

DAS SAISONALE BOX-JENKINS MODELL

von

Wolfgang POLASEK

Forschungsbericht Nr. 129

März 1978

Vorwort

Die Box-Jenkins-Methode zeichnet sich durch eine in drei Punkten zu unterscheidende Philosophie des Modellbaus aus: Identifikation, Schätzung und Diagnose. Für die praktische Anwendung sind besonders die Identifikations- und Diagnosephasen wichtig. Für saisonale Box-Jenkins-Modelle (SARIMA-Prozesse) gibt es derzeit nur wenig detaillierte Literatur, die den Praktiker darauf hinweist, welche Modelle aufgrund der Autokorrelationsfunktion gewählt werden sollen und welche die wesentlichen Unterschiede zwischen den Modellen sind.

Um die Ergebnisse dieser Arbeit für praktische Zwecke umsetzen zu können, wurde ein Programm zur Generierung von ACF- und PACF-Funktionen entwickelt, das in das IAZ-System eingebaut wurde.

Trotz des Prinzips der Parsimonität wird die Anzahl unterschiedlicher saisonaler Modelle auch bei kleiner Parameteranzahl sehr groß. Ferner beschränkt sich die Diskussion auf Modelle mit Saisonfiguren der Länge 4. Dies erfolgte hauptsächlich deswegen, weil die laufende Prognose für die österreichische Wirtschaft auf vierteljährlichen Zeitreihen basiert. Ein Hauptziel dieser Arbeit ist es, die Kluft zwischen Theorie und Praxis im saisonalen Modellbau etwas zu verringern.

Summary

The Box-Jenkins-method for estimating and forecasting times series models relies heavily on the interactive model building philosophy of identification, estimation and diagnostic checking. For practical purposes the identification and diagnostic checking phase are important. On seasonal Box-Jenkins-models (SARIMA-processes) there is only few literature. Especially one has to know, which autocorrelation function (ACF) leads to which models, and what are the main differences between the various types of seasonal models.

To make the results practicable for the application of model building, a computer program for generation of ACF and partial ACF was developed and implemented in the IAZ-System.

The paper contains a general discussion of seasonal models and lists all important types of seasonal moving average models up to three parameters. For each model the theoretical ACF and the graphical display of the ACF is given. Also there is a short discussion of the main features of each model, and arguments are given for the choice between different models.

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
<u>Teil A: Das saisonale Box-Jenkins-Modell</u>	
1. Saisonale Modelle	1
1.1. Einführung	1
1.2. Saisonfiguren als Spezialfälle des AR(2)-Prozesses	3
1.3. Saisonale Differenzenoperatoren	8
2. Saisonale Modellklassen	15
2.1. Das multiplikative Modell	15
2.2. Der SARIMA $(0,1,1) \times (0,1,1)_s$ -Prozeß	19
3. Prognose von SARIMA-Prozessen	22
3.1. Die Prognosefunktion	22
3.2. Die eventuelle Prognosefunktion (EFF)	24
3.3. Die EFF eines ARIMA $(0,1,1) \times (0,1,1)_s$ -Modells	25
<u>Teil B: Saisonale Autokorrelationsstrukturen</u>	
1. Die ACF für verschiedene SARIMA-Prozesse	28
1.1. Modellklassen	28
1.2. Moving Average Prozesse	32
2. 2-Parametermodelle	34
2.1. Modelle mit einem saisonalen Parameter	34
2.2. Modelle mit zwei saisonalen Parametern	36
3. 3-Parametermodelle	41
3.1. Modelle mit einem saisonalen Parameter	41
3.2. Modelle mit zwei saisonalen Parametern	43
3.3. Modelle