehr einer umfassenden Kritik ausgesetzt wird.

Abgesehen von der Kritik an den Prämissen der neoklassischen Entscheidungslogik, wie sie von H.Albert [1] und G.Kade [2] geführt wurde, konzentriert sich die spezielle Kritik der neoklassischen Theorie der Unternehmung auf zwei Punkte: die Voraussetzung über die technische Effizienz des Produktionsprozesses und die mangelhafte Behandlung des Zeit- und Kapitalfaktors.

0.2 Die technische Effizienz des Produktionsprozesses

Da die traditionelle Ökonomie primär das Marktgeschehen erklären will, enthält die dazugehörige Theorie der Unternehmung nur jene Variable, die die Marktbeziehungen einer Firma bestimmen. Der Produktionsprozeß wird als eine Transformation von Inputgütern in Outputgüter betrachtet, beschrieben durch die Produktionsfunktion. Gegenstand der Analyse ist nur die

---

1) H.Albert, Marktsoziologie und Entscheidungslogik, Berlin, 1967.

2) G.Kade, Die Grundannahmen der Preistheorie, Berlin, 1962.

ö k o n o m i s c h e Effizienz, nämlich die Auswahl der optimalen Input- und Outputkombination in Abhängigkeit von den Faktor- und Güterpreisen. Vorausgesetzt und als gelöst betrachtet wird die t e c h n i s c h e Effizienz des Produktionsprozesses, da die neoklassische Produktionsfunktion per definitionem für jede Inputkombination den damit maximal erreichbaren Output angibt.

Durch diese Ausklammerung der technischen Dimension des Produktionsprozesses ist die praktische Anwendbarkeit der neoklassischen Produktionstheorie ernstlich in Frage gestellt. Eine Lösung für dieses technische Effizienzproblem bot erst die Entwicklung der A k t i v i t ä t s a n a l y s e , die als mathematischen Kalkül die Methoden der Mathematischen Programmierung zur Grundlage hat.

Eigentlich faßt die neoklassische Produktionsfunktion die Lösung der ihr zugrunde liegenden Programmierungsprobleme für die verschiedenen Werte der Produktuonsfaktoren zusammen. Die vielen Restriktionen, die ein Programmierungsproblem kennzeichnen, fehlen in der traditionellen Formulierung nicht deshalb, weil man sie nicht berücksichtigen könnte, sondern weil man voraussetzt, daß sie schon beachtet worden sind.

"Vielleicht wären die Ökonomen nicht der Gewohnheit verfallen, so leichtfertig ständig diese Annahmen über die technische Effizienz des Produktionsprozesses zu treffen, hätten sie erkannt, was und wieviel sie dabei voraussetzen." [1)]

---

1) R.Dorfman, P.A.Samuelson und R.M.Solow, Linear Programming and Economic Analysis, New York 1958, p.203.

0.3 Zeit- und Kapitalfaktor in der neoklassischen Theorie der Unternehmung

Die neoklassische Theorie der Unternehmung zerfällt in zwei völlig unabhängig voneinander entwickelte Teile: die Theorie der Produktion und die Theorie des Kapitals.

Die Produktionsfunktion, das Kernstück der neoklassischen Theorie der Produktion, enthält keine Zeitdimension. Wird als Idealfall sogar angenommen, daß der Produktionsprozeß keine Zeit erfordert, so geht man üblicherweise in der "short run" Analyse von einer "kurzfristigen" Produktionsfunktion aus, deren Zeitraum, für den sie gültig ist, folgendermaßen definiert ist: er muß so kurz sein, daß der Unternehmer die fixen Faktormengen nicht verändern kann, er darf nicht so lang sein, daß der technische Fortschritt die Form der Produktionsfunktion verändern könnte, er muß aber lang genug sein, um die technische Durchführung des Prozesses zu ermöglichen.[1)]

Mag allein die Bestimmung des Gültigkeitszeitraumes der kurzfristigen Produktionsfunktion im konkreten Fall erhebliche Schwierigkeiten bereiten, so stößt man beim Einsatz von Produktionsfaktoren, deren Nutzungsdauer die oben definierte Produktionsperiode überschreitet, auf das Abschreibungsproblem. Wohl kann man die der Nutzungsdauer dieser dauerhaften Produktionsgüter zuzuordnende Outputmenge bestimmen, in den allermeisten Fällen ist es aber nicht möglich dem Output der definierten kurzfristigen Produktionsperiode einen "wahren" verbrauchten Anteil der fixen Produktionsfaktoren zuzurechnen. F. und V.Lutz[2)] betonen, daß es keine "wahre" Abschreibungsmethode gibt und daß alle verwendeten oder vorgeschlagenen Methoden nur als für das jeweils spezielle Problem als vorteilhaft erscheinende Übereinkommen zu betrachten sind.

---

1) Vgl. dazu: J.M.Henderson und R.E.Quandt, Microeconomic Theory, New York 1958, p. 44.

2) F. und V.Lutz, The Theory of Investment of the Firm, Princeton 1951, p. 7.

Aus der Forderung, die Zeit als unabhängige Variable in die Analyse von Produktionsprozessen einzuführen, entstand unabhängig von der Theorie der Produktion eine eigene Theorie des Kapitals, auch Investitionstheorie genannt.

Indem man auf die aus der Finanztheorie bekannten Kapitalisierungsformeln zurückgriff, beschnitt man damit drastisch den Anwendungsbereich der Theorie des Kapitals, egal ob die Zeit als diskrete oder kontinuierliche Variable behandelt wird.

Erstens gestattet der mathematische Kalkül der neoklassischen Entscheidungslogik immer nur die isolierte Betrachtung einer einzelnen Investition und deren Folgeinvestitionen. Interdependente Investitionen müssen deshalb auf den Fall einer einzigen Gesamtinvestition reduziert werden, was meist auf unüberwindbare Schwierigkeiten stößt.

Zweitens gelingt es der neoklassischen Theorie der Unternehmung nur für einfache Spezialfälle eine Verbindung von Produktions- und Investitionstheorie herzustellen [1]. Hier wird aber ein offensichtlicher Mangel augenscheinlich, da von einer Theorie der Unternehmung zu erwarten ist, daß sie eine Aussage über die Wirkung von Investitionen auf die Produktion geben und unter Berücksichtigung dieser Abhängigkeiten eine optimale Strategie für die Produktions- und Investitionsentscheidungen über den gesamten Planungszeitraum liefern soll.

0.4. Ziel der Untersuchung

Werden bei Investitionsentscheidungen Rentabilitätsüberlegungen angestellt, dann beschränkt man sich weitgehend auf die Berechnung des Kapitalwertes, des internen Zinsfußes, der Annuitäten oder des durchschnittlichen Verfahrensnachteiles der MAPI-Methode. Zu den starken impliziten Annahmen dieser

---

1) Etwa in: V.L.Smith, Investment and Production, Cambridge, Mass. 1961.

traditionellen Kalküle der Investitionsrechnung [1] kommt der Nachteil, daß weder die Interdependenz der einzelnen Investitionsalternativen untereinander, noch zu den vorhandenen Anlagen berücksichtigt werden. Unbeachtet bleiben auch zeitliche Interdependenzen, die bei zeitlich nacheinander angeschafften Investitionsobjekten entstehen. Überhaupt keine Anhaltspunkte liefern die angeführten traditionellen Methoden der Kapitaltheorie für die Gestaltung des Produktionsprogramms auf Grund der vorgenommenen Investitionen.

Investitions- und Produktionsentscheidungen sind aber untrennbar miteinander verbunden und fordern eine dynamische Betrachtungsweise über den gesamten Planungshorizont einer Unternehmung.

Ausgehend vom linearen Produktionsmodell der Aktivitätsanalyse sollen deshalb in den folgenden Abschnitten mathematische Modelle entwickelt werden, die simultan zum Produktionsprogramm einer Unternehmung auch deren Investitionsentscheidungen optimieren und hinsichtlich eines gegebenen Gütekriteriums eine optimale zeitliche Allokation der Produktionsfaktoren über die einzelnen Planungsperioden gewährleisten.

Damit soll die vorliegende Arbeit einen Beitrag leisten zur Integrierung der modernen Optimierungstechniken in eine applikable Theorie der Unternehmung.

