GLEICHGEWICHTSTHEORIE:
DYNAMISCHE MODELLE UND STABILITÄT

Immanuel M. BOMZE*

Forschungsbericht/
Research Memorandum No. 176

Oktober 1982

* Scholar am Institut für Höhere Studien

Z u s a m m e n f a s s u n g

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Anwendung der qualitativen Untersuchungsmethode von Differentialgleichungssystemen auf einige Modelle der ökonomischen Theorie. Im ersten Abschnitt werden Tâtonnement-Systeme behandelt, wobei zunächst auf die Probleme lokaler Stabilität bei einigen Modellen eingegangen wird. Sodann folgt eine Analyse der globalen Stabilität bei einem speziellen, jedoch verallgemeinerbaren dynamischen Modell.

Der zweite Abschnitt ist der Untersuchung globaler Stabilität einiger dynamischer Nicht-Tâtonnement - Systeme gewidmet, wobei verschiedene Stabilitätsbegriffe eingeführt und untersucht werden. Abschließend werden auch Erwartungen in diese Überlegungen einbezogen.

A b s t r a c t

This paper deals with the application of the qualitative investigation method of differential equations to some models in economic theory. In the first section, the so-called tâtonnement-systems are treated. A discussion of problems of local stability is followed by an analysis of global stability in a special, yet generalizeable dynamic model.

The second section is concerned with the investigation of global stability in some dynamic non-tâtonnement systems. Different kinds of stability notions are introduced and analyzed; finally, expectations are taken into consideration.

Inhaltsverzeichnis

0. Einleitung

Der Begriff des Gleichgewichts als ausgeglichener Zustand, der aus einander entgegengesetzten Kräften resultiert, wurde aus der Physik, insbesondere aus der Mechanik in die ökonomische Theorie übertragen und entwickelte sich zu einem ebenso fundamentalen wie vielseitigen Konzept.

In seiner engeren Bedeutung ist das Gleichgewicht ein Zustand, in dem „alles stillsteht". Allerdings sind unverändert ruhende Objekte oder Situationen klarerweise kein dankbarer oder interessanter Forschungsgegenstand. Der wirkliche Gehalt des Gleichgewichtskonzepts liegt daher nicht so sehr in diesem Zustand selbst, sondern mehr in den „Gesetzen der Veränderung", mit denen er in Beziehung steht; von Interesse sind daher etwa die Fragen, ob es Tendenzen zu oder weg von einem Gleichgewicht oder zyklische Zustandsänderungen um ein Gleichgewicht herum gibt. Davon abgesehen gibt es natürlich die Problematik der Existenz, Anzahl bzw. Eindeutigkeit von Gleichgewichten.

Die vorliegende Arbeit soll einige dynamische Aspekte der ökonomischen Gleichgewichtstheorie unter besonderer Berücksichtigung der Stabilität behandeln. Auch der Begriff der Stabilität hat wie der des Gleichgewichts eine Vielzahl von Bedeutungen : manchmal stellt er etwa, wie im Ausdruck „stabiles Preisniveau", eine verallgemeinerte Art von Gleichgewicht („Beinahe-Gleichgewicht") dar, womit ein Zustand gemeint ist, der sich - - relativ gesehen - nur wenig ändert, wenn beispielsweise Preise innerhalb gewisser Grenzen verbleiben. In der Mathematik wird diese Situation „ (lokal) stabil" genannt, was bedeutet, daß „kleine Störungen" eines Gleichgewichts keine „großen Auswirkungen" haben können; dies ist etwa dann der Fall, wenn in der Nähe eines Gleichgewichts nur periodische Zustandsänderungen auftreten.

Häufiger jedoch - wie auch in dieser Arbeit - versteht man unter Stabilität einen Trend der Zustandsänderungen zum Gleichgewicht hin, das dann mathematisch „asymptotisch stabil" heißt. Im folgenden sei also mit „stabil" immer „asymptotisch stabil" gemeint. Eine Unterteilung dieses Begriffs erweist sich als äußerst nützlich :

Tritt der vorhin erwähnte Trend zum Gleichgewicht nur bei genügend geringen Abweichungen von diesem auf, spricht man von einem „lokal (asymptotisch) stabilen" , ist er aber bei beliebigen Zuständen vorhanden, von einem „global (asymptotisch) stabilen" Gleichgewicht.

Die Modellierung von Vorgängen mittels dynamischer Systeme hat gegenüber „statischen" Methoden den Vorteil, nicht nur einzelne Situationen, sondern die gesamte zeitliche Entwicklung der untersuchten Phänomene zu beschreiben, weshalb solche Untersuchungen über die sogenannte Gleichgewichtsanalyse hinausgehen. Bei der Verwendung von Differentialgleichungssystemen muß jedoch darauf geachtet werden, daß die üblichen Bedingungen der eindeutigen Lösbarkeit zur Folge haben, daß ein Prozeß, der in einer Situation außerhalb des Gleichgewichts beginnt, nach endlicher Zeit nie ins Gleichgewicht kommen kann, ja unter Umständen sich mit fortschreitender Zeit nicht einmal einem Gleichgewicht nähern muß, sodaß der Untersuchung von Stabilitätsproblemen schon allein aus diesen Gründen eine zentrale Bedeutung zukommt.

In Terminologie und Vorgangsweise folgen wir im wesentlichen $\langle 7 \rangle$, die Interpretation der Tâtonnement-Systeme in Abschnitt I ist aus $\langle 2 \rangle$ entnommen; übrigens ist der hier verwendete Begriff des Tâtonnements nicht der ursprünglich von Walras verwendete, der darunter einen diskreten Anpassungsprozeß verstand und diesen mit eher statischen Methoden untersuchte.

Nun zur Zeichensetzung : der Quantor $\forall$ heißt „für alle" , $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ bedeuten Implikation bzw. Äquivalenz und $\square$ kennzeichnet das Ende eines Beweises. Geschwungene Klammern $\{\}$ umgeben Elemente einer Menge, während eckige $[\,]$ oder runde $(\,)$ eine Anordnung von Ausdrücken (Paar, Tripel, Vektor, Matrix) andeuten soll. Die Element- bzw. Teilmengenrelation wird mit $\in$ bzw. $\subseteq$ bezeichnet; die Zeichen $\dot{\cup}$, $\cap$, $\setminus$ bedeuten disjunkte Mengenvereinigung bzw. -durchschnitt bzw. -differenz sowie Pfeile $\mapsto$, $\to$ Funktionen bzw. Grenzübergänge. Die Vorzeichenfunktion wird mit sgn und die Differentiation nach einem allgemeinen Argument bzw. der Zeit t mit einem hochgestellten Strich $'$ bzw. Punkt $\dot{}$ abgekürzt. Spitzklammern $\langle\ \rangle$ beinhalten einen Hinweis auf das Literaturverzeichnis. Zuletzt eine Konvention : Summen ($\sum$) über der leeren Indexmenge wird (zweckmäßigerweise) der Wert Null zugewiesen.

I. Tâtonnement - Systeme

Bei Tâtonnement-Systemen ist der Handel nur im Gleichgewicht erlaubt; ein (fiktives) Modell dafür wäre ein Auktionator, der die von den Wirtschaftsagenten verlautbarten Transaktionsangebote entgegennimmt und, falls diese miteinander vereinbar sind („im Gleichgewicht"), die Transaktionen vermittelt oder zuläßt, andernfalls jedoch die ursprünglich gegebenen Preise nach einer bestimmten „Regel" - bei den zu besprechenden Modellen durch Differentialgleichungs-Systeme dargestellt - ändert, jedoch keine Transaktionen zuläßt, worauf die Agenten wiederum ihre - durch die Preisänderung im allgemeinen von den früheren verschiedenen - Transaktionswünsche bekanntgeben und die oben beschriebene Prozedur erneut beginnt.

Wie schon in der Einleitung erwähnt, implizieren die mathematischen Eigenschaften der meisten dynamischen Modelle die Unendlichkeit eines solchen Prozesses, der Auktionator wird im günstigsten Fall (der Stabilität) mit fortschreitender Zeit die divergierenden Offerte immer mehr einander annähern können, es wird jedoch nie zu einem Handel kommen. Diesen kritischen Aspekt vermeiden die in Abschnitt II besprochenen Nicht-Tâtonnement - Systeme.

Im folgenden wird vorausgesetzt, daß ein Gesamt-Substitutionseffekt eintritt, der sich in dem Phänomen äußert, daß sich durch die Erhöhung des Preises eines Gutes bei gleichbleibenden Preisen der anderen Güter der Nachfrage-Überschuß dieser Güter erhöht. Die mathematische Formulierung dieses Sachverhaltes wird in der Folge mit (GS) bezeichnet.

Zunächst wird zusätzlich das Konzept des „Numeraire" eingeführt, welches ein nichtproduziertes, geldähnliches Gut darstellt, dessen (gleichbleibender) Preis einen Vergleich verschiedener Güter ermöglichen soll. Davon wird jedoch bei der Behandlung der globalen Stabilität wieder abgegangen.

Doch nun zur fomalen Beschreibung der Tâtonnement - Systeme :

I.1. Lokale Stabilität beim Walras - Prozeß

Bezeichnungen : Sei $\mathbb{R}^n$ der n-dimensionale euklidische Raum,

$\mathbb{R}^n_+ =: \{ P = [P_1,\dots,P_n] \in \mathbb{R}^n / \ P_i > 0 \ \forall i \in \{1,\dots,n\} \}$.

Wir betrachten n Güter $\{1,\dots,n\}$, wobei Gut n das „Numeraire" sei; sei $P_i > 0$ der Preis des Gutes i , $i \in \{1,\dots,n\}$ und $P = [P_1,\dots,P_n] \in \mathbb{R}^n_+$.

Sei $E_i(P)$ die Überschuß-Nachfrage für Gut i zu Preisen P , wobei $P \mapsto E_i(P)$ als differenzierbar vorausgesetzt wird.

Seien F_i differenzierbar mit $F_i' > 0$ und $F_i(0) = 0$ für $i \in \{1,\dots,n-1\}$ und $F_n \equiv 0$.

Mit „Walras-Prozeß" wird das System

$$\dot{P}_i(t) = F_i(E_i(P)) \quad , \ i \in \{1,\dots,n\} \tag{I.1}$$

bezeichnet.

I.1.1 Definition : $\overline{P} \in \mathbb{R}^n_+$ heißt „isoliertes Gleichgewicht (von (I.1))", wenn es eine Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n_+$ von $\overline{P}$ gibt, sodaß $\overline{P}$ der einzige Punkt in U ist, der $E_i(\overline{P}) = 0 \ \forall i \in \{1,\dots,n\}$ erfüllt.

Ein isoliertes Gleichgewicht von (I.1) $\overline{P}$ heißt „lokal stabil", wenn es eine Umgebung $V \subseteq U$ von $\overline{P}$ gibt, sodaß für jede Lösung $P(t/P_o)$ von (I.1) (diese erfülle $P(0) = P_o$ sowie (I.1) und sei dadurch eindeutig bestimmt) mit $P_o \in V$ gilt: $P(t/P_o) \xrightarrow[t \to +\infty]{} \overline{P}$.