Obwohl der Anstoß zu dieser Untersuchung von der neoklassischen Theorie der Unternehmung ausging soll vermerkt werden, daß die folgenden Modelle von ihrer institutionellen Interpretation weitgehend unabhängig sind. Die Produktion kann marktwirtschaftlich organisiert, aber auch zentralgeplant sein. Beim betrachteten Wirtschaftskörper kann es sich um eine Betriebsabteilung, eine Unternehmung, einen Industriezweig, eine Wirtschaftsregion oder um eine ganze Volkswirtschaft handeln.

---

1) H.Jacob, Neuer Entwicklungen in der Investitionsrechnung, in: ZfB, 34 (1964), p. 487 ff.

Das Produktionsmodell der Aktivitätsanalyse

Allen folgenden Modellen liegt die aktivitätsanalytische Betrachtungsweise des Produktionsprozesses zugrunde. Statt einer einzigen, für den ganzen Wirtschaftskörper geltenden Produktionsfunktion vom neoklassischen Typ bilden elementare Produktionsprozesse oder Aktivitäten die Bausteine des Modells. Dem Problem, entsprechend einem Optimalitätskriterium jene Prozeßkombination zu finden, die zu maximalem Güterausstoß und damit zu optimalem Einsatz der knappen Produktionsfaktoren führt, ist stets ein duales Preis- und Bewertungsproblem für diese Resourcen zugeordnet. [1)]

1.1. Das einfache statische lineare Produktionsmodell

1.1.1 Die Produktion, worunter einfach die Transformation vorhandener Güter in andere verstanden sein soll, läßt sich durch n Aktivitäten (Prozesse) beschreiben. Eine Interdependenz der einzelnen Aktivitäten besteht nur darin, daß sie sich die Dienstleistungen der m knappen Produktionsfaktoren teilen. Im Mittelpunkt der Analyse steht die optimale Nutzung dieser für einen gegebenen Produktionszeitraum in beschränktem Ausmaß verfügbaren Resourcen.

Jede Aktivität verwendet a_{ij} Einheiten des knappen Produktionsfaktors i um eine Einheit des Gutes j als Output der zugehörigen

---

1) Vgl. K.P.Schönfeld, Effizienz und Dualität in der Aktivitätsanalyse, Diss. FU Berlin 1964.

Aktivität zu erzeugen. Die technologische Transformationsfunktion $a^j = (a_{1j},\ldots,a_{mj})$, der A k t i v i t ä t s - v e k t o r , definiert als Produktionsfunktion die j-te Aktivität.

Entscheidungsvariable in der Aktivitätsanalyse ist der Vektor $x = (x_1,\ldots,x_n)$ der nichtnegativen Aktivitätsniveaus (Prozeßintensitäten), der so zu bestimmen ist, daß die durch die Knappheit der im betrachteten Planungszeitraum vorhandenen Produktionsfaktoren $b = (b_1,\ldots,b_m)$ bedingten Kapazitätsrestriktionen erfüllt werden

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqq b_i \qquad (i = 1,\ldots,m), \tag{1-1}$$

$$x_j \geqq 0 \qquad (j = 1,\ldots,n) \tag{1-2}$$

und der Gesamtprofit der Produktion, wenn $c = (c_1,\ldots,c_n)$ den Gewinn pro Outputeinheit bezeichnet, maximiert wird

$$\max g = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad . \tag{1-3}$$

<u>1.1.2</u> Bezeichnet man mit A die aus den n Aktivitätsvektoren gebildete Produktionsmatrix der technologischen Koeffizienten, so nimmt das lineare Produktionsmodell, als Maximumproblem der Linearen Programmierung formuliert, folgende Form an:

$$\max g = cx \tag{1-4}$$

$$Ax \leqq b \tag{1-5}$$

$$x \geqq 0 \; . \tag{1-6}$$

Nach dem D u a l i t ä t s t h e o r e m der Linearen Programmierung ist diesem primalen Maximumproblem ein duales Minimumproblem von folgender Art zugeordnet:

$$\min k = yb \tag{1-7}$$

$$yA \geqq c \tag{1-8}$$

$$y \geqq 0. \tag{1-9}$$

Notwendig und hinreichend dafür, daß $\overline{x}$ eine Optimallösung des primalen Problems beschreibt, ist die Existenz eines $\overline{y}$ des dualen Problems, so daß gilt

$$c\overline{x} = \overline{y}b \; . \tag{1-10}$$

Nach dem O p t i m a l i t ä t s k r i t e r i u m ist dann $\overline{y}$ eine optimale Lösung des dualen Problems.

1.1.3 Die ökonomische Interpretation des dualen Problems liefert eine wichtige Erkenntnis: den m knappen Produktionsfaktoren ist eine duale Variable $y = (y_1, \ldots, y_m)$ zugeordnet, der wegen ihrer Dimension die Bedeutung eines Preises pro Einheit dieser Resourcen zukommt.

Aus dem Dualitätstheorem ist ersichtlich, daß diese duale Variable y so bestimmt wird, daß der Gesamtwert der Resourcen minimiert wird (1-7) und der Wert der zur Produktion einer Einheit eines Gutes verbrauchten Resourcen mindestens so groß ist wie der Gewinn für eine Einheit dieses Gutes (1-8).

Die duale Variable y wird auch Schattenpreis oder Verrechnungspreis genannt. Ihr Wert hat nichts mit den tatsächlichen Kosten der zugehörigen Produktionsfaktoren zu tun, sondern sie ist nur **ein** für den institutionellen Geltungsbereich des Modells gültiger Knappheitsindikator der verfügbaren Resourcen.

Trotzdem kann der Wert der dualen Variablen eines Produktionsfaktors Anhaltspunkte für künftige Investitionsentscheidungen liefern: der Schattenpreis ist null für alle jene Faktoren, deren Kapazität nicht voll genutzt wird. Ein Vergleich der Schattenpreise der bis zu ihrer Kapazitätsgrenze ausgelasteten Resourcen mit ihren tatsächlichen Marktpreisen kann erste Hinweise für lohnende Erweiterungsinvestitionen geben.

1.2 Das erweiterte statische lineare Produktionsmodell

Das beschriebene einfache lineare Produktionsmodell soll dahingehend erweitert werden, daß es ein möglichst wirklichkeitsnahes Abbild der tatsächlichen Vorgänge in einem Wirtschaftskörper liefert. Durch eine detailliertere Aufschlüsselung des Produktionsprozesses und durch Einbeziehung der Marktverbindungen in das Modell soll dies erreicht werden.

1.2.1 Differenzierung der Produktion

1.2.1.1 Produktarten, Produktionsstätten, Produktionseinheiten.
Es werden $k \in K$ Zwischenprodukte und $\bar{k} \in \bar{K}$ Fertigprodukte erzeugt. Beide Produktarten zusammen werden mit $\underline{k} \in \underline{K}$ bezeichnet, wobei $\underline{K} = K \cup \bar{K}$ gilt. Die gesamte Produktion vollzieht sich in $h \in H$ räumlich getrennten Produktionsstätten. In den Produktionsstätten unterscheidet man $f \in F$ Produktionseinheiten.

1.2.1.2 Produktionsaktivitäten.
Die Produktionsaktivitäten teilen sich in solche, die Zwischenprodukte x^{prod}_{kh} und solche die Fertigprodukte $x^{prod}_{\bar{k}h}$ erzeugen. Der Index h kennzeichnet die Produktionsstätte, in der die betreffende Aktivität betrieben wird.

1.2.1.3 Transportaktivitäten.
Zur Überwindung von Engpässen in einzelnen Produktionseinheiten dient der Transport von Zwischenprodukten $k \in K$ von der Produktionsstätte i nach der Produktionsstätte i', was durch die Aktivität $x^{tran}_{kii'}$ dargestellt wird.

1.2.1.4 Kapazitätsrestriktionen.
Produktions- und Transportaktivitäten werden durch die vorhandenen Resourcen beschränkt. Die Komponenten der einzelnen Aktivitätsvektoren beschreiben den Verbrauch von knappen Produktionsfaktoren, wenn eine Aktivität auf Einheitsniveau betrieben wird. So bezeichnet z.B. a^{prod}_{khf} den Kapazitätsbedarf der Produktionseinheit f in der Produktionsstätte h zur Erzeugung einer Einheit des Zwischenproduktes k.

Kapazitätsbeschränkungen können auch bei den Transportmitteln bestehen. Durch Transportaktivitäten wird in der Produktionsstätte i zusätzlich Produktions- und Transportkapazität verbraucht, in der Produktionsstätte i' jedoch Produktionskapazität eingespart. Dadurch wird eine gleichmäßigere Kapazitätsauslastung erreicht.