Die Linearisierung von (I.1) um ein isoliertes Gleichgewicht $\overline{P}$ ergibt

$$\left.\begin{aligned} \dot{P}_i(t) &= F_i' \sum_j E_{ij}(\overline{P})(P_j - \overline{P}_j) \quad , \ i \in \{1,\dots,n-1\} , \\ P_n(t) &= \overline{P}_n \ . \end{aligned}\right\} \tag{I.2}$$

Dabei seien $E_{ij}(\overline{P}) = \dfrac{\partial E_i}{\partial P_j} (P = \overline{P})$, $i \in \{1,\dots,n-1\}$, $j \in \{1,\dots,n\}$.

I.1.2 Lemma : Hinreichend für die lokale Stabilität von $\bar{P}$ unter (I.1) ist die Stabilität von $\bar{P}$ unter (I.2); diese ist äquivalent zu :

$$\mathrm{Re}\,\lambda_i < 0 \quad \forall i \in \{1,\ldots,n-1\}\text{ , wobei } \{\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1}\} \text{ die Eigenwerte}$$

(EW) der Matrix $A = \left[F_i{}'E_{ij}(\bar{P})\right]_{i,j\in\{1,\ldots,n-1\}}$, also die Wurzeln des Polynoms (in λ) det ($A - \lambda I$) über den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ sind. (Schreiben $z \in \mathbb{C}$ als $z = \mathrm{Re}\,z + i.\mathrm{Im}\,z$, $i^2 = -1$.)

ohne Beweis (siehe <5>!).

I.1.3 Annahme : (GS) gilt, also $E_{ij}(P) > 0 \quad \forall P \in \mathbb{R}^n_+ , \ \forall i \neq j$.

Für genügend großes $s \in \mathbb{R}$ sind die Eintragungen der Matrix $M =: sI + A$ (I bezeichne wie in I.1.2 die Identitätsmatrix) unter I.1.3 alle positiv.

I.1.4 Lemma : Sei M eine quadratische Matrix mit lauter positiven Eintragungen $m_{ij} > 0 \ \forall i,j$. Dann gilt:

(a) es gibt einen EW $r > 0$ von M (r heißt „Frobenius-EW");
(b) zu r gibt es $x_r, y_r \in \mathbb{R}^n_+$ mit $Mx_r = r.x_r$, $M^t y_r = r.y_r$;
(c) wenn λ ein EW von M ist, gilt $|\lambda| \leq r$;
(d) es gilt $\min\limits_i \sum\limits_j m_{ij} \leq r \leq \max\limits_i \sum\limits_j m_{ij}$.

ohne Beweis (siehe <4>!).

I.1.5 Lemma : Für M wie in I.1.4 gilt ($u,v \in \mathbb{R}^n$, $u < v \Leftrightarrow v - u \in \mathbb{R}^n_+$):

Wenn für ein $x \in \mathbb{R}^n_+$, $s \in \mathbb{R}$ $Mx < s.x$ oder $M^t x < s.x$ gilt, dann ist $r < s$.

Beweis : wegen I.1.4 gibt es $y_r \in \mathbb{R}^n_+$ mit $M^t y_r = r.y_r$, wobei M^t die transponierte Matrix zu M bedeutet. Da $y_r \in \mathbb{R}^n_+$ und $Mx < s.x$, gilt $r.y_r^t x = (M^t y_r)^t x = y_r^t M x < y_r^t s.x = s.y_r^t x$; wegen $x, y_r \in \mathbb{R}^n_+$ gilt aber $y_r^t x > 0$, woraus $r < s$ folgt; ähnlich für $M^t x < s.x$ (statt y_r x_r).$\square$

Mit „Gesetz von Walras" wird die Gleichung

$$\sum_j P_j E_j(P) = 0 \qquad (I.3)$$

bezeichnet.

I.1.6 Bemerkung : (I.3) folgt aus der Budgetbeschränkung der an der Wirtschaft partizipierenden Individuen; näheres entnehme man Abschnitt II .

I.1.7 Annahme : Nur die relativen Preise können die Nachfrage beeinflussen, mathematisch bedeutet dies die Homogenität vom Grad 0 der Nachfrage-Überschußfunktionen : $E_i(s.P) = E_i(P) \ \forall i,s,P$

Mit diesen Vorbereitungen folgt ganz leicht

I.1.8 Satz : Setzt man (I.3) oder I.1.7 voraus, so folgt aus I.1.3 die lokale Stabilität jedes isolierten Gleichgewichtes $\overline{P}$ von (I.1) .

Beweis : (a) Aus I.1.7 folgt $\sum_j E_{ij}\overline{P}_j = 0$ (Satz v. Euler).

Deshalb ist für A wie in I.1.2 und für $x =: [\overline{P}_1,\dots,\overline{P}_{n-1}] \in \mathbb{R}_+^{n-1}$

$Ax = -y$ mit $y =: [F_1' E_{1n}\overline{P}_n,\dots,F_{n-1}' E_{n-1,n}\overline{P}_n] \in \mathbb{R}_+^{n-1}$ (wegen I.1.3), da ja $\sum_{j<n} E_{ij}\overline{P}_j = -E_{in}\overline{P}_n \ \forall i$ gilt. Für $M = s.I + A$, wobei $s \in \mathbb{R}$ so groß ist, daß M nur positive Eintragungen hat, ist daher $Mx < s.x$, für den Frobenius-EW r von M gilt nach I.1.5 also $r < s$. Es gilt : λ EW von $A \Rightarrow \lambda + s$ EW von $M \Rightarrow |\lambda + s| \leq r \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathrm{Re}(\lambda + s) \leq r \Rightarrow \mathrm{Re}\,\lambda \leq r - s < 0$, was nach I.1.2 zu zeigen war.

(b) Wegen (I.3) gilt :

$$\frac{\partial}{\partial P_j}\left(\sum_{i<n} E_i\overline{P}_i\right) = -\frac{\partial}{\partial P_j}\left(E_n\overline{P}_n\right), \text{ also } \sum_{i<n} E_{ij}\overline{P}_i = -E_{nj}\overline{P}_n$$

$\forall j < n$, da ja $E_j(\overline{P}) = 0$ ist. Für obige A , x , M und für

$z =: [F' E_{n1}\overline{P}_n,\dots,F' E_{n,n-1}\overline{P}_n] \in \mathbb{R}_+^n$ (wegen I.1.3 ; dieser Beweisteil bedarf der zusätzlichen, in (a) nicht benötigten Annahme $F_i'(o) = F'$ $\forall i < n$, was einer Änderung der Maßeinheiten gleichkommt) gilt daher $A^t x = -z$, also analog (a) $M^t x < s.x$; mit I.1.5 gilt λ EW von $A \Rightarrow \mathrm{Re}\,\lambda < 0$ (analog (a)). □

I.2. Lokale Stabilität bei der Hicks-Keynes - Dynamik

Anders als in I.1. , sollen jetzt nicht nur die gegenwärtigen, sondern auch die erwarteten zukünftigen Preise die Nachfrage beeinflussen; dabei wird ein funktioneller Zusammenhang zwischen den jetzigen und den erwarteten Preisen postuliert und wie in I.1.7 wird nur den relativen Preisen ein Einfluß auf die Nachfrage zugebilligt.

Bezeichnungen : Wie in I.1 seien $P = [P_1,\dots,P_n] \in \mathbb{R}^n_+$ die gegenwärtigen Preise der Güter $\{1,\dots,n\}$ (mit Numeraire n) sowie $q = [q_1,\dots,q_n] \in \mathbb{R}^n_+$ die erwarteten; seien f_i , $i \in \{1,\dots,n-1\}$, homogene Funktionen vom Grad 1 sowie $E_i = E_i(P,q)$ die Nachfrageüberschuß-Funktionen (homogen vom Grad 0 in (P,q)), $i \in \{1,\dots,n\}$. Sowohl f_i als auch E_i seien differenzierbar.

Unter der „Hicks-Keynes - Dynamik" versteht man

$$\left.\begin{aligned} \dot{P}_i(t) &= E_i(P,q) \quad , \ i \in \{1,\dots,n-1\} \ , \\ q_i(t) &= f_i(P) \quad , \ i \in \{1,\dots,n-1\} \ , \\ P_n &= q_n \end{aligned}\right\} \qquad (I.4)$$

I.2.1 Bemerkung : Den (linear homogenen) Einfluß der absoluten Gegenwartspreise auf die (absoluten) künftigen Preise spiegelt die Homogenität der f_i wieder; der erwartete Preis des Numeraires ist dem (konstanten) jetzigen Preis gleich.

I.2.2 Definition : $(\overline{P},\overline{q}) \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+$ heißt „Gleichgewicht (von (I.4))", falls $E_i(\overline{P},\overline{q}) = 0 \ \forall i \in \{1,\dots,n\}$, $\overline{q}_i = f_i(\overline{P}) \ \forall i \in \{1,\dots,n-1\}$ und $\overline{q}_n = \overline{P}_n$ gilt. Die Begriffe „isoliert" und „lokal stabil" gelten sinngemäß analog zu I.1.1 .

Die Linearisierung von (I.4) um ein isoliertes Gleichgewicht $(\overline{P},\overline{q})$ ergibt

$$\left.\begin{aligned} \dot{P}_i(t) &= \sum_{j<n} E_{ij}(P_j - \overline{P}_j) + \sum_{j<n}\sum_{k<n} E'_{ij}F_{jk}(P_k - \overline{P}_k) , \quad i\in\{1,\dots,n-1\} \\ P_n(t) &= \overline{P}_n \end{aligned}\right\} \quad (I.5)$$

Hier sind $E_{ij} =: \frac{\partial E_i}{\partial P_j}$, $E'_{ij} =: \frac{\partial E_i}{\partial q_j}$ und $F_{ij} =: \frac{\partial f_i}{\partial P_j}$,

wobei alle obigen Ausdrücke an der Stelle $(P,q) = (\overline{P},\overline{q})$ ausgewertet sind.

Seien $A =: [E_{ij}]_{i,j\in\{1,\dots,n-1\}}$,

$B =: [E'_{ij}]_{i,j\in\{1,\dots,n-1\}}$ und

$C =: [F_{ij}]_{i,j\in\{1,\dots,n-1\}}$. Dann ergibt sich unter

<u>I.2.3 Annahme</u> : (GS) gilt, also : $E_{ij} > 0 \ \forall i \neq j$, $i,j\in\{1,\dots,n\}$ und $E'_{ij} > 0 \ \forall i,j\in\{1,\dots,n-1\}$

sowie unter

<u>I.2.4 Annahme</u> : die Erwartungselastizitäten sind nichtnegativ, also $P_jF_{kj}/q_k \geq 0 \ \forall j,k\in\{1,\dots,n-1\}$ ($\Rightarrow F_{kj} \geq 0 \ \forall j,k < n$) , das heißt,

daß alle Eintragungen von $A + BC$ außerhalb der Hauptdiagonale positiv sind, daß also für genügend großes $s\in\mathbb{R}$ wieder $M =: s.I + A + BC$ lauter positive Eintragungen hat.

Damit zeigt man

<u>I.2.5 Satz</u> : Unter I.2.3 und I.2.4 gilt :

(a) bei statischen Erwartungen, also wenn $q_i = P_i \ \forall i\in\{1,\dots,n-1\}$, ist $(\overline{P},\overline{q})$ unter (I.5) stabil;

(b) bei genügend großen Erwartungselastizitäten ist $(\overline{P},\overline{q})$ unter (I.5) instabil;

(c) hinreichend für Instabilität ist ebenfalls $\sum_j E_{jj} + E'_{jj}F_{jj} > 0$.

<u>Beweis</u> : (a) Für $f_i(P) = P_i$ gilt $C = I$, also $A + BC = A + B$, wegen der Homogenität der E_i ergibt sich analog zu I.1.8.a die Behauptung (ersetze A durch $A + B$).

(b) Sei $s \in \mathbb{R}$ fest und so groß, daß $M = s.I + A + BC$ nur positive Eintragungen hat; wegen I.1.4.d ist für genügend große F_{kj}. (also für genügend große Erwartungselastizitäten $\overline{P}_j F_{kj} / \overline{q}_k$) der Frobenius-EW r von M größer als s, also ein EW von $A + BC$, nämlich $r - s > 0$, sodaß man aus I.1.2 Instabilität folgern kann.

(c) Bekanntlich gilt für die EW $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ von $A + BC$:

$$\sum_j \lambda_j = sp(A + BC) = \sum_{j<n} E_{jj} + \sum_{j<n} \sum_{k<n} E'_{jk} F_{kj} \geq$$

$$\geq \sum_{j<n} (E_{jj} + E'_{jj} F_{jj}) > 0$$, da ja $E'_{jk} F_{kj} \geq 0 \ \forall j,k<n$; deshalb muß mindestens ein EW von $A + BC$ einen positiven Realteil haben, woraus mit I.1.2 Instabilität folgt. □

<u>I.2.6 Bemerkung</u> : Wie man im Anschluß an I.2.5 zeigen kann, hat die Einführung von Fixpreisen für diejenigen Güter, deren zugehörige Hauptdiagonalelemente in $A + BC$ positiv sind, eine stabilisierende Wirkung auf (I.5), vorausgesetzt, es gibt einige nichtpositive Hauptdiagonalelemente in $A + BC$ (siehe <7>!).

I.3. Variante mit extrapolativ.. erwarteten Preisen

Extrapolative Erwartungen werden aus Vorhersagen im Gleichgewicht unter Verwendung geschätzter Nachfrageüberschuß-Funktionen abgeleitet. Werden die Erwartungskoeffizienten auf diese Weise errechnet, kann unter Voraussetzung von (GS) lokale Stabilität gezeigt werden. Mit dem Ansatz

$$\left.\begin{array}{ll} q_i = P_i + \eta_i \cdot \dot{P}_i , & i \in \{1,\ldots,n-1\} \\ q_n = P_n & \end{array}\right\} \quad (I.6)$$

erhält man statt (I.5) für die Linearisierung um ein isoliertes Gleichgewicht von (I.4), $(\overline{P},\overline{q})$ nach (I.6) $\overline{q}_i = \overline{P}_i \ \forall i$, also

$$\left.\begin{array}{l} \dot{P}_i(t) = \sum_{j<n} E_{ij}(P_j - \overline{P}_j) + \sum_{j<n} E'_{ij}(q_j - \overline{P}_j) \quad \forall i \in \{1,\ldots,n-1\} , \\ P_n(t) = \overline{P}_n \quad . \end{array}\right\} (I.7)$$

Dabei sind η_i , $i\in\{1,\ldots,n-1\}$, die (konstanten) Erwartungskoeffizienten und E_{ij} , E'_{ij} wie in (I.5). Anstatt I.2.3 , I.2.4 unterstellen wir nun nur $E_{ij} > 0 \; \forall i \neq j$, $i,j\in\{1,\ldots,n-1\}$ und :

<u>I.3.1 Annahme</u> : Spekulanten, die sich auf Gut i spezialisiert haben, werden nur von q_i , nicht aber von q_j , $j \neq i$, beeinflußt, was formal $E'_{ij} = 0 \;\; \forall i \neq j$, $i,j\in\{1,\ldots,n-1\}$ bedeutet.

Weiters wird für den Markt von Gut i angenommen, daß die geschätzte Nachfrageüberschuß-Funktion $\dot{E}_i^{(s)}$ nur von P und $\dot{P}_i$ abhängt und daß der künftige Preis q_i als Gleichgewichtspreis auf diesem Markt vorhergesagt wird unter der Annahme, daß sich die anderen Preise nicht verändern, also $q_j = P_j \;\; \forall j \neq i$ gilt :

$$E_i^{(s)} = \sum_j a_{ij}P_j + b_i\dot{P}_i + c_i , \tag{I.8}$$

wo a_{ij} , b_i , c_i Konstanten sind; für q_i ergibt sich nach obigem

$$0 = a_{ii}q_i + \sum_{j\neq i} a_{ij}P_j + b_i.0 + c_i . \tag{I.9}$$

Für $\dot{P}_i = E_i^{(s)}$ ergibt sich aus (I.8) und (I.9) leicht

$$q_i = P_i + (b_i - 1)/a_{ii}.\dot{P}_i , \tag{I.10}$$

also

<u>I.3.2 Annahme</u> : $\eta_i = (b_i - 1)/a_{ii} \;\; \forall i\in\{1,\ldots,n-1\}$.

<u>I.3.3 Satz</u> : Unter I.2.3 , I.3.1 und I.3.2 ist (I.7) stabil.

<u>Beweis</u> : Setzt man (I.10) in (I.7) ein und vergleicht dann mit (I.8) ($E_i^{(s)} = E_i$) , so erhält man

$$a_{ii} = E_{ii} + E'_{ii} , \quad i\in\{1,\ldots,n-1\} , \tag{I.11}$$

$$a_{ij} = E_{ij} , \quad i \neq j , \quad i,j\in\{1,\ldots,n-1\} \text{ und} \tag{I.12}$$

$$b_i = E'_{ii}(b_i - 1)/a_{ii} , \quad i\in\{1,\ldots,n-1\} . \tag{I.13}$$

Aus (I.11),(I.13) hat man $b_i = (b_i - 1)E'_{ii}/(E_{ii} + E'_{ii})$, also

$E_{ii}/E'_{ii} + 1 = (b_i - 1)/b_i = 1 - 1/b_i$ oder

$$b_i = - E'_{ii}/E_{ii} , \quad i\in\{1,\ldots,n-1\} . \tag{I.14}$$

Da wie in I.2 die Nachfrageüberschuß-Funktionen $E_i = E_i(P,q)$ als homogen vom Grad 0 vorausgesetzt werden, erhält man nach dem Satz von Euler :

$$0 = \sum_j E_{ij}\overline{P}_j + \sum_j E'_{ij}\overline{q}_j = (E_{ii} + E'_{ii})\overline{P}_i + \sum_{j\neq i} E_{ij}\overline{P}_j \text{ , also}$$

$$E_{ii} + E'_{ii} = -\sum_{j\neq i} E_{ij}\overline{P}_j/\overline{P}_i < 0 \quad (\text{ nach I.3.1 und weil } E_{ij} > 0 \text{) ,}$$

weshalb $0 < b_i < 1 \quad \forall i \in \{1,\ldots,n-1\}$ gelten muß, da nach (I.3)

$$0 = \frac{\partial}{\partial P_i}\Big(\sum_j E_j \overline{P}_j\Big) = 0 + E_{ii}\overline{P}_i + \sum_{j\neq i} E_{ji}\overline{P}_j \text{ , also } E_{ii} < 0 \text{ ist}$$

und zusätzlich zu I.3.1 $E'_{ii} > 0$ (aus denselben Gründen wie in I.2.3) vorausgesetzt wird.

Setzt man nun
$$a'_{ij} =: a_{ij}/(1 - b_i) > 0 \text{ , } i \neq j \text{ , } i,j \in \{1,\ldots,n-1\} \text{ ,}$$
$$a'_{ii} =: a_{ii}/(1 - b_i) \text{ , } i \in \{1,\ldots,n-1\}$$

und $A' =: [a'_{ij}]_{i,j\in\{1,\ldots,n-1\}}$, so erhält man wegen (I.8) und

$$0 = \dot{\overline{P}}_i = \sum_j a_{ij}\overline{P}_j + b_i.0 + c_i \text{ sowie wegen (I.8)}$$

und $\dot{P}_i(t) = E_i = E_i^{(s)}$ statt (I.7) nun $\dot{P}' = A'(P' - \overline{P}')$,

sodaß wegen der ähnlichen Gestalt von A' wie von A in I.1.8 analog dort weiter geschlossen werden kann (statt I.1.7 hat man jetzt die Homogenität von $E_i(P,q)$, welche nun $-A'\overline{P}' \in \mathbb{R}_+^n$ sichert); dabei seien $P' =: [P_1,\ldots,P_{n-1}]$ und $\overline{P}' =: [\overline{P}_1,\ldots,\overline{P}_{n-1}]$. $\square$

I.4. Globale Stabilität

1. Betrachten wir nun n Güter $\{1,\ldots,n\}$ ohne Numeraire, deren Preise P_i , $i\in\{1,\ldots,n\}$ folgender Dynamik unterworfen seien:

$$\dot{P}_i(t) = P_i^{\alpha}.E_i(P) \text{ , } i\in\{1,\ldots,n\} \text{ .} \tag{I.15}$$

Dabei seien wie vorher $E_i(P)$ der Nachfrageüberschuß nach Gut i bei Preisen $P =: [P_1,\ldots,P_n]$ sowie $-\infty < \alpha \leq 2$.

I.4.1 Bemerkung : In <7> wird nur der Fall $\alpha = 0$, also der Walras - Prozeß (I.1) mit $F_i(E_i) = E_i$ behandelt; die vorliegende Verallgemeinerung wurde (für den Fall $\alpha = 2$) von <6> angeregt, ohne jedoch näher darauf einzugehen.

Wieder unterstellen wir (I.3) , I.1.7 sowie außerdem :

I.4.2 Annahme : Es gibt $\varepsilon > 0$ sodaß es mit

$N =: \{P \in \mathbb{R}^n_+ \ / \ P_i > \varepsilon > 0 \ \forall i \in \{1,\ldots,n\}\}$ für $P_o \in N$ genau eine Lösung von (I.15) $P(t/P_o)$ gibt mit $P(0/P_o) = P_o$; es gilt weiters $P(t/P_o) \in N \ \forall t$ sowie : $P_o \mapsto P(t/P_o)$ ist stetig $\forall t$.

I.4.3 Bemerkung : Hinreichend für I.4.2 ist die leicht interpretierbare Voraussetzung über die Nachfrage :

$\liminf_{P \to L_i} E_i(P) > 0 \ \forall i \in \{1,\ldots,n\}$, wobei $P \in \mathbb{R}^n_+$ bleibt und

$L_i =: \{P = [P_1,\ldots,P_n] \in \mathbb{R}^n \ / \ P_i = 0 \ , \ P_j > 0 \ \forall j \neq i\}$ ist,

was bedeutet, daß bei verschwindend kleinem Preis für das Gut i der Nachfrageüberschuß danach unabhängig von den (positiven) Preisen der anderen Güter durch eine positive Konstante nach unten beschränkt ist.

I.4.4 Bemerkung : Wie man leicht nachprüft, hat die Dynamik (I.15) mit $\alpha = 2$ die Eigenschaft, daß ihre Gestalt bei gleichzeitiger, proportionaler Veränderung von P und $E(P) =: [E_1(P),\ldots,E_n(P)]$ unverändert bleibt, also der Übergang $P \mapsto c.P$, $E \mapsto 1/c.E$ (I.15) invariant läßt. (Hinweis: nach Abschnitt II wird plausibel, warum der Übergang $P \mapsto c.P$ und $X \mapsto c.X$, wobei X die Warenmengen im Besitz der Wirtschaftsagenten repräsentiert, bereits auch $E \mapsto 1/c.E$ nach sich zieht. Siehe auch <6>!)