1.2.2 Marktverbindungen

1.2.2.1 Einkaufs- und Verkaufsaktivitäten.

Der Wirtschaftskörper wird durch Einkaufs- und Verkaufsaktivitäten mit seinen Märkten verbunden. Auf $j \in J$ Märkten können Einkäufe von Zwischenprodukten x_{kj}^{eink} und Verkäufe von Zwischen- und Fertigprodukten x_{kj}^{verk} durchgeführt werden. Die Märkte $j \in J$ bezeichnen sowohl Inlands- als auch Auslandsmärkte, wodurch auch Export- und Importmöglichkeiten berücksichtigt werden.

1.2.2.2 Marktrestriktionen.

Für die einzelnen Verkaufs- und Einkaufsaktivitäten können obere und untere Grenzen bestehen, die als Marktrestriktionen formuliert werden. Durch Bilanzgleichungen muß ferner das Gleichgewicht zwischen den für die Fertigprodukte benötigten Zwischenprodukten einerseits und den verkauften und eingekauften Produkten andererseits hergestellt werden. Beschränkungen in der Lagerhaltung für Zwischen- und Fertigprodukte können dabei beachtet werden.

1.2.3 Erlös- und Kostenparameter

Zur Formulierung der Zielfunktion muß natürlich für jede Aktivität der zugehörige Erlös- bzw. Kostenparameter angegeben werden, mit positivem bzw. negativem Vorzeichen.

Für die Produktionsaktivitäten sind die Herstellkosten einer Produkteinheit, für die Transportaktivitäten die betreffenden Transportkosten pro Produkteinheit und für die Einkaufsaktivitäten die Kosten für den Einkauf eines Gutes auf den verschiedenen Märkten festzustellen. Positives Vorzeichen tragen die Stückpreise der Verlaufsaktivitäten auf den einzelnen Märkten.

Der Gewinn, d.h. die Differenz zwischen Verkaufserlösen und sämtlichen Kosten, wird durch den Optimierungsprozeß maximiert. Die Lösung des Problems weist aus, welche Aktivität auf welchem Niveau betrieben werden soll.

1.2.4 Das erweiterte statische lineare Produktionsmodell

1.2.4.1 Bezeichnungen

(n)-Vektor x^{prod}: Niveau der Produktions-, Transport-, Einkaufs- und Verkaufsaktivitäten.

(m,n)-Matrix A^{prod}: erweitere Produktionsmatrix der technologischen Koeffizienten.

(m)-Vektor b^{prod}: Menge der verfügbaren Resourcen für Produktion und Transport, Höhe der Marktbeschränkungen, Bilanzbedingungen.

(n)-Vektor c^{prod}: Erlös- und Kostenparameter der einzelnen Aktivitäten.

1.2.4.2 Formulierung mittels der Linearen Programmierung

$$\max g = c^{prod} x^{prod} \tag{1-11}$$

$$A^{prod} x^{prod} \leqq b^{prod} \tag{1-12}$$

$$x^{prod} \geqq 0 \; . \tag{1-13}$$

1.2.5 Implizite Modellannahmen

Das Modell gilt nur für Märkte mit vollkommener Konkurrenz. Wenn Modelle der Linearen Programmierung dennoch auch mit Erfolg für monopolistische und oligopolistische Märkte verwendet werden, dann deshalb, weil die Fülle der vom Modell verarbeiteten Informationen den Fehler einer preisunabhängigen Nachfrage bei weitem ausgleicht.

Angenommen wird ferner, daß die Grenzkosten einer Aktivität konstant bleiben, d.h. sie werden weder vom Niveau der eigenen noch vom Niveau einer anderen Aktivität beeinflußt.

1.2.6 Schematische Darstellung des erweiterten statischen linearen Produktionsmodells.

b^{prod}		
Produktions- und Transportkapazit.	Markt- beschr.	Bilanz- beding.

$\leqq$

Produktion von Zwi.prod.	Produktion von Fert.prod.	Transp. zw. Prod.stätten	Einkauf	Verkauf
x_k^{prod}	$x_{\bar{k}}^{prod}$	$x_{kii'}^{tran}$	x_{kj}^{eink}	$x_{\underline{k}j}^{verk}$
x^{prod}				

A^{prod}

prod

Produktionsmodelle mit vorgegebenen Investitionsprojekten

2.1 Das einperiodige Produktionsmodell mit vorgegebenen Investitionsprojekten

Jene administrative Instanz in einem Wirtschaftskörper, die über die Durchführung der Investitionen für die nächste Planungsperiode zu entscheiden hat, steht oft vor folgendem Problem: aus einer Anzahl von vorgeschlagenen Investitionsprojekten sind jene Alternativen auszuwählen, die sich unter Berücksichtigung gegebener Kapitalrestriktionen am besten in die vorhandene Produktionsstruktur einfügen.

2.1.1 Die vorgegebenen Investitionsprojekte werden in Form von Investitionsaktivitäten in das allgemeine lineare Produktionsmodell eingefügt.

Eine Investitionsaktivität wird durch den Vektor $i^p = (i_{1p},\ldots,i_{mp})$ beschrieben, dessen Komponenten die durch die Investition p für die knappen Produktionsfaktoren erfolgte Restriktionserleichterung ausdrücken und deshalb ein negatives Vorzeichen tragen. In diesem Vektor sind alle Informationen über die Auswirkungen eines Investitionsprojektes auf die vorhandene Produktionsausrüstung enthalten. Sämtliche Investitionsaktivitäten bilden die Matrix $I^{inv} = (i^1,\ldots,i^p)$. Der Vektor $c^{inv} = (c_1^{inv},\ldots,c_p^{inv})$ **bezeichnet** die Kosten der einzelnen Investitionsprojekte. Seine Komponenten enthalten deshalb nur negative Werte.

Zusätzliche Restriktionen, die die Zahl der durchführbaren Investitionsprojekte beschränken, wie etwa das verfügbare Investitionsbudget oder das vorhandene Arbeitskräftepotential, werden durch die Matrix A^k und den Vektor b^k ausgedrückt und den bisherigen Nebenbedingungen hinzugefügt.

Da für die einzelnen Investitionsaktivitäten der Entscheidungsraum auf Annahme oder Ablehnung beschränkt bleibt, darf die Variable $x^{inv} = (x_1^{inv}, \ldots, x_P^{inv})$, die das Niveau der Investitionsaktivitäten bestimmt, nur die ganzzahligen Werte null und eins annehmen.

2.1.2 Das einperiodige Produktionsmodell mit vorgegebenen Investitionsprojekten wird durch folgende Beziehungen ausgedrückt:

$$\max g = \left[c^{prod} \; \vdots \; c^{inv} \right] \begin{bmatrix} x^{prod} \\ \cdots\cdots \\ x^{inv} \end{bmatrix} \tag{2-1}$$

$$\begin{bmatrix} A^{prod} & \vdots & I^{inv} \\ \cdots\cdots & \cdot & \cdots\cdots \\ & A^k & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{prod} \\ \cdots\cdots \\ x^{inv} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^{prod} \\ \cdots\cdots \\ b^k \end{bmatrix} \tag{2-2}$$

$$x^{prod} \geqq 0 \tag{2-3}$$

$$x^{inv} = 0 \text{ oder } 1. \tag{2-4}$$

Zur Lösung dieses gemischt-ganzzahligen Problems sei auf die Alogorithmen von N.J.Driebeek [1] und W.C.Healy [2] verwiesen.

2.1.3. Zu beachten ist, daß die Investitionsaktivitäten in diesem Modell von außen vorgegeben werden und das Optimierungsverfahren nur unter diesen vorgegebenen Alternativen die günstigste Kombination auswählt, so daß es angebracht erscheint von einer "konsistenten Optimierung" zu sprechen.

---

1) N.J.Driebeek, An Algorithm for the Solution of Mixed Integer Programming Problems, in:MS, 12 (1966), p.576 ff.

2) W.C. Healy, Multiple Choice Programming, in: OR, 13 (1965), p.122 ff.

2.2 Das mehrperiodige Produktionsmodell mit vorgegebenen Investitionsprojekten

Eine Erweiterung des einperiodigen Produktionsmodells mit vorgegebenen Investitionsprojekten auf mehrere Planungsperioden bezweckt aus einer Gruppe von durchführbaren Investitionen die der vorhandenen Ausrüstung am besten entsprechenden Varianten auszuwählen und deren zeitliche Staffelung über den Planungszeitraum festzulegen. [1)]

2.2.1 Der gesamte Planungszeitraum wird in $t = 1,\ldots,T$ Planungsperioden unterteilt, jede Planungsperiode entspricht einem Zeitraum von q Jahren. Das Mehrperiodenmodell kann als eine mehrmalige Aneinanderreihung des Einperiodenmodells verstanden werden. Die Zahl der Variablen und der Parameter vervielfacht sich mit der Zahl der Planungsperioden.

Über den zukünftigen Verlauf der Gewinne und der Nachfrage sind Prognosen notwendig, wozu ökonometrische Methoden herangezogen werden können. Mögen solche Projektionen oft mit beträchtlichen Schwierigkeiten verbunden sein, so muß doch bedacht werden, daß auch eine traditionelle Investitionsplanung auf solche Schätzungen nicht verzichten kann.

Die Unterteilung des Planungszeitraumes in diskrete Planungsperioden impliziert, daß alle Parameter des Modells innerhalb einer Periode konstant bleiben und sich nur beim Übergang in die nächste Periode verändern können.

2.2.2 Analog zum Einperiodenmodell werden für die Planungsperiode t folgende Bezeichnungen eingeführt:

$$\left[\begin{array}{c:c} A_t^{prod} & I_t^{inv} \\ \hdashline \multicolumn{2}{c}{A_t^k} \end{array}\right] = A_t \qquad (2\text{-}5)$$

---

1) Eine ähnliche Problemstellung, allerdings ausgehend vom Transportmodell der Linearen Programmierung, findet man in: D.A.Kendrick, Programming Investment in the Process Industries, Cambridge, Mass. 1967.

$$\begin{bmatrix} x_t^{prod} \\ \cdots\cdots \\ x_t^{inv} \end{bmatrix} = x_t \qquad (2\text{-}6)$$

$$\begin{bmatrix} b_t^{prod} \\ \cdots\cdots \\ b_t^{k} \end{bmatrix} = b_t \qquad (2\text{-}7)$$

$$\left[c_t^{prod} \;\vdots\; c_t^{inv} \right] = c_t \qquad (2\text{-}8)$$

2.2.3 Wiederum werden die vorgeschlagenen Investitionsprojekte als Investitionsaktivitäten den Produktionsmatrizen hinzugefügt. Die Investitionsprojekte treten aber nur in jenen Planungsperioden auf, in denen eine Realisierung der betreffenden Investitionen als wahrscheinlich erscheint. Da das Modell für die Investitionsprojekte nur eine Aussage über Ablehnung oder Annahme und Festsetzung des Durchführungszeitpunktes zu machen hat, ist das Niveau der Investitionsaktivitäten wiederum auf null und eins beschränkt.

Dürfen bestimmte Investitionsprojekte in anderen Planungsperioden nicht wiederholt werden, so muß die einmalige Durchführung durch Nebenbedingungen bestimmt werden. Dies wird zusammen mit Gleichungen, die die Auswirkung getätigter Investitionen auf die Folgeperioden feststellen, in den Restriktionen $A^r x = b^r$ beschrieben.

Die Einführung der Zeitdimension macht eine Diskontierung mit einem kalkulatorischen Zinsfuß r notwendig. Gewinne und Investitonskosten werden deshalb für die Planungsperiode t mit einem Diskontierungsfaktor D_t multipliziert, der folgendermaßen berechnet wird:

$$D_t = \frac{1}{(1+r)^{\underline{t}}} \qquad (2\text{-}9)$$

$$\underline{t} = (t-1)q + q/2 \qquad (2\text{-}10)$$

Diese Vorgangsweise führt zur Maximierung des Kapitalwertes (present value) der Produktion über alle Planungsperioden unter der Annahme, daß alle Zahlungen in der Mitte der Planungsperiode erfolgen. Die Diskontierungsformeln (2-9) und (2-10) werden auch für die in den folgenden Abschnitten dargestellten dynamischen Modelle angewandt.

2.2.4 Das mehrperiodige Produktionsmodell mit vorgegebenen Investitionsprojekten lautet:

$$\max g = \begin{bmatrix} c_1 & \vdots & \cdots & \vdots & c_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \\ x_T \end{bmatrix} \tag{2-11}$$

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 & & \\ 0 & A_2 & & \\ & & \ddots & 0 \\ & & 0 & A_T \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & A^r & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_T \end{bmatrix} \leqq \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_T \\ \cdots \\ b^r \end{bmatrix} \tag{2-12}$$

$$x_t^{prod} \geqq 0 \qquad (t = 1,\ldots,T) \tag{2-13}$$

$$x_t^{inv} = 0 \text{ oder } 1 \qquad (t = 1,\ldots,T). \tag{2-14}$$

Dieses Modell bestimmt für alle Planungsperioden das optimale Produktionsprogramm, wählt aus den vorgeschlagenen Investitionsprojekten die geeignetsten aus und bestimmt ihre zeitliche Durchführung. Das mögliche Investitionsprogramm entspricht jedoch nicht einem modell-internen Optimierungsprozeß sondern ist von außen vorgegeben.

Produktionsmodelle mit optimalen Investitionsaktivitäten

3.1 Das einperiodige Produktionsmodell mit optimalen Investitionsaktivitäten

In einem gegebenen linearen Produktionsmodell soll ein bestimmter Anteil p des in der Produktionsperiode erzielten Gewinnes für Investitionen zur Erleichterung der Kapazitätsrestriktionen verwendet werden. Unter der Voraussetzung, daß die Kosten zur Vermehrung der knappen Produktionsfaktoren um eine Einheit $c^{inv} = (c_1^{inv},\ldots,c_m^{inv})$ bekannt sind, sollen zusammen mit dem optimalen Produktiosprogramm auch diejenigen optimalen Investitionsaktivitäten bestimmt werden, die den Periodengewinn maximieren.

3.1.1 Den Produktionsaktivitäten des Modells, die durch die Matrix A^{prod} beschrieben werden, fügt man die Matrix der möglichen Investitionsaktivitäten hinzu. Jedem der m knappen Produktionsfaktoren entspricht eine Investitionsaktivität. Auf Einheitsniveau betrieben vermehrt jede Investitionsaktivität die ihr entsprechende Faktorkapazität um eine Einheit, d.h. die Restriktion wird um eine Faktoreinheit vermindert. Die Matrix der Investitionsaktivitäten bekommt deshalb die Form einer negativen Einheitsmatrix.

Eine zusätzliche Nebenbedingung hat eine Bilanzfunktion. Die verfügbare Investitionssumme, die sich aus dem für Investitionen bestimmten Anteil p des Periodengewinnes ($0 \leqq p \leqq 1$) und der modellextern vorgegebenen Kapitalrestriktion b^k zusammensetzt, darf durch die Kosten der durchgeführten Investitionsaktivitäten nicht überschritten werden. Die Kapitalrestriktion kann etwa durch ein vorhandenes Investitionsbudget und eine obere Kreditgrenze bedingt sein. Die Komponenten des Vektors der Investitionskosten c^{inv} tragen ein negatives Vorzeichen.

Wegen mangelnder Teilbarkeit der Investitionsgüter dürfen die Niveaus der Investitionsaktivitäten nur negative ganzzahlige Werte annehmen. Sollte deshalb die verfügbare Investitionssumme nicht vollständig aufgebraucht werden, zeigt das Niveau x^u einer zusätzlich eingeführten Aktivität diesen unverbrauchten Rest der verfügbaren Investitionssumme an.

<u>3.1.2</u> Das einperiodige Produktionsmodell mit optimalen Investitionsaktivitäten:

$$\max g = \left[c^{prod} \ \vdots \ c^{inv} \ \vdots \ 1 \right] \begin{bmatrix} x^{prod} \\ \cdots\cdots \\ x^{inv} \\ \cdots\cdots \\ x^{u} \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}1)$$

$$\left[\begin{array}{c:cccc:c} & -1 & 0 & & & \\ & 0 & -1 & & & \\ A^{prod} & & & & & 0 \\ & & & & 0 & \\ & & & 0 & -1 & \\ \hdashline pc^{prod} & & & c^{inv} & & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x^{prod} \\ \cdots\cdots \\ x^{inv} \\ \cdots\cdots \\ x^{u} \end{bmatrix} \leqq \begin{bmatrix} b^{prod} \\ \cdots\cdots \\ b^{k} \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}2)$$

$$x^{prod} \geqq 0 \qquad (3\text{-}3)$$

$$x^{inv} = 0,1,2,\ldots \qquad (3\text{-}4)$$

$$x^{u} \geqq 0 \qquad (3\text{-}5)$$

3.1.3 Der Vorzug dieses Modells liegt darin, daß nicht nur die Produktions- sondern auch die Investitionsentscheidungen einem echten Optimierungsprozeß entspringen. Anhand der Marktpreise für die Produktions- und Investitionsgüter werden für die nächste Planungsperiode vom Modell selbst die optimalen Investitionsmengen für die knappen Produktionsfaktoren ermittelt und dazu das dieser neuen Produktionsstruktur entsprechende optimale Produktionsprogramm.