Die Eigenschaft (GS) hat auch hier schwerwiegende Folgen : sie sichert in einem gewissen Sinne die Eindeutigkeit von Gleichgewichten unter (I.15), genauer gesagt gilt :

I.4.5 Lemma : Seien P , $Q \in \mathbb{R}^n_+$ Gleichgewichte unter (I.15), also $E_i(P) = E_i(Q) = 0 \ \forall i \in \{1,\ldots,n\}$; dann gilt unter I.1.3 (GS): es gibt ein $c > 0$ mit $P = c.Q$, falls auch I.1.7 gilt.

Beweis<1>: Sei $P = [P_1,\dots,P_n]$, $Q = [Q_1,\dots,Q_n]$, $J \in \{1,\dots,n\}$ sodaß $P_J/Q_J = \min\limits_j P_j/Q_j =: c > 0$ gilt. Wegen der Homogenität der E_i ist auch $R =: c.Q \in \mathbb{R}^n_+$ ein Gleichgewicht unter (I.15); wegen $R_j = c.Q_j = (P_J/Q_J)(Q_j/P_j).P_j \leq (P_J/Q_J)(Q_J/P_J).P_j = P_j$ $\forall j \in \{1,\dots,n\}$ und $R_J = P_J$ muß wegen I.1.3 $P = R = c.Q$ sein, sonst existierte ein $j \neq J$ mit $R_j < P_j$ und da $\partial E_J/\partial P_j = E_{Jj} > 0$, also $P_j \mapsto E_J(P)$ streng monoton wächst, müßte $E_J(R) < E_J(P) = 0$ sein, ein Widerspruch zu $E_J(R) = E_J(Q) = 0$! $\square$

I.4.6 Lemma : Unter (I.3) gilt für jede Lösung $P(t/P_o)$, $P_o \in N$, von (I.15) :

(a) $\alpha \neq 2 \Rightarrow:$ $$\sum_j P_j(t/P_o)^{2-\alpha} = \text{const.} = \sum_j P_j(0/P_o)^{2-\alpha}$$

(b) $\alpha = 2 \Rightarrow:$ $$\prod_j P_j(t/P_o) = \text{const.} = \prod_j P_j(0/P_o) .$$

Beweis : (a) $\frac{d}{dt}\left(P_j(t/P_o)^{2-\alpha}\right) = (2-\alpha)\dot{P}_j(t)/P_j(t)^{\alpha-1} =$
$= (2-\alpha)E_j(P(t))P_j(t)$, der Rest folgt aus (I.3).

(b) $\frac{d}{dt}\left(\log \prod_j P_j(t/P_o) \right) = \sum_j \dot{P}_j(t)/P_j(t) = \sum_j E_j(P(t))P_j(t)$
$= 0$. $\square$

I.4.7 Korollar : Für $\alpha \leq 2$ gilt für jede Lösung $P(t/P_o)$ mit $P_o \in N$ von (I.15) unter (I.3) und I.4.2 :

$P(t/P_o)$ ist beschränkt $\forall t \geq 0$.

Beweis : Für $\alpha < 2$ folgt dies unmittelbar aus I.4.6.a , für $\alpha = 2$ aus I.4.6.b und dem zweiten Teil von I.4.2 . $\square$

I.4.8 Korollar : Seien $\overline{P},\overline{Q} \in \mathbb{R}^n_+$ Gleichgewichte von (I.15), sodaß für eine Lösung $P(t/P_o)$ mit $P_o \in N$ von (I.15) zwei Folgen $t_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, $t'_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ existieren mit

$$P(t_n/P_o) \xrightarrow[n\to\infty]{} \overline{P} \quad , \quad P(t'_n/P_o) \xrightarrow[n\to\infty]{} \overline{Q} \quad . \quad \text{Dann gilt :}$$

$$\overline{P} = \overline{Q} .$$

Beweis : Aus I.4.5 erhält man $\overline{P} = c.\overline{Q}$, $c > 0$ und aus I.4.6.a für $\alpha \neq 2$:

$$\sum_j \overline{P}_j^{\,2-\alpha} = \lim_{n\to\infty} \sum_j P_j(t_n)^{2-\alpha} = \sum_j P_j(0)^{2-\alpha} = \lim_{n\to\infty} \sum_j P_j(t_n')^{2-\alpha} = \sum_j \overline{Q}_j^{\,2-\alpha}$$

zusammen also $c^{2-\alpha} = 1 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow \overline{P} = \overline{Q}$. Analog für $\alpha = 2$:
I.4.5 , I.4.6.b $\Rightarrow c^n = 1 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow \overline{P} = \overline{Q}$. □

Nach diesen vorbereitenden Überlegungen, die uns garantieren, daß bei vorgegebenen Anfangspreisen P_o durch den Prozeß (I.15) höchstens ein Gleichgewicht approximiert werden kann, nun zur

I.4.9 Definition : Der Prozeß (I.15) heißt „global stabil" , wenn

$\forall\, P_o \in N$ es ein Gleichgewicht $\overline{P}$ von (I.15) gibt, sodaß

$$P(t/P_o) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \overline{P} \quad \text{gilt.}$$

Er heißt „quasistabil", wenn jede Lösung $P(t/P_o)$ von (I.15) mit $P_o \in N$ zur Menge aller Gleichgewichtspunkte von (I.15) für $t \to +\infty$ konvergiert (wegen der Beschränktheit der Lösungen (nach I.4.7) ist dies äquivalent zu $E_j(P(t/P_o)) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \quad \forall j, P_o \in N$).

I.4.10 Bemerkung : Globale Stabilität zieht Quasistabilität nach sich; wenn die Aussage von I.4.8 richtig ist, gilt auch die Umkehrung, weshalb wir für (I.15) unter (I.3), I.1.3 und I.1.7 wegen I.4.7 nur eine Ljapunow-Funktion finden müssen, um globale Stabilität nachzuweisen (siehe <5>!). Dazu benötigen wir

I.4.11 Lemma : Sei $t \mapsto V(t)$ eine stetige reelle Funktion, deren einseitige Ableitungen

$$\dot{V}_+(t) =: \lim_{h\to 0+} \frac{V(t+h) - V(t)}{h}$$

$$\text{und} \qquad \dot{V}_-(t) =: \lim_{h\to 0+} \frac{V(t) - V(t-h)}{h}$$

existieren und negativ sein mögen ;
dann ist V monoton fallend, $t_1 < t_2 \Rightarrow V(t_1) > V(t_2)$.

Beweis : (i) Wenn t lokale Maximalstelle von V ist, so gilt $\dot{V}_-(t) = 0$ (sonst wäre $V(t) - V(t-h) < 0$ für genügend kleines h); ebenso: t lokale Minimalstelle von $V \Rightarrow \dot{V}_+(t) = 0$.

(ii) Sei $F(t) =: V(t) - (V(t_2) - V(t_1))/(t_2 - t_1).(t - t_1)$; wenn wir (indirekt vorgehend) annehmen, daß $V(t_2) \geqslant V(t_1)$ für $t_1 < t_2$, so erfüllt F die Voraussetzungen in I.4.11 mit $\dot{F}_-(t) < 0$ und $\dot{F}_+(t) < 0 \quad \forall t \in]t_1, t_2[$; wegen (i) kann daher kein $t \in]t_1, t_2[$ lokale Extremalstelle von F sein, weshalb die (wegen der Stetigkeit von F und der Kompaktheit von $[t_1, t_2]$ existierenden) absoluten Extrema am Rande angenommen werden müssen, da aber $F(t_1) = F(t_2)$ ist, daher F konstant sein müßte, also $\dot{F}_-(t) = \dot{F}_+(t) = \dot{F}(t) = 0$ gälte, ein Widerspruch ! $\square$

Bevor wir zur Konstruktion einer Ljapunow-Funktion schreiten, einige bequeme Abkürzungen :
seien P_o sowie $P_k \in N \ \forall k \in \mathbb{N}$; dann sei $P_j(t) =: P_j(t/P_o)$,
$P_j^k(t) =: P_j(t/P_k)$, $E_j(t) =: E_j(P(t))$, $E_j^k(t) =: E_j(P^k(t))$;
für eine Folge $h_k \underset{k \to \infty}{\to} 0$ seien $t_k =: t + h_k$.

Sei $J^+(t) =: \{ j \in \{1, \ldots, n\} / E_j(t) > 0$ oder $E_j(t) = 0 < \dot{E}_j(t) \}$,
$J_k^+(t) =: \{ j \in \{1, \ldots, n\} / E_j^k(t) > 0$ oder $E_j^k(t) = 0 < \dot{E}_j^k(t) \}$.

Sei

$$V(t/P_o) =: \sum_{j \in J^+(t)} P_j(t) E_j(t) \tag{I.16}$$

sowie $V(t) =: V(t/P_o)$, $V_k(t) =: V(t/P_k)$ (analog (I.16) definiert),

$$W_k(t) =: \frac{V(t_k) - V(t)}{h_k} , \quad W(t) =: \sum_{j \in J^+(t)} \frac{d}{dt} (P_j(t) E_j(t)).$$

<u>I.4.12 Lemma</u> : Sei V wie in (I.16) ; dann gilt :

(i) $V(t) \geqslant 0 \ \forall t$; $V(t) = 0 \Leftrightarrow P(t) = P_o \ \forall t$, falls (I.3) gilt.

(ii) $t \mapsto V(t/P)$ ist stetig, also $V(t_k) \to V(t)$ für $k \to \infty$.

(iii) $P \mapsto V(t/P)$ ist stetig, also $P_k \underset{k \to \infty}{\to} P_o \Rightarrow V_k(t) \underset{k \to \infty}{\to} V(t)$.

(iv) es existieren $\dot{V}_-(t)$, $\dot{V}_+(t)$ und es gilt :

$$\dot{V}_-(t) \leqslant \dot{V}_+(t) = W(t) \ \forall t .$$

(v) Falls (I.3), I.1.3 gilt, dann $W(t) \leqslant 0 \ \forall t$,

$$W(t) = 0 \Leftrightarrow P(t) = P_o \ \forall t .$$

Beweis: (i) $V(t) \geq 0$ klar; wenn $V(t) = 0$, gilt wegen (I.3) :

$$\sum_{j \notin J^+(t)} P_j(t)E_j(t) = 0 - V(t) = 0 \text{ , wegen } E_j(t) \leq 0 \ \forall j \notin J^+(t)$$

(und $E_j(t) \geq 0 \ \forall j \in J^+(t)$) gilt also $E_j(t) = 0 \ \forall j \in \{1,\dots,n\}$,
was wegen I.4.2 $P(t/P_o) = P_o \ \forall t$ bedeutet.

(ii)
$$V(t_k) - V(t) = \sum_{j \in J^+(t_k) \cap J^+(t)} \left(P_j(t_k)E_j(t_k) - P_j(t)E_j(t) \right) -$$
$$- \sum_{j \in J^+(t) \setminus J^+(t_k)} P_j(t)E_j(t) + \sum_{j \in J^+(t_k) \setminus J^+(t)} P_j(t_k)E_j(t_k) \ ;$$

in den letzten beiden Summen sind für $k \to \infty$ nur diejenigen j relevant, für die $j \in J^+(t) \setminus J^+(t_k)$ bzw. $j \in J^+(t_k) \setminus J^+(t)$ für unendlich viele k gilt; für solche j gilt wegen der Stetigkeit von $t \mapsto P(t)$ und $P \mapsto E(P)$ klarerweise $E_j(t) = 0$. (I.17)

Deshalb verschwinden die letzten beiden Summen für $k \to \infty$, während die erste aus höchstens n gegen Null konvergenten Summanden besteht, was schließlich $V(t_k) \underset{k \to \infty}{\to} V(t)$ bedeutet.