In der beschriebenen Form des Modells wird angenommen, daß vorausschauend der zukünftige zum Ende der Planungsperiode anfallende Periodengewinn die zu Beginn dieser Periode zu tätigenden Investitionsentscheidungen beeinflußt. Jener Teil der Investitionssumme, der aus dem laufenden Periodengewinn finanziert wird, steht also erst zum Periodenende zur Verfügung. Sollte sich diese Aufgabenstellung in einzelnen Fällen als unrealistisch erweisen, kann das Modell leicht in folgende Variante umgeformt werden: eine modellextern vorgegebene Investitionssumme b^k ist optimal auf Investitionen zur Erweiterung der vorhandenen Kapazitäten aufzuteilen. Für diesen Fall setzt man einfach $p = 0$. Der Optimierungsprozeß bestimmt dann für diese Investitionssumme die optimalen Investitionsaktivitäten, legt das Niveau der Produktionsprozesse fest und ermittelt den gesamten in dieser Periode erwirtschafteten Gewinn.

3.2. Das mehrperiodige Produktionsmodell mit optimalen Investitionsaktivitäten

Das eben entwickelte Einperiodenmodell wird nun für mehrere Planungsperioden erweitert. Bei vorgegebenem Planungshorizont sollen für die einzelnen Perioden die optimalen Produktions- und Investitionsentscheidungen berechnet werden. Dafür bieten sich zwei verschiedene Lösungsverfahren an, deren Wahl von der jeweiligen konkreten Problemstellung abhängt: Die Optimierung mittels der Methode der Dynamischen Linearen Programmierung oder mit der Methode der Dynamischen Programmierung.

3.3 Die Lösung des mehrperiodigen Modells mit der Methode der Dynamischen Linearen Programmierung

3.3.1 Die Lösungsmethode

3.3.1.1 Probleme der Dynamischen Linearen Programmierung stellen eine Erweiterung des statischen Modells der Linearen Programmierung über mehrere Zeitperioden dar. Formale Kennzeichen eines Problems der Dynamischen Linearen Programmierung sind wiederholt auftretende gleiche Anordnungen von Koeffizienten und nur wenige von null verschiedene Elemente in der Koeffizientenmatrix.

3.3.1.2 Die vorliegende Aufgabe führt zu einer speziellen Klasse von Problemen der Dynamischen Linearen Programmierung: die Aktivitäten einer bestimmten Zeitperiode sind nur von den Aktivitäten der vorangegangenen (aber keiner früheren) Zeitperiode abhängig.[1)]

Solche Probleme werden wie folgt formuliert:

$$\begin{array}{lllllll}
c_1x_1 & + & c_2x_2 & + \dots + & c_Tx_T & = & \max \\
A_{11}x_1 & & & & & \leqq & b_1 \\
A_{21}x_1 & + & A_{22}x_2 & & & \leqq & b_2 \\
\dots & & & & & & \\
A_{T1}x_1 & + & A_{T2}x_2 & + \dots + & A_{TT}x_T & \leqq & b_T
\end{array} \qquad (3\text{-}6)$$

1) Vgl. dazu:
L.E.Arnoff und S.S.Sengupta, Mathematical Programming, in: R.L.Ackoff (Hrsg.), Progress in Operations Research, Vol.1, New York 1961, p.170.

Die Matrizen A_{ij} sind Submatrizen (oder Blöcke) der einperiodigen Koeffizientenmatrix. Im mehrperiodigen Modell nimmt die Koeffizientenmatrix eine triangulierte Form an:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & & & \\ A_{21} & A_{22} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ A_{T1} & A_{T2} & \cdots & A_{TT} \end{bmatrix} \tag{3-7}$$

Für solche block-trianguläre Probleme wurden spezielle Rechenalgorithmen entwickelt. [1)]

3.3.2 Das Modell

3.3.2.1 In der Bedeutung der nachfolgend erläuterten Bezeichnungen lautet das Modell:

Über alle Planungsperioden soll die Differenz zwischen Gewinnen und Investitionskosten maximiert werden

$$\max g = cx \tag{3-8}$$

unter Beachtung der Nebenbedingungen

$$Ax \leqq b \tag{3-9}$$

$$x_t^{prod} \geqq 0 \qquad (t = 1,\dots,T) \tag{3-10}$$

$$x_t^{inv} = 0,1,2,\dots \quad (t = 1,\dots,T) \tag{3-11}$$

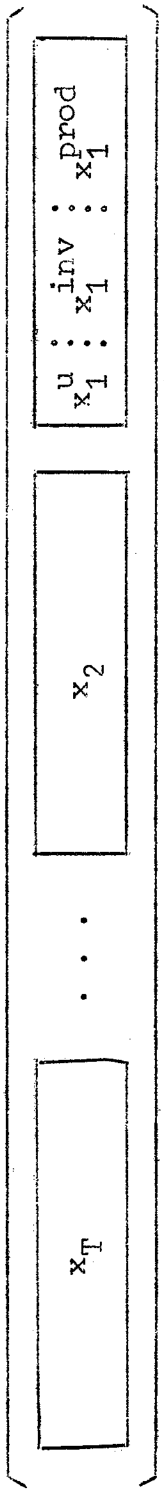
$$x_t^{u} \geqq 0 \qquad (t = 1,\dots,T). \tag{3-12}$$

---

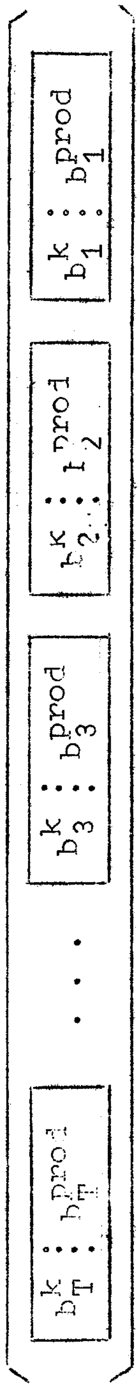
1) G.B.Dantzig, Recent Advances in Linear Programming, in: MS, Vol.2 (1956), p.131 ff.
G.B.Dantzig, On the Status of Multistage Linear Programming Problems, in: MS, Vol.6 (1960), p.53 ff.

3.3.2.2 Bezeichnungen

Vektor der Aktivitätsniveaus x



Restriktionsvektor b



Vektor der Gewinn-und Kostenparameter c

$$\left(\boxed{c_1^{prod} \vdots c_1^{inv} \vdots 1} \quad \cdots \quad \boxed{\quad c_T \quad} \right)$$

Koeffizientenmatrix A

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc|c|ccc}
A_1^{prod} & \begin{smallmatrix}-1 & 0 & & \\ 0 & -1 & & \\ & & \ddots & 0 \\ & & 0 & -1\end{smallmatrix} & 0 & & & & & & & \\
p_1 c_1^{prod} & c_1^{inv} & -1 & & & & & & & \\
0 & \begin{smallmatrix}-1 & 0 & & \\ 0 & -1 & & \\ & & \ddots & 0 \\ & & 0 & -1\end{smallmatrix} & 0 & A_2^{prod} & \begin{smallmatrix}-1 & 0 & & \\ 0 & -1 & & \\ & & \ddots & 0 \\ & & & -1\end{smallmatrix} & 0 & & & & \\
 & 0 & 1 & p_2 c_2^{prod} & c_2^{inv} & -1 & & & & \\
 & \vdots & & & \vdots & & \ddots & & & \\
0 & \begin{smallmatrix}-1 & 0 & & \\ 0 & -1 & & \\ & & \ddots & 0 \\ & & 0 & -1\end{smallmatrix} & 0 & 0 & \begin{smallmatrix}-1 & 0 & & \\ 0 & -1 & & \\ & & \ddots & 0 \\ & & 0 & -1\end{smallmatrix} & 0 & \cdots & A_T^{prod} & \begin{smallmatrix}-1 & 0 & & \\ 0 & -1 & & \\ & & \ddots & 0 \\ & & 0 & -1\end{smallmatrix} & \\
 & 0 & & & 0 & & & p_T c_T^{prod} & c_T^{inv} & -1
\end{array}\right)
$$

3.3.2.3 In einem einzigen Optimierungsverfahren bestimmt dieses Modell für alle Perioden des Planungszeitraumes auf Grund der geschätzten Preise für die zu produzierenden und die zu investierenden Güter die optimalen Investitionsprogramme und dazu die optimalen Produktionsaktivitäten.

Der Eleganz dieses Modells wegen der einfachen Formulierung, die nur einen einzigen Optimierungsprozeß für alle Planungsperioden erfordert, sind aber von der Rechentechnik her Grenzen gesetzt. Die Größe der mit der beschriebenen Lösungsmethode handhabbaren Probleme ist limitiert, einerseits durch den mit der Anzahl der Planungsperioden geometrisch anwachsenden Rechenaufwand, andererseits durch die Lösungsalgorithmen für gemischt-ganzzahlige Probleme der Linearen Programmierung, die nur bei einer relativ geringen Variablenanzahl konvergieren.

Deshalb soll eine Lösungsmethode gesucht werden, die zur Vermeidung der rechentechnischen Schwierigkeiten getrennt für jede Planungsperiode das Produktions- und Investitionsprogramm bestimmt. Die Entscheidungen in den einzelnen Planungsperioden sollen aber nicht isoliert sondern so voneinander abhängig getroffen werden, daß sich für den Planungszeitraum ein Gesamtoptimum ergibt.

Diese Prinzipien beachtet die Dynamische Optimierung. Ein für konkrete Probleme des mehrperiodigen Produktions- und Investitionsmodells oft einfacherer Lösungsweg soll deshalb mit dieser Methode entwickelt werden.

3.4 Die Lösung des mehrperiodigen Modells mit der Methode der Dynamischen Programmierung

3.4.1 Die Lösungsmethode

3.4.1.1 Die von R.Bellman entwickelte Dynamische Programmierung ist eine weitere Methode zur Optimierung mehrstufiger Entscheidungsprozesse. Die ihr zugrunde liegende mathematische Idee der Rekursion beschreibt das Optimalitätsprinzip:
"Ein optimales Verfahren hat die Eigenschaft, daß, ungeachtet des Anfangszustandes und der Anfangsentscheidung, die verbleibenden Entscheidungen ein optimales Verfahren hinsichtlich des aus der ersten Entscheidung resultierenden Zustandes darstellen." [1)]

Der rekursive Weg der Dynamischen Programmierung teilt bei zeitlich struktuierten Entscheidungsprozessen das Gesamtproblem in T einperiodige Aufgaben, die nur die für eine Periode relevanten Variablen enthalten. Dadurch können Dimensionsschwierigkeiten,wie sie wegen des Problemumfanges bei Mehrstufenprozessen auftreten, oft beseitigt werden: einer einmaligen Lösung einer schwierigen Aufgabe wird die wiederholte Lösung einer relativ einfachen Aufgabe vorgezogen. Die schrittweise Lösung sucht nicht isolierte Teiloptima sondern berechnet die Entscheidungen der t-ten Periode auf der Grundlage der Entscheidungen der (t-1)-ten Periode, die wiederum auf den Ergebnissen aller Vorperioden basieren. Dadurch wird bezüglich einer gegebenen Zielsetzung das Gesamtoptimum für den Planungszeitraum erreicht.

Für das zu behandelnde ökonomische Problem wird ein mit der Zeit vorwärtsschreitender Lösungsalgorithmus beschrieben, umgekehrt als das geläufige mit der Optimierung der letzten Stufe beginnende und rückwärtsschreitende Verfahren.

---

1) Bellman R., Dynamic Programming, Princeton 1957, p.83.

<u>3.4.1.2</u> Ein vorliegendes System kann über die Zeitperioden $t = 1,\dots,T$ verschiedene Zustandsräume Z_t durchlaufen. Von einem Zustand $z_t \in Z_t$ gelangt man in den nächsten Zustand $z_{t+1} \in Z_{t+1}$ durch die Entscheidung $e_t \in E_t$, wobei E_t den Entscheidungsraum der Periode t bezeichnet.

Eine Voraussetzung zur Anwendung der Dynamischen Programmierung ist, daß die Zustände Z_t in einer Periode t nur von den Entscheidungen E_t in dieser Periode und den Zuständen der Vorperiode Z_{t-1} abhängen, nicht aber davon, wie die Zustände Z_{t-1} erreicht wurden. Der Zustandsvektor z_t, der einen bestimmten Zustand beschreibt, muß deshalb alle notwendigen Informationen enthalten, damit diese Trennung erreicht wird.

Die gegebene Zielfunktion ist additiv, d.h. ihr Gesamtwert G setzt sich aus der Summe der Werte der einzelnen Perioden g_t zusammen, die wiederum von den Entscheidungen e_t in diesen Perioden abhängen:

$$G = \sum_{t=1}^{T} g_t = \sum_{t=1}^{T} g_t(e_t) = G(e). \qquad (3\text{-}13)$$

Die Zielfunktion G wird also durch die Geamtheit aller Entscheidungen $e = (e_1,\dots,e_T)$ bestimmt. Gesucht werden alle optimalnn Entscheidungen $\bar{e}$, die über T Perioden die Zielfunktion maximieren:

$$\bar{G}^T = G(\bar{e}) = \max_{e \in E} \{G(e)\} . \qquad (3\text{-}14)$$

Das iterative Lösungsverfahren kennzeichnet folgende Betrachtungsweise des Problems: für alle möglichen Zustände $t_t \in Z_t$ einer bestimmten Periode t sucht man jenen, durch die Entscheidungen in den einzelnen vorangegengenen Perioden beschriebenen Weg zurück zum Ausgangszustand z_o, der den maximalen bedingten (weil von z_t abhängigen) Gewinn $G^o_{1,\dots,t}(z_t)$ von der Periode 1 bis t ergibt.

In Wirklichkeit verläuft der Prozeß so, daß man durch die Entscheidung e_t vom Zustand z_{t-1} zum Zustand z_t gelangt:

$$z_t = z_t(z_{t-1}, e_t). \qquad (3\text{-}15)$$

Das hier beschriebene Iterationsverfahren macht aber eine umgekehrte Verfolgung des Prozesses nötig, mit der Interpretation, daß man aus dem Zustand z_t durch Aufhebung der Entscheidung e_t zurück in den Zustand z_{t-1} gelangt:

$$z_{t-1} \longleftarrow z_{t-1}(z_t, e_t). \qquad (3\text{-}16)$$

Der Pfeil soll ausdrücken, daß es sich nur um eine gedankliche Umkehrung des tatsächlichen Prozeßverlaufes handelt.

3.4.1.3 Der erste Lösungsschritt bewirkt die bedingte Optimierung der ersten Periode.

Nach der ersten Periode kann das System die möglichen Zustände $z_1 \in Z_1$ durch die Entscheiddungen $e_1 \in E_1$ annehmen. Die entsprechenden Periodengewinne sind:

$$g_1 = g_1(z_1, e_1). \qquad (3\text{-}17)$$

Der Gesamtgewinn vom Ausgangszustand z_o bis zu jedem $z_1 \in Z_1$ ist gleich dem Periodengewinn:

$$G_1 = g_1 = G_1(z_1, e_1). \qquad (3\text{-}18)$$

Für jedes $z_1 \in Z_1$ wird nun jene bedingt optimale Entscheidung $e_1^o(z_1)$ gesucht, über die man rückschreitend von z_1 zum Ausgangszustand z_o kommt und die für jedes $z_1 \in Z_1$ den bedingten optimalen Gesamtgewinn ergibt:

$$G_1^o(z_1) = \max_{e_1 \in E_1} \{G_1(z_1, e_1)\}. \qquad (3\text{-}19)$$

Mit dem bedingten maximalen Gewinn $G_1^o(z_1)$ liegt auch die bedingte optimale Entscheidung $e_1^o(z_1)$ fest:

$$G_1^o(z_1) \sim e_1^o(z_1). \tag{3-20}$$

3.4.1.4 Im zweiten Lösungsschritt wird die bedingte Optimierung der zweiten Periode durchgeführt.

In dieser Periode können durch die Entscheidungen $e_2 \in E_2$ die Zustände $z_2 \in Z_2$ erreicht werden mit den zugehörigen Periodengewinnen

$$g_2 = g_2(z_2, e_2). \tag{3-21}$$

Der noch nicht optimierte Gesamtgewinn von z_o bis z_2 ist unter Verwendung von (3-16) für beliebige Entscheidungen $e_2 \in E_2$:

$$\begin{aligned} G_{1,2}(z_2, e_2) &= g_2 + G_1^o = \\ &= g_2(z_2, e_2) + G_1^o(z_1(z_2, e_2)). \end{aligned} \tag{3-21}$$