(iii)
$$V_k(t) - V(t) = \sum_{j \in J_k^+(t) \cap J^+(t)} \left(P_j^k(t)E_j^k(t) - P_j(t)E_j(t) \right) -$$
$$- \sum_{j \in J^+(t) \setminus J_k^+(t)} P_j(t)E_j(t) + \sum_{j \in J_k^+(t) \setminus J^+(t)} P_j^k(t)E_j^k(t) \ ;$$

wegen der Stetigkeit der Lösungen $P(t/P_o)$ in den Anfangsbedingungen P_o gilt für $P_k \underset{k \to \infty}{\to} P_o$ auch $P^k(t) \underset{k \to \infty}{\to} P(t)$, $E^k(t) \underset{k \to \infty}{\to} E(t)$ (siehe I.4.2 !). Ähnlich wie in (ii) kann nun $V_k(t) \underset{k \to \infty}{\to} V(t)$ gefolgert werden.

(iv) (a) Seien $h_k > 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$; angenommen, $j \in J^+(t) \setminus J^+(t_k)$ für unendlich viele k ; dann wäre nach (I.17) $E_j(t) = 0$, also (per def. von $J^+(t)$) $\dot{E}_j(t) > 0$, was für hinreichend große k $E_j(t_k) > E_j(t) = 0$, also $j \in J^+(t_k) \ \forall k \geq K$ bedeutete, ein Widerspruch zur Annahme ! Deshalb muß für alle genügend großen k nun $J^+(t) \subseteq J^+(t_k)$ gelten, weshalb sich ergibt :

$$W_k(t) = \sum_{j\in J^+(t)} \frac{P_j(t_k)E_j(t_k) - P_j(t)E_j(t)}{h_k} + \sum_{j\in J^+(t_k)\setminus J^+(t)} \frac{P_j(t_k)E_j(t_k)}{h_k} ;$$

analog (I.17) gilt für relevante j in der zweiten Summe (wegen $j \notin J^+(t)$) $\dot{E}_j(t) \leqslant 0 = E_j(t)$; wenn nun $\dot{E}_j(t) < 0$ wäre, so gälte $E_j(t_k) < E_j(t) = 0 \ \forall k \geqslant K$, widersprüchlich zur Annahme, daß $j \in J^+(t_k)$ für unendlich viele k (siehe (I.17)) ! Also muß für solche j $\dot{E}_j(t) = 0 = E_j(t)$ sein, weshalb die zweite Summe oben aus höchstens n Summanden $\frac{P_j(t_k)E_j(t_k) - P_j(t)E_j(t)}{h_k}$ besteht, die sich für $k \to \infty$ dem Wert $\frac{d}{dt}(P_j(t)E_j(t)) = \dot{P}_j(t).0 + P_j(t).0 = 0$ annähern, während die erste Summe klarerweise gegen $W(t)$ und damit $W_k(t)$ gegen $\dot{V}_+(t)$ konvergiert, was zu zeigen war.

(b) Seien nun $h_k < 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$; es gilt

$$W_k(t) = \sum_{j\in J^+(t)} \frac{P_j(t_k)E_j(t_k) - P_j(t)E_j(t)}{h_k} - \sum_{j\in J^+(t)\setminus J^+(t_k)} \frac{P_j(t_k)E_j(t_k)}{h_k} +$$

$$+ \sum_{j\in J^+(t_k)\setminus J^+(t)} \frac{P_j(t_k)E_j(t_k)}{h_k} ;$$ für relevante j (I.17) gilt in der zweiten Summe $\dot{E}_j(t) > 0 = E_j(t)$, weshalb für genügend große k nun $E_j(t_k) < E_j(t) = 0$, also $j \in J^+(t) \setminus J^+(t_k) \ \forall k \geqslant K$ gilt, was schließlich $J^+(t) \setminus J^+(t_k) = J_o(t)$ bedeutet, sodaß die zweite Summe als Grenzwert $\sum_{j\in J_o(t)} \frac{d}{dt}(P_j(t)E_j(t)) = \sum_{j\in J_o(t)} P_j(t)\dot{E}_j(t) \geqslant 0$ besitzt. Für relevante j in der dritten Summe gilt nach (I.17) $\dot{E}_j(t) \leqslant 0 = E_j(t)$; ist für solche j $\dot{E}_j(t) < 0$, so gilt $E_j(t_k) > E_j(t) = 0 \ \forall k \geqslant K$, also $j \in J^+(t_k) \setminus J^+(t) \ \forall k \geqslant K$, sodaß man $J^+(t_k) \setminus J^+(t) = I_o(t) \cup I_k(t)$ schreiben kann, wobei $\dot{E}_j(t) = E_j(t) = 0$ $\forall j \in I_k(t)$ gilt. Deshalb ist der Grenzwert der dritten Summe für $k \to \infty$

$\sum_{j \in I_o(t)} \frac{d}{dt} (P_j(t) E_j(t)) + 0 \leq 0$, sodaß also insgesamt gilt :

es existiert $\dot{V}_-(t) = \lim_{k \to \infty} W_k(t) \leq W(t)$.

(v) Nach der Kettenregel gilt $W(t) = \sum_{j \in J^+(t)} \sum_i \frac{\partial}{\partial P_i} (P_j E_j) . \dot{P}_i$,

wobei wir bequemerweise die Argumente ab jetzt fortlassen. Wegen (I.3) gilt also

$$W = \sum_{i \in J^+} \dot{P}_i \frac{\partial}{\partial P_i} (0 - \sum_{j \notin J^+} P_j E_j) + \sum_{i \notin J^+} \dot{P}_i \frac{\partial}{\partial P_i} (\sum_{j \in J^+} P_j E_j) =$$

$$= - \sum_{i \in J^+, j \notin J^+} \dot{P}_i P_j E_{ji} + \sum_{i \notin J^+, j \in J^+} \dot{P}_i P_j E_{ji} \quad ; \tag{I.18}$$

da nach I.1.3 $E_{ji} > 0 \ \forall i \neq j$ sowie $\dot{P}_i \leq 0 \ \forall i \notin J^+$ und
$\dot{P}_i \geq 0 \ \forall i \in J^+$ gilt , (I.19)

erhält man aus (I.18) leicht $W(t) \leq 0 \ \forall t$ sowie $W(t) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \dot{P}_i = 0 \ \forall i \Leftrightarrow P(t/P_o) = P_o$. □

<u>I.4.13 Satz</u> : Die in (I.16) definierte Funktion V ist eine Ljapunow-Funktion für das System (I.15) , welches daher global stabil ist.

<u>Beweis</u> : Wegen I.4.11 und I.4.12.iii,iv ist V entlang jeder Lösungskurve monoton fallend, alle anderen Eigenschaften einer Ljapunow-Funktion sind in I.4.12.i,ii,v aufgelistet; jetzt muß man nur noch I.4.7 sowie I.4.10 beachten, um I.4.13 zu zeigen. □

<u>I.4.14 Bemerkung</u> : In den Voraussetzungen von I.4.12 geht nicht die spezielle Gestalt des Systems (I.15) ein, sondern nur (I.3), I.1.3 und (I.19) , was auch für den Walras-Prozeß (I.1) stimmt, ein.

<u>I.4.15 Satz</u> : Setzt man für den Walras-Prozeß (I.1) sinngemäß I.4.2 sowie die Beschränktheit aller Lösungen von (I.1) voraus, so gilt unter (I.3) und I.1.3 :

(I.1) ist quasistabil.

<u>Beweis</u> : folgt unmittelbar aus I.4.14 sowie I.4.13 . □

Abschließend eine „negative"

I.4.16 Bemerkung : In P (inhomogen) lineare Nachfrage-Überschuß-Funktionen können nicht zugleich (I.3) und I.1.3 erfüllen : seien $E_i(P) = e_{io} + \sum_j e_{ij}P_j$, $i \in \{1,\dots,n\}$. Unter I.1.3 gilt $e_{ij} = E_{ij} > 0 \ \forall i \neq j$; gilt aber (I.3) , so ist für $i \neq j$

$$0 = \frac{\partial^2}{\partial P_i \partial P_j} \left(\sum_l E_l(P)P_l \right) = \frac{\partial}{\partial P_i} \left(\sum_l e_{lj}P_l + E_j(P) \right) = e_{ij} + e_{ji} .$$

II. Nicht-Tâtonnement - Systeme

Bei Nicht-Tâtonnement-Systemen kann es auch in Situationen außerhalb des Gleichgewichtes zu Handelstransaktionen kommen; diese unter Umständen realistischere Annahme hat freilich Nachteile bei der formalen Untersuchung zur Folge, sodaß zu einschneidenderen Voraussetzungen als in Abschnitt I gegriffen werden muß, um zu ähnlichen Resultaten zu gelangen; in II.1 bedient man sich einer etwas expliziteren Gestalt der Nachfrageüberschuß-Funktionen, um zu einem I.4.15 analogen Resultat zu gelangen, während in II.2 von der sogenannten Hahn-Bedingung Gebrauch gemacht wird, um dies zu erhalten; in II.3 werden erwartete zukünftige Preise eingeführt. Die Ergebnisse lassen sich in den meisten Fällen leicht auf Systeme verallgemeinern, die (I.1) bzw. (I.15) analog sind; der Kürze halber behandeln wir daher nur solche Systeme, bei denen die zeitliche Änderung des Preises eines Gutes dem Nachfrage-Überschuß (zu den derzeitigen Preisen) dieses Gutes gleichgesetzt wird. Der bereits in Abschnitt I besprochene Gesamt-Substitutionseffekt wird nur noch fallweise vorausgesetzt. Es werden nur Probleme der globalen Stabilität behandelt. Die Voraussetzungen in I.4.2 werden daher sinngemäß übernommen, während das Walras-Gesetz (I.3) zwanglos aus den Annahmen in II.1 und II.3 folgt.

II.1. Quasistabilität und Analogie zu Tâtonnement-Prozessen

Betrachten wieder eine Tauschwirtschaft, bestehend aus n Individuen und m Gütern mit Preisen P_j und Nachfrage-Überschüssen E_j , $j \in \{1,\dots,m\}$ sowie Beständen X_{ij} im Besitze von Individuum i , $i \in \{1,\dots,n\}$; $X =: [X_{ij}]_{i \in \{1,\dots,n\}, j \in \{1,\dots,m\}}$ heißt Verteilungsmatrix; die Preisentwicklung sei, wie schon angedeutet, gegeben durch

$$\dot{P}_j(t) = E_j(P,X) \quad , j \in \{1,\dots,m\} . \tag{II.1}$$

Nun zur näheren Beschreibung von E_j :

sei mit Z_{ij} die Nachfrage von Individuum i nach Gut j bezeichnet, $i \in \{1,\dots,n\}$, $j \in \{1,\dots,m\}$, wobei

$$Z_i =: [Z_{i1},\dots,Z_{im}] \tag{II.2}$$

durch Maximierung der Nutzenfunktion $U_i = U_i(Z_i)$ des Individuums i unter der Nebenbedingung

$$\sum_j P_j Z_{ij} = \sum_j P_j X_{ij} := M_i(P,X) \tag{II.3}$$

erhalten wird. (II.3) heißt „Budgetbeschränkung".