Unter allen $e_2 \in E_2$ ist jene bedingte optimale Entscheidung $e_2^o(z_2)$ zu finden, die für alle $z_2 \in Z_2$ den bedingten maximalen Gewinn für die ersten zwei Perioden ergibt:

$$G_{1,2}^o(z_2) = \max_{e_2 \in E_2} \{G_{1,2}(z_2, e_2)\}. \tag{3-22}$$

Diesem bedingten maximalen Gewinn für zwei Perioden entspricht die zugehörige bedingte optimale Entscheidung:

$$G_{1,2}^o(z_2) \sim e_2^o(z_2). \tag{3-23}$$

3.4.1.5 Für den t-ten Lösungsschritt lautet die Rekursionsformel:

$$G^o_{1,\dots,t}(z_t) = \max_{e_t \in E_t} \{ g_t(z_t, e_t) + G^o_{t-1}(z_t, e_t) \} \qquad (3\text{-}24)$$

Mit dem bedingten maximalen Gewinn für t Perioden liegt auch die bedingte optimale Entscheidung für alle $z_t \in Z_t$ fest:

$$G^o_{1,\dots,t}(z_t) \sim e^o_t(z_t). \qquad (3\text{-}25)$$

Durch den letzten Lösungsschritt der Periode T erhält man:

$$G^o_{1,\dots,T}(z_T) \sim e^o_T(z_T). \qquad (3\text{-}26)$$

3.4.1.6 Da für das zu behandelnde mehrperiodige Produktions- und Investitionsmodell kein bestimmter Endzustand nach T Perioden vorgegeben ist, sucht man von allen $z_T \in Z_T$ jenen Zustand aus, dessen zugehöriger Gewinn über T Perioden einen Maximalwert erreicht:

$$\bar{G}^T = \max_{z_T \in Z_T} \{ G^o_{1,\dots T,}(z_T) \} \qquad (3\text{-}27)$$

Dem maximalen Gesamtgewinn $\bar{G}^T$ entspricht der optimale Endzustand $\bar{z}_T$ und die bedingte optimale Entscheidung, die zu diesem Zustand führt, wird zur optimalen Entscheidung $\bar{e}_T$ der Periode T. Indem man nun mittels (3-16) nochmals periodenweise vom optimalen Endzustand über die bedingten optimalen Entscheidungen bis zum Ausgangszustand zurückschreitet, erhält man für jede Periode den optimalen Zustand und die optimale Entscheidung:

$$\bar{z}_t \sim \bar{e}_t \;, \quad (t = 1,\dots,T). \qquad (3\text{-}28)$$

Die gestellte Aufgabe ist damit gelöst. Ermittelt wurde der maximale Gesamtgewinn $\bar{G}^T$ und der Vektor der optimalen Entscheidungen $\bar{e} = (\bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_T)$ wodurch das System vom Ausgangszustand z_o in T Perioden in den Endzustand $\bar{z}_T$ gebracht wird. [1)]

3.4.2 Das Modell

3.4.2.1 Der Zustandsraum Z_t einer bestimmten Periode t besteht aus allen möglichen Kombinationen der knappen Produktionsfaktoren z_t, die in dieser Periode angenommen werden können.

Ein Zustand $z_t \in Z_t$ wird durch einen Zustandsvektor bestimmt, der alle Informationen über die knappen Resourcen enthält. Die Komponenten dieses Vektors beschreiben deshalb die Anzahl der knappen Produktionsfaktoren b_t^{prod} und die Höhe des für die nächste Periode verfügbaren Investitionsbudgets b_t^k:

$$z_t = (b_t^{prod} \vdots b_t^k) \qquad (3\text{-}29)$$

Den Entscheidungsraum E_t einer bestimmten Periode t bilden alle mit dem Investitionsbudget der Vorperiode b_{t-1}^k möglichen Investitions- und Produktionsentscheidungen. Der Bereich der möglichen Entscheidungen reicht von überhaupt keiner zu tätigenden Investition bis zur vollen Ausschöpfung des verfügbaren Investitionsbudgets.

Eine Entscheidung $e_t \in E_t$ charakterisiert ein Entscheidungsvektor, der sich aus dem Vektor der Zahl der getätigten Investitionen x^{inv} und dem Vektor über die Höhe der Produktionsaktivitäten x_t^{prod} zusammensetzt:

---

1) Über die Lösungsmethode der Dynamischen Programmierung vgl.: S.Dreyfus, Dynamic Programming, in: R.L.Ackoff,aaO,p.211 ff. J.Piehler, Einführung in die Dynamische Optimierung, Basel 1966. J.S.Wentzel, Einführung in die Dynamische Programmierung, München 1966.

$$e_t = (x_t^{inv} \vdots x_t^{prod}). \qquad (3\text{-}30)$$

Als bekannt wird vorausgesetzt für alle Perioden ($t = 1,...,T$) der Gewinn der Produktionsaktivitäten auf Einheitsniveau c_t^{prod} und die Investitionskosten einer Einheit der knappen Produktionsfaktoren c_t^{inv}. Diese zu schätzenden Parameter werden mit dem Diskontierungsfaktor (2-9) multipliziert. Bekannt muß ferner sein die Produktionsmatrix A_t^{prod}, die sich in den einzelnen Perioden nur dann unterscheiden wird, wenn bestimmte Aktivitäten nicht in allen Perioden durchführbar sind und Voraussagen über technologische Veränderungen möglich sind. Festzulegen ist, welcher Anteil des Gewinnes in den einzelnen Perioden $p = (p_1,...,p_T)$ für Investitionszwecke zur Verfügung steht. Bekannt sein müssen die Daten des Ausgangszustandes $z_o = (b_o^{prod} \vdots b_o^k)$ von dem aus die Optimierung durchgeführt werden soll.

3.4.2.2 Die bedingte Optimierung für eine Periode t:

Aus den bereits bekannten Zuständen der Vorperiode $z_{t-1} \in Z_{t-1}$ wird der Prozeß durch die Entscheidungen $e_t \in E_t$ in die Zustände $z_t \in Z_t$ der Periode t überführt. Der Entscheidungsraum E_t wird durch alle Investitionsmöglichkeiten bestimmt, die mit dem aus der Vorperiode verfügbaren Investitionsbudget b_{t-1}^k durchführbar sind.

Zur Berechnung der neuen Zustandsvektoren $z_t = (b_t^{prod} \vdots b_t^k)$, $z_t \in Z_t$ gelten folgende Beziehungen:

Die Kapazität der Produktionsfaktoren ergibt sich aus der Summe der vorhandenen und der neu investierten Kapazitäten:

$$b_t^{prod} = b_{t-1}^{prod} + x_t^{inv} \text{, für alle } e_t \in E_t. \qquad (3\text{-}31)$$