II.1.1 Definition : $$E_j(P,X) =: \sum_i Z_{ij} - \sum_i X_{ij} \quad , j \in \{1,\dots,m\}$$

Mit diesen Voraussetzungen folgt unmittelbar das Walras-Gesetz

$$\sum_j E_j(P,X) P_j = 0 \tag{II.4}$$

Wenn die Verteilung X in der Zeit konstant bliebe, hätte man eine (etwas genauere als in Abschnitt I) Beschreibung eines Tâtonnement-Prozesses; hier sei die zeitliche Entwicklung von X durch

$$\dot{X}_{ij}(t) = F_{ij}(P,X) \quad , i \in \{1,\dots,n\}, \ j \in \{1,\dots,m\} \tag{II.5}$$

beschrieben, wobei die Spezifikation der F_{ij} nun folgt, interpretiert als Transaktionsregeln für Handel außerhalb des Gleichgewichts :

Unser Modell berücksichtigt Produktion nicht, weshalb der Gesamtbestand jedes Gutes konstant sein muß :

$$\sum_i F_{ij} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i X_{ij} \right) = 0 \quad \forall\, j \in \{1,\ldots,m\}. \qquad (II.6)$$

Bei Befriedigung jeglicher Nachfrage tritt kein Handel auf und umgekehrt :

$$Z_{ij} = X_{ij} \iff F_{ij} = 0 \qquad \forall i,j\,. \qquad (II.7)$$

Es gibt keine Transaktion auf Kredit, nur Tauschhandel, sodaß sich durch den Handel der Wert des Besitzes von Individuum i nicht ändert (sondern nur durch Preisänderung) :

$$\sum_j P_j F_{ij} = \sum_j P_j \dot{X}_{ij}(t) = 0 \quad \forall\, i \in \{1,\ldots,n\}\,. \qquad (II.8)$$

Wir unterstellen

<u>II.1.2 Annahme</u> : Für alle $P_o \in N$ (siehe I.4.2 !) , für alle $n \times m$ - Verteilungsmatrizen X_o existiert genau eine Lösung des Systems (II.1) & (II.5) , nämlich $[P(t/P_o,X_o),X(t/P_o,X_o)]$, die $P(0/P_o,X_o) = P_o$ und $X(0/P_o,X_o) = X_o$ erfüllt; es gilt weiters $P(t/P_o,X_o) \in N \;\forall t$ sowie : $(P,X) \mapsto [P(t/P,X),X(t/P,X)]$ ist stetig $\forall t$.

Berücksichtigen wir weiters nur X mit $X_{ij} \geqslant C \;\forall i,j$, so gilt:

<u>II.1.3 Lemma</u> : Sei $P(t,P_o,X_o),X(t/P_o,X_o)$ eine Lösung von (II.1) & (II.5) mit $P_o \in N$ und $X_{ij}(t/P_o,X_o) \geqslant C \;\forall i,j$; dann gilt: $t \mapsto P(t/P_o,X_o)$ und $t \mapsto X(t/P_o,X_o)$ sind beschränkt.

<u>Beweis</u> : Für P folgt dies unmittelbar aus (II.4) (vgl. I.4.6,7 !); wegen (II.6) gilt $\sum_i X_{ij}(t/P_o,X_o) = \sum_i X_{ij}(0/P_o,X_o) \quad \forall t\,.$ □

<u>II.1.4 Definition :</u> Sei $\overline{P} \in N$, $\overline{X} = [\overline{X}_{ij}]_{i\in\{1,\ldots,n\},\, j\in\{1,\ldots,m\}}$ mit $\overline{X}_{ij} \geqslant C \;\forall i,j$; $(\overline{P},\overline{X})$ heißt „Gleichgewicht" unter (II.1)&(II.5), wenn $E_j(\overline{P},\overline{X}) = 0 \;\forall j \in \{1,\ldots,m\}$ gilt.

<u>Bezeichnung</u> : Schreiben ab jetzt statt $X_{ij} \geqslant C \;\forall i,j$: $X \geqslant [C]$.

Unter der

II.1.5 Annahme : (GS) gilt, also $\partial E_j(P,X)/\partial P_k > 0 \ \forall j \neq k$,

kann man Quasistabilität nachweisen :

II.1.6 Satz : Der Nicht-Tâtonnement-Prozeß (II.1)&(II.5) , der (II.6) , (II.7) und (II.8) erfüllt, ist unter II.1.2 und II.1.5 quasistabil (sinngemäß analog zu I.4.9 definiert; wegen II.1.3 ist dies zu $E_j(P(t/P_o,X_o),X(t/P_o,X_o)) \underset{t \to +\infty}{\to} 0 \ \forall j, P_o \in N, X_o \geqslant [C]$

äquivalent).

Beweisskizze : Sei V sinngemäß analog (I.16) konstruiert, die Abkürzungen wie vor I.4.12 ; dann erfüllt V klarerweise I.4.12.i,ii, iii,iv . Aber auch I.4.12.v gilt, da (indem wir Argumente unterdrücken):

$$W = \sum_{j\in J^+} \frac{d}{dt}(P_jE_j) = \sum_k \sum_{j\in J^+} \frac{\partial(P_jE_j)}{\partial P_k}\dot{P}_k + \sum_{i,k}\sum_{j\in J^+} \frac{\partial(P_jE_j)}{\partial M_i}\frac{\partial M_i}{\partial X_{ik}}\dot{X}_{ik} \ ;$$

die erste Summe ist analog zu I.4.12.v nichtpositiv und verschwindet genau dann, wenn das System im Gleichgewicht ist; wegen $\frac{\partial M_i}{\partial X_{ik}} = P_k$ und (II.8) ist die zweite Summe gleich Null. Nach I.4.13 ist also V eine Ljapunow-Funktion und nach II.1.3 das System quasistabil. $\square$

Anstatt II.1.5 kann man aber auch

II.1.7 Annahme : Die Nutzenfunktionen U_i sind strikt quasikonkav und homogen, sowie für alle Individuen gleich : $U_i = U \ \forall i \in \{1,\dots,n\}$.

fordern und damit sogar globale Stabilität zeigen, indem man folgendermaßen vorgeht (Skizze): seien $z_j =: \sum_i Z_{ij}$, $j \in \{1,\dots,m\}$; aus II.1.1 und der Homogenität der U_i folgert man $Z_{ij} = A_{ij}(P)\sum_{j'} P_{j'}X_{ij'}$ sowie aus $U_i = U$ $z_j = A_j(P)\sum_{j'} P_{j'}\sum_i X_{ij'}$, sodaß $(z_1,\dots,z_m)$ U unter der Nebenbedingung $\sum_j P_j z_j = \sum_j P_j \sum_i X_{ij}$ maximiert. Im Gleichgewicht $\bar{P}$ ist $z_j = z_j(\bar{P})$ und $\bar{P}$ selbst von X unabhängig; wegen der strikten Quasikonkavität von U ist das Gleichgewicht eindeutig bestimmt und wir haben :

II.1.8 Satz : Unter II.1.7 ist die Preisdynamik (II.1) mit von X unabhängigen Nachfrageüberschüssen E_j global stabil.

Beweisskizze : Nach obigem haben wir $\partial U/\partial z_j = \lambda(t)P_j \; \forall j$, wo $\lambda(t) > 0$ der Lagrange-Multiplikator der Maximalitätsbedingung für U ist. Deswegen gilt

$$\dot{U}(t) = \sum_j \frac{\partial U}{\partial z_j} \cdot \dot{z}_j(t) = \lambda(t) . \sum_j P_j \dot{z}_j(t) \leq 0 ,$$

da ja nach (II.4) und (II.8)

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\sum_j P_j E_j \right) = \sum_j \dot{P}_j E_j + \sum_j P_j \sum_i (\dot{Z}_{ij} - \dot{X}_{ij}) =$$

$$= \sum_j (E_j)^2 + \sum_j P_j \dot{z}_j - \sum_i \sum_j P_j F_{ij} \geqslant 0 + \sum_j P_j \dot{z}_j - 0 .$$

Also ist U monoton fallend (und beschränkt), womit man nachweisen kann, daß U eine Ljapunow-Funktion für unser Problem ist. (Nach wie vor gilt ja II.1.3 !) $\square$

II.2. Hahn-Bedingung und Quasistabilität

Nun wird von der genaueren Beschreibung der Nachfrage-Überschußfunktionen in II.1.1 wieder Abstand genommen, dafür jedoch eine nicht unplausibel erscheinende „Handelsregel" postuliert :

II.2.1 Annahme : Es gilt $\forall i \in \{1,\dots,n\}, \; \forall j \in \{1,\dots,m\}$:

$$Z_{ij} \neq X_{ij} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sgn}(Z_{ij} - X_{ij}) = \operatorname{sgn} E_j \quad \text{sowie} \; \forall j \in \{1,\dots,m\} :$$

$$E_j = 0 \quad \Rightarrow \quad Z_{ij} = X_{ij} \quad \forall i \in \{1,\dots,n\}$$

II.2.2 Bemerkung : Die „Hahnbedingung" II.2.1 kann dahingehend interpretiert werden, daß alle möglichen Tauschaktionen nach dem Prinzip „wer zuerst kommt, mahlt zuerst" sofort durchgeführt werden, sodaß bei negativem Nachfrageüberschuß ($E_j < 0$), also realem Angebotsüberschuß des Gutes j alle nach j nachfragenden Individuen ihre Nachfrage befriedigen können, während einigen Anbietern unverkaufte Bestände an j bleiben. Daher sind nach Durchführung des Tausches alle individuellen Nachfrage-Überschüsse negativ ($Z_{ij} < X_{ij}$). Eine analoge Überlegung führt zur Interpretation für reale Nachfrageüberschüsse ($E_j > 0$).

II.2.2 Bemerkung (Fortsetzung) : Natürlich bedeutet II.2.1 auch, daß einige Pläne der Individuen bezüglich Angebot und Nachfrage übererfüllt werden; da aber jedes Gut zumindest teilweise als Tauschmittel dienen kann, ist es möglich, daß ein Gut kurzfristig vom Anbieter in größerem Ausmaß als von ihm geplant verkauft und ein anderes Gut, das ursprünglich in geringerem Maße nachgefragt wurde, gekauft werden muß, um Tauschtransaktionen mit anderen Gütern durchführen zu können.

II.2.3 Bemerkung : Die zweite Bedingung in II.2.1 führt nun dazu, daß ein wie in II.1.4 definiertes Gleichgewicht unter den Annahmen (II.7) und II.1.2 wirklich Fixpunkt unter der Dynamik (II.1)&(II.5) ist, was bisher nicht notwendigerweise der Fall war.

Nun ein Beispiel für einen dynamischen Nicht-Tâtonnement-Prozeß, der II.2.1 erfüllt und bei dem, wie sich herausstellen wird, der Anteil (α_i) jedes Individuums (i) an Knappheit oder Überfluß eines Gutes konstant in der Zeit bleibt :

$$\left.\begin{aligned} \dot{X}_{ij}(t) &= \sum_k \frac{\partial Z_{ij}}{\partial P_k} E_k(P,X) - \alpha_i \sum_{k,s} \frac{\partial Z_{sj}}{\partial P_k} E_k(P,X) , \\ &\qquad i \in \{1,\dots,n\} , \; j \in \{1,\dots,m-1\} \text{ und} \\ \dot{X}_{im}(t) &= -\sum_{j<m} \frac{\dot{X}_{ij}(t) P_j}{P_m} , \quad i \in \{1,\dots,n\}. \end{aligned}\right\} \quad (II.9)$$

Hier sind $\alpha_i > 0$ sowie $\sum_i \alpha_i = 1$; unmittelbar klar ist, daß durch (II.9) (II.6) sowie (II.8) erfüllt ist; deshalb gilt :

$$\dot{Z}_{ij}(t) = \sum_k \frac{\partial Z_{ij}}{\partial P_k} \dot{P}_k + \sum_k \frac{\partial Z_{ij}}{\partial X_{ik}} \dot{X}_{ik} = \sum_k \frac{\partial Z_{ij}}{\partial P_k} E_k + 0 ,$$

da $\sum_k \frac{\partial Z_{ij}}{\partial X_{ik}} \dot{X}_{ik} = \sum_k \frac{\partial Z_{ij}}{\partial M_i} \frac{\partial M_i}{\partial X_{ik}} \dot{X}_{ik} = \frac{\partial Z_{ij}}{\partial M_i} \sum_k P_k \dot{X}_{ik} = 0 .$

Nach (II.9) gilt also

$$\dot{X}_{ij}(t) = \dot{Z}_{ij}(t) - \alpha_i \sum_s \dot{Z}_{sj}(t) \;\forall j < m , \qquad (II.10)$$

sodaß wir wegen (II.6) erhalten :

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt} (Z_{ij} - X_{ij}) = \frac{d}{dt}\Big(\alpha_i \sum_s Z_{sj}\Big) = \alpha_i \frac{d}{dt} \Big(\sum_s Z_{sj} - \sum_s X_{sj}\Big) \\ \forall j \in \{1,\dots,m-1\} \end{aligned}\right\} \quad (II.11)$$

Nehmen wir nun - nur für dieses Beispiel - an, daß die Nachfrageüberschuß-Funktionen die in II.1.1 angegebene Form haben; dann kann man (II.11) umschreiben in

$$\frac{d}{dt}\left(Z_{ij} - X_{ij} \right) = \alpha_i \dot{E}_j \quad , \quad i \in \{1,\dots,n\},\ j \in \{1,\dots,m-1\},$$

sodaß man,

$$Z_{ij}(t=0) - X_{ij}(t=0) = \alpha_i E_j(t=0) \quad \forall i,j$$

vorausgesetzt,

$$Z_{ij}(t) - X_{ij}(t) = \alpha_i E_j(t) \ \forall t\ ,\ \forall i\ ,\ \forall j<m$$

folgern kann. II.1.1 zieht auch (II.4) nach sich, sodaß man mit (II.4) und (II.3) weiterschließen kann :

$$P_m(Z_{im} - X_{im}) = 0 - \sum_{j<m} P_j(Z_{ij} - X_{ij}) = -\alpha_i \sum_{j<m} P_j E_j =$$

$$= \alpha_i (P_m E_m - 0) \quad \forall i \in \{1,\dots,n\}$$, sodaß schließlich mit

$$Z_{ij}(t) - X_{ij}(t) = \alpha_i E_j(t) \quad \forall t\ ,\ \forall i\ ,\ \forall j$$

nicht nur II.2.1 , sondern auch die anfangs dieser Überlegungen aufgestellte Behauptung gezeigt ist.

Es gibt also Prozesse, die II.2.1 gehorchen; diese sind quasistabil :

<u>II.2.4 Satz</u> : Setzt man (II.6),(II.7),(II.8) sowie II.2.1 voraus, so ist der Nicht-Tâtonnement-Prozeß (II.1)&(II.5) quasistabil.

<u>Beweis</u> : Wegen der Nutzenmaximierung (Z_i maximiert U_i unter der Nebenbedingung $\sum_j P_j Z_{ij} = M_i$; vgl. Beweis von II.1.8 !) existieren $\lambda_i = \lambda_i(t) > 0\ \forall t$, sodaß $\frac{\partial U_i}{\partial Z_{ij}} = \lambda_i P_j \quad \forall i,j$ gilt;

sei $V(t) =: \sum_i U_i(Z_i(t))$; dann ist

$$\dot{V}(t) = \sum_i \sum_j \frac{\partial U_i}{\partial Z_{ij}} \dot{Z}_{ij}(t) = \sum_i \lambda_i \sum_j P_j \dot{Z}_{ij}(t) \leq 0 \quad \text{und} \tag{II.12}$$

$\dot{V}(t) = 0 \iff P(t/P_o,X_o),X(t/P_o,X_o)$ ist ein Gleichgewicht $\iff$

$\iff P(t/P_o,X_o) = P_o$ und $X(t/P_o,X_o) = X_o \quad \forall t$.

Die letzte Äquivalenz ist eine Konsequenz aus II.2.3 , während die Ungleichung in (II.12) jetzt gezeigt wird :
Aus (II.3) folgt nach Differentiation nach t :

$$\sum_j P_j(\dot{Z}_{ij} - \dot{X}_{ij}) + \sum_j (Z_{ij} - X_{ij})\dot{P}_j = 0 \text{ , sodaß wegen (II.8),}$$

II.2.1 und (II.1) gilt :

$$\sum_j P_j \dot{Z}_{ij} = \sum_j (X_{ij} - Z_{ij})E_j \leq 0 \text{ und } \sum_j P_j \dot{Z}_{ij} = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ $E_j = 0 \ \forall j$, was zu zeigen war. V ist also eine monoton fallende Funktion der Zeit sowie nach unten beschränkt, man kann sie also wegen der Beschränktheit der Lösungskurven (II.1.3 gilt ja nach wie vor) als Ljapunow-Funktion verwenden, um daraus Quasistabilität des Systems (II.1)&(II.5) abzuleiten. □

II.3. Erwartungen im Nicht-Tâtonnement - Prozeß

Sei q_{ij} der von Individuum i erwartete künftige Preis von Gut j , $i \in \{1,\dots,n\}$, $j \in \{1,\dots,m\}$, $Q =: [q_{ij}]_{i\in\{1,\dots,n\}, j\in\{1,\dots,m\}}$; sei Y_{ij} die von Individuum i bestimmte Nachfrage nach Gut j zu Preisen Q ; alle anderen Bezeichnungen übernehmen wir von früher. Individuum i bestimmt seine Nachfragen Z_i (wie in (II.2)) der Gegenwart und $Y_i =: [Y_{i1},\dots,Y_{im}]$ der Zukunft durch Maximierung der Nutzenfunktion $F_i = F_i(U_i(Z_i), U_i(Y_i))$ unter den Nebenbedingungen :

Budgetbeschränkung in der Gegenwart, (II.3), und in der Zukunft,

$$\sum_j q_{ij} Y_{ij} = \sum_j q_{ij} Z_{ij} \ . \qquad \text{(II.13)}$$

<u>II.3.1 Annahme</u> : $x \mapsto F_i(x,y)$ und $y \mapsto F_i(x,y)$ sind monoton wachsend $\forall i$ sowie $Z \mapsto F_i(U_i(Z),y)$ und $Y \mapsto F_i(x,U_i(Y))$ sind strikt quasikonkav $\forall i \in \{1,\dots,n\}$.

Wieder seien die Nachfrage-Überschußfunktionen gegeben durch

$$E_j(P,Q,X) \; =: \; \sum_i Z_{ij} - \sum_i X_{ij} \quad , \; j \in \{1,\ldots,m\} \qquad \text{(II.14)}$$

und die zeitliche Preisentwicklung durch

$$\dot{P}_j(t) \; = \; E_j(P,Q,X) \quad , \quad j \in \{1,\ldots,m\} \; , \qquad \text{(II.15)}$$

während die zukünftigen Preise einem Adaptationsprozeß an die gegenwärtigen unterworfen seien :

$$\dot{q}_{ij}(t) \; = \; a_i(P_j - q_{ij}) \quad , \quad i \in \{1,\ldots,n\}, \quad j \in \{1,\ldots,m\} \; , \qquad \text{(II.16)}$$

wobei $a_i > 0$, $i \in \{1,\ldots,n\}$, die (konstanten) Erwartungselastizitäten seien; hier wird zwar angenommen, daß jedes Individuum i für jedes Gut j dieselbe Erwartungselastizität a_i hat, andererseits können die Erwartungen individuell verschieden sein, es sind also sowohl Preissteigerung erwartende Haussiers (i mit $q_{ij} > P_j$) als auch Preissenkung erwartende Baissiers (i mit $q_{ij} < P_j$) möglich. Wie oben soll sich auch die Verteilung X gemäß

$$\dot{X}_{ij}(t) \; = \; F_{ij}(P,Q,X) \; , \; i \in \{1,\ldots,n\}, \; j \in \{1,\ldots,m\} \qquad \text{(II.17)}$$

ändern. Für die weitere Analyse ist es bequem, zwischen zwei Typen von Gleichgewichten zu unterscheiden :

<u>II.3.2 Definition</u> : (P,Q,X) heißt „stationäres Gleichgewicht" unter der Dynamik (II.15)&(II.16)&(II.17) , wenn gilt :

$$E_j(P,Q,X) = 0 \; , \quad q_{ij} = P_j \; , \quad F_{ij}(P,Q,X) = 0 \;\; \forall i \in \{1,\ldots,n\}, \; \forall j \in \{1,\ldots,m\}$$

(solch ein (P,Q,X) ist klarerweise ein Fixpunkt unter obiger Dynamik).
Eine Lösung $P(t/P_o,Q_o,X_o),Q(t/P_o,Q_o,X_o),X(t/P_o,Q_o,X_o)$ von (II.15)&(II.16)&(II.17) heißt „Pseudo-Gleichgewicht" , wenn gilt (die Argumente P_o, Q_o, X_o werden der Kürze halber ignoriert) :

$$E_j(P(t),Q(t),X(t)) = 0 \; , \quad F_{ij}(P(t),Q(t),X(t)) = 0 \qquad \text{und}$$

$$Z_{ij}(P(t),Q(t),X(t)) = Y_{ij}(P(t),Q(t),X(t)) \quad \forall t \; , \quad \forall i \in \{1,\ldots,n\}, \; \forall j \in \{1,\ldots,m\}.$$

II.3.3 Bemerkung : In ‹7› werden Pseudogleichgewichte „Quasigleichgewichte" genannt; um jedoch Konfusion mit dem Begriff der in I.4.9 definierten Quasistabilität - besonders im Hinblick auf die später folgende Definition der Pseudostabilität - zu vermeiden, wurde die vorliegende Bezeichnung gewählt.

II.3.4 Bemerkung : Wieder setzen wir analog zu II.1.2 voraus, daß für $P_o \in N$, $X_o \gg [C]$ und Q_o das System (II.15)&(II.16)&(II.17) genau eine Lösung $[P(t/P_o,Q_o,X_o),Q(t/P_o,Q_o,X_o),X(t/P_o,Q_o,X_o)]$ mit

$$P(t/P_o,Q_o,X_o) \in N \;\forall t \;, \quad X(t/P_o,Q_o,X_o) \geq [C] \;\forall t \quad \text{und}$$

$$P(0/P_o,Q_o,X_o) = P_o \;, \quad Q(0/P_o,Q_o,X_o) = Q_o \;, \quad X(0/P_o,Q_o,X_o) = X_o$$

besitzt und daß die Abbildung

$$(P,Q,X) \mapsto [P(t/P,Q,X),Q(t/P,Q,X),X(t/P,Q,X)] \quad \text{stetig ist } \forall t \,.$$

II.3.5 Bemerkung : Klarerweise gilt für ein Pseudogleichgewicht (wieder ohne Argumente P_o,Q_o,X_o) : $P(t) = P_o$, $X(t) = X_o \;\forall t$, die erwarteten Preise können sich im allgemeinen (d.h. für $q_{ij}(0) \neq P_j(0)$ für ein i , ein j) jedoch zeitlich verändern.