Ein unverbrauchter Rest des Investitionsbudgets wird mit b_t^{ku} bezeichnet und entsteht aus der Differenz zwischen dem aus der Vorperiode erwirtschafteten Investitionsbudget und den tatsächlich angefallenen Investitionskosten:

$$b_t^{ku} = b_{t-1}^{k} + c_t^{inv} x_t^{inv}. \tag{3-32}$$

Das in der laufenden Periode erwirtschaftete und für die nächste Periode verfügbare Investitionsbudget setzt sich zusammen aus dem unverbrauchten Restinvestitionsbudget und dem Anteil des Produktionsgewinnes der laufenden Periode, der für Investitionen zur Verfügung gestellt wird:

$$b_t^{k} = b_t^{ku} + p_t g_t^{prod}. \tag{3-33}$$

Die bedingte Optimierung wird mittels der Linearen Programmierung durchgeführt. Für jedes $z_t \in Z_t$ ist eine Optimierungsaufgabe zu lösen, deren Dimension jedoch nur einen Bruchteil jener Aufgabe ausmacht, die bei der Lösungsmethode der Dynamischen Linearen Programmierung zu bewältigen war. Aus dem möglichen Produktionsbereich

$$X_t^{prod} = \left\{ x_t^{prod} \;\middle|\; A_t^{prod} x_t^{prod} \leq b_t^{prod},\; x_t^{prod} \geq 0 \right\} \tag{3-34}$$

ist für jedes $z_t \in Z_t$ jenes effiziente Produktionsprogramm $\bar{x}_t^{prod}$ zu berechen, das den Produktionsgewinn der laufenden Periode g_t^{prod} maximiert:

$$g_t^{prod}(z_t) = \max_{x_t^{prod} \in X_t^{prod}} \left\{ c_t^{prod} x_t^{prod} \right\}. \tag{3-35}$$

Die Investitionsentscheidung x_t^{inv} und das zugehörige effiziente Produktionsprogramm $\bar{x}_t^{prod}$ für jedes $z_t \in Z_t$ bestimmen die bedingte optimale Entscheidung

$$e_t^{o}(z_t) = (x_t^{inv} \vdots \bar{x}_t^{prod}). \tag{3-36}$$

Der Periodengewinn $g_t(z_t)$ für jedes $z_t \in Z_t$ setzt sich aus dem nichtverteilten Produktionsgewinn und dem unverbrauchten Investitionsbudget zusammen:

$$g_t(z_t) = (1-p_t)g_t^{prod}(z_t) + b_t^{ku}. \qquad (3\text{-}37)$$

Der bedingte maximale Gewinn für t Perioden ist einfach die Summe aus dem für ein bestimmtes $z_t \in Z_t$ ermittelten optimalen Periodengewinn $g_t(z_t)$ und dem bereits im vorangegangenen Lösungsschritt ermittelten bedingten maximalen Gewinn für (t-1) Perioden im Zustand z_{t-1}^o, der über die bedingte optimale Entscheidung $e_t^o(z_t)$ von z_t aus rückwärtsschreitend erreicht wird:

$$G_{1,\ldots,t}^o(z_t) = g_t(z_t) + G_{1,\ldots,t-1}^o(z_{t-1}^o) \; ,$$
$$\text{für alle } z_t \in Z_t \; , \qquad (3\text{-}38)$$

$$z_{t-1}^o \longleftarrow z_{t-1}^o(z_t, e_t^o(z_t)). \qquad (3\text{-}39)$$

3.4.2.3 Führt man das beschriebene iterative Lösungsverfahren vorwärtsschreitend für alle Perioden durch, dann erhält man in der letzten Stufe T den maximalen Gesamtgewinn $\bar{G}^T$ und den optimalen Endzustand $\bar{z}_T$. Durchläuft man von diesem Zustand über die bedingten optimalen Entscheidungen den Prozeß nochmals zurück bis zum Ausgangszustand z_o, dann erhält man den Vektor der optimalen Entscheidungen $\bar{e} = (\bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_T)$, der alle Informationen über das optimale Produktions- und Investitionsprogramm für alle Planungsperioden enthält.

3.5 Ein Vergleich der beiden Lösungsmethoden

Auf den ersten Blick bietet die Methode der Dynamischen Programmierung gegenüber der Methode der Dynamischen Linearen Programmierung : mehrere Vorteile.

Die Dimension der mehrmals durchzuführenden Optimierungsaufgabe beim Lösungsverfahren der Dynamischen Programmierung ist auf einen Bruchteil des Umfangs der einmal durchzuführenden Optimierungsaufgabe beim Lösungsverfahren der Dynamischen Linearen Programmierung zusammengeschrumpft.

Der repetitive Rechenvorgang der Dynamischen Programmierung benötigt nur ein Computerprogramm, das den Prozeß von der Periode (t-1) in die Periode t überführt. Dieses Programm wird sooft wiederholt, soviel Planungsperioden vorgegeben sind.

Ein einfaches Suchprogramm, das alle mit dem vorhandenen Investitionsbudget einer bestimmten Periode durchführbaren Investitionsentscheidungen feststellt, löst bei der Methode der Dynamischen Programmierung auf einfache Weise das Ganzzahligkeitsproblem für die Niveaus der Investitionsaktivitäten. Dagegen erfordert die Methode der Dynamischen Linearen Programmierung einen gemischt-ganzzahligen Algorithmus, wodurch rechentechnisch der Variablenanzahl Grenzen gesetzt sind.

Wohl können alle mehrperiodigen Entscheidungsprozesse als Probleme der Dynamischen Programmierung formuliert werden, die komplexe Problemstruktur einer konkreten Aufgabe kann diese Lösungsmethode aber wertlos machen. Dies tritt vor allem dann ein, wenn die Zahl der möglichen Zustände in einer Periode, im vorliegenden Modell bestimmt durch die Zahl der möglichen Investitionsentscheidungen, zu umfangreich wird. Da die Zahl der erreichbaren Zustände, wenn keine Vorschriften für den Endzustand des Prozesses vorgegeben sind, mit jeder Periode wächst, wird auch durch die Periodenzahl eine Grenze für eine vorteilhafte Anwendung der Dynamischen Programmierung sichtbar. Aus der Lösungsmethode der Dynamischen Programmierung ist deutlich zu ersehen, daß die optimale Entscheidungspolitik von der Länge des Prozesses abhängt.

Gegenüber der Dynamischen Linearen Programmierung bietet nun die Lösung der Dynamischen Programmierung den Vorteil, daß die Länge des Prozesses leicht variiert werden kann. Man läßt das Iterationsverfahren einfach weiterlaufen. Dadurch kann die Sensitivität des optimalen Investitionspfades in Abhängigkeit vom Planungshorizont überprüft werden.

LITERATUR

Abkürzungen:

MS Management Science

OR Operations Research, Journal of the Operations Research Society of America

ZfB Zeitschrift für Betriebswirtschaft

[1] ALBERT, H., Marktsoziologie und Entscheidungslogik, Berlin 1967.

[2] ACKOFF, R.L., Progress in Operations Research, Vol.1. New York 1961.

[3] ARNOFF, L.E. und S.S. SENGUPTA, Mathematical Programming, in: [2] .

[4] BELLMAN, R., Dynamic Programming, Princeton 1957.

[5] CHARNES, A. und W.W.COOPER, Management Models and Industrial Applications of Linear Programming, Vol.1, New York 1961.

[6] DANTZIG, G.B., Recent Advances in Linear Programming, in: MS, 2 (1956), p. 131 ff.

[7] DANTZIG, G.B., On the Status of Multistage Linear Programming Problems, in: MS, 6 (1960), p.53 ff.

[8] DORFMAN, R., P.A. SAMUELSON und R.M. SOLOW, Linear Programming and Economic Analysis New York 1958.

[9] DREYFUS, S., Dynamic Programming, in: [2]

[10] DRIEBEEK, N.J., An Alorithm for the Solution of Mixed Integer Programming Problems, in: MS, 12 (1966), p. 576 ff.

[11] GALE, D., The Theory of Linear Economic Models, New York 1960.

[12] HADLEY, G., Linear Programming, Reading, Mass., 1962.

[13] HEALY, W.C., Multiple Choice Programming, in: OR, 13 (1965), p. 122 ff.

[14] HENDERSON, J.M. und R.E. QUANT, Microeconomic Theory, New York 1968.

[15] JACOB, H., Neuere Entwicklungen in der Investitionsrechnung, in: ZfB, 34 (1964), p.487 ff.

[16] KADE, G., Die Grundannahmen der Preistheorie, Berlin 1962.

[17] KENDRICK, D.A., Programming Investment in the Process Industries, Cambridge, Mass. 1967.

[18] LUTZ, F. und V., The Theory of Investment of the Firm, Princeton 1951.

[19] PIEHLER, J., Einführung in die Dynamische Optimierung, Basel 1966.

[20] SCHÖNFELD, K.P., Effizienz und Dualität in der Aktivitätsanalyse, Diss. FU Berlin 1964.

[21] SEELBACH, H., Planungsmodelle in der Investitionsrechnung, Würzburg 1967.

[22] SMITH, V.L., Investment and Production, Cambridge, Mass. 1961.

[23] WENTZEL, J.S., Elemente der Dynamischen Programmierung, München 1966