II.3.6 Proposition : Jedes stationäre Gleichgewicht ist ein Pseudogleichgewicht.

Beweis : Wegen $q_{ij} = P_j \;\forall i$ und (II.3),(II.13) ist

$$\sum_j Y_{ij}P_j = \sum_j Y_{ij}q_{ij} = \sum_j Z_{ij}q_{ij} = \sum_j Z_{ij}P_j = M_i \quad \forall i, \text{ sodaß}$$

für $Z_i \neq Y_i$ wegen der strikten Quasikonkavität (die die Eindeutigkeit des Maximums sichert) von $Z \mapsto F_i(U_i(Z),y)$

$$F_i(U_i(Z_i),U_i(Y_i)) > F_i(U_i(Y_i),U_i(Y_i))$$ gälte (da auch Y_i die Nebenbedingung (II.3) erfüllt), also wegen der Monotonie von $x \mapsto F_i(x,y)$

$U_i(Z_i) > U_i(Y_i)$ sein müßte; da aber Z_i (anstelle von Y_i) klarerweise die Nebenbedingung (II.13) erfüllt, gilt wegen der strikten Quasikonkavität von $Y \mapsto F_i(x,U_i(Y))$:

$$\left.\begin{array}{l} Z_i \neq Y_i \quad \Rightarrow \quad F_i(U_i(Z_i),U_i(Y_i)) > F_i(U_i(Z_i),U_i(Z_i)) \,, \\ \text{wegen der Monotonie von } y \mapsto F_i(x,y) \text{ ist also } U_i(Y_i) > U_i(Z_i) \,, \end{array}\right\} \quad (II.18)$$

ein Widerspruch, was $Z_i = Y_i \;\forall i$ bedeutet. $\square$

II.3.7 Bemerkung : Wenn wir, wie im folgenden, annehmen, daß für die in (II.17) eingeführten F_{ij} die Bedingungen (II.6),(II,7) und (II.8) sinngemäß analog gelten, so ist jede Lösungskurve von (II.15)&(II.16)&(II.17) beschränkt : für $P(t),X(t)$ folgt dies analog II.1.3 (setzen ja II.3.4 voraus !),und für beschränktes $P(t)$ ist wegen der Gestalt von (II.16) auch $Q(t)$ beschränkt, wie man leicht einsieht.

II.3.8 Definition : Der Prozeß (II.15)&(II.16)&(II.17) heißt „pseudostabil" , wenn jede Lösung $[P(t),Q(t),X(t)]$ dieses Systems mit Anfangsbedingungen $P_o \in N$, $X_o \geqslant [C]$ für $t \to +\infty$ zur (maximalen invarianten) Menge der Pseudogleichgewichte strebt (wegen II.3.7 ist dies äquivalent zu : $E_j(P(t),Q(t),X(t)) \to 0 \ \forall j$,

$$F_{ij}(P(t),Q(t),X(t)) \to 0 \quad \forall i,j \quad \text{und}$$

$$Z_{ij}(P(t),Q(t),X(t)) - Y_{ij}(P(t),Q(t),X(t)) \to 0 \quad \forall i,j \quad \text{für} \quad t \to +\infty \text{).}$$

Übernehmen wir nun noch die Hahn-Bedingung II.2.1 sinngemäß analog, so gilt :

II.3.9 Satz : Unter (den Analoga zu) II.2.1 , (II.6),(II.7) und (II.8) ist das dynamische System (II.15)&(II.16)&(II.17) pseudostabil.

Beweis : $V(t) =: \sum_i F_i(U_i(Z_i(t)),U_i(Y_i(t)))$ ist eine unserem Problem gerechte Ljapunow-Funktion, wie man folgendermaßen einsieht :

Wegen (II.3) gilt (II.4), woraus wir nach Differentiation nach t erhalten :

$$\sum_j \dot{P}_j(Z_{ij} - X_{ij}) - \sum_j P_j\dot{X}_{ij} + \sum_j P_j\dot{Z}_{ij} = 0 ,$$

sodaß wegen (II.8)

$$\left.\begin{aligned} &\sum_j P_j\dot{Z}_{ij} = - \sum_j \dot{P}_j(Z_{ij} - X_{ij}) \leq 0 \quad \text{mit} \\ &\text{Gleichheit } \forall\, i \text{ genau dann, wenn } E_j = 0 \quad \forall\, j \text{ ist.} \end{aligned}\right\} \text{(II.19)}$$

Die letzte Aussage folgt aus (II.15) sowie II.2.1 .
Differenziert man (II.13) nach t , so folgt

$$\sum_j \dot{q}_{ij}(Y_{ij} - Z_{ij}) + \sum_j q_{ij}(\dot{Y}_{ij} - \dot{Z}_{ij}) = 0 \quad ;$$

andererseits ist nach (II.16) und (II.13)

$$\sum_j \dot{q}_{ij}(Y_{ij} - Z_{ij}) = a_i \sum_j (P_j - q_{ij})(Y_{ij} - Z_{ij}) =$$

$= a_i \sum_j P_j(Y_{ij} - Z_{ij}) > 0$, denn wäre $\sum_j P_j(Y_{ij} - Z_{ij}) \leq 0$ und

$Z_i \neq Y_i$, so müßte wegen der strikten Quasikonkavität von $Z \mapsto F_i(U_i(Z),y)$ und der Monotonie von $x \mapsto F_i(x,y)$ (ähnlich wie im Beweis zu II.3.6) $U_i(Z_i) > U_i(Y_i)$ gelten, ein Widerspruch zu (II.18) !

Obige Überlegungen zeigen

$$\sum_j q_{ij}(\dot{Y}_{ij} - \dot{Z}_{ij}) \leq 0 \text{ mit Gleichheit genau dann, wenn } Y_i = Z_i \,. \tag{II.20}$$

Aus der Maximierung von F_i unter den Nebenbedingungen (II.3),(II.13) erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F_i}{\partial x}(U_i(Z_i)) \cdot \frac{\partial U_i}{\partial x_j}(Z_i) &= \frac{\partial F_i}{\partial Z_{ij}} = \lambda_i P_j - \mu_i q_{ij} \quad \forall j \in \{1,\dots,m\} \text{ und} \\ \frac{\partial F_i}{\partial y}(U_i(Y_i)) \frac{\partial U_i}{\partial x_j}(Y_i) &= \frac{\partial F_i}{\partial Y_{ij}} = \mu_i q_{ij} \quad \forall j \in \{1,\dots,m\} \,, \end{aligned}\right\} \tag{II.21}$$

wobei $U_i = U_i(x_1,\dots,x_m)$ aufgefaßt wurde und $\lambda_i, \mu_i > 0$ die Lagrange-Multiplikatoren sind. Daher ist die zeitliche Ableitung

$$\dot{F}_i(t) = \sum_j \frac{\partial F_i}{\partial Z_{ij}} \dot{Z}_{ij} + \sum_j \frac{\partial F_i}{\partial Y_{ij}} \dot{Y}_{ij} =$$

$$= \lambda_i \sum_j P_j \dot{Z}_{ij} + \mu_i \sum_j q_{ij}(\dot{Y}_{ij} - \dot{Z}_{ij}) \text{ , sodaß}$$

wegen (II.19) und (II.20) gilt :

$$\dot{V}(t) = \sum_i \dot{F}_i(t) \leq 0 \text{ mit Gleichheit genau dann, wenn}$$

$E_j = 0 \ \forall j$ und $Y_{ij} - Z_{ij} = 0 \ \forall i,j$, was wegen II.3.7 nur noch zu zeigen war, um Pseudostabilität nachzuweisen, da ja nach II.2.1 und (II.7) $E_j = 0$ $F_{ij} = 0$ nach sich zieht. $\square$

Untersuchen wir abschließend die Beziehung zwischen stationärem und Pseudo-Gleichgewicht :

<u>II.3.10 Satz</u> : Sei $[P_o, Q(t/P_o, Q_o, X_o), X_o]$ ein Pseudogleichgewicht von (II.15)&(II.16)&(II.17) (vgl. II.3.5 !); dann gilt

$$q_{ij}(t) \underset{t \to +\infty}{\to} P_j \quad \forall i \in \{1,\dots,n\} \quad ,$$

jedes Pseudogleichgewicht strebt also ... einem stationären Gleichgewicht zu.

<u>Beweis</u> : ist unmittelbar aus der Gestalt von (II.16) ersichtlich. (Ein Beweis für einen allgemeineren Fall findet sich in <3>.) $\Box$

<u>II.3.11 Bemerkung</u> : Dem genauen Leser werden Unterschiede zwischen II.3.2,3,8,10 und den Pendants in <7> nicht entgangen sein; speziell für die letzte Aussage in II.3.10 wird in <7> eine zusätzliche Voraussetzung benötigt. Dies rührt von den leicht verschiedenen Definitionen von „Pseudogleichgewicht" bzw. „Quasigleichgewicht" her : in <7> ist ein Quasigleichgewicht ein Punkt (P,Q,X) , der den im zweiten Teil von II.3.2 vorkommenden Gleichungen (besser ihren Pendants) genügen muß, während bei uns ein Pseudogleichgewicht ja eine ganze Lösungskurve darstellt. Die Aussage von II.3.9 , die deshalb etwas stärker als die in <7> ist, kann dennoch mit denselben Mitteln wie in <7> gezeigt werden, weil eine Ljapunow-Funktion die Konvergenz der Lösungen eines dynamischen Systems zu einer <u>invarianten</u> Menge sichert; dies ist eine Konsequenz der Halbgruppen-Eigenschaft autonomer Systeme $P(t+t'/P_o) = P(t/P(t'/P_o))$, die aus der hier ja vorausgesetzten eindeutigen Lösbarkeit folgt, sowie aus der hier ebenfalls geforderten Stetigkeit in den Anfangsbedingungen

$$P_k \to P_o \text{ für } k \to \infty \quad \Rightarrow P(t/P_k) \to P(t/P_o) \text{ für } k \to \infty .$$

III. Literatur

<1> ARROW, K.J. , H.D. BLOCK & L. HURWICZ : On the stability of competitive equilibrium ; Econometrica 27 (1959), 82 - 109 .

<2> ARROW, K.J & F.H. HAHN : General competitive analysis ; Holden-Day 1971 .

<3> BOMZE, I. : Die Dynamik des verallgemeinerten Zermürbungskampfs ; Diplomarbeit, Universität Wien 1980 .

<4> DEBREU, G. & I.N. HERSTEIN : Nonnegative square matrices ; Econometrica 21 (1953), 597 - 607 (P. NEWMAN, ed. : Readings in mathematical economics I ; Johns Hopkins University Press 1963 , 57 - 67)

<5> HIRSCH, M.W. & S. SMALE : Differential equations, dynamical systems and linear algebra ; Academic Press 1974 .

<6> KEMENY, J.G. & J.L. SNELL : Mathematical models in the social sciences, chap. IV : Market stability ; Ginn & Co. 1962 .

<7> NEGISHI, T. : General equilibrium theory and international trade ; North Holland 1972 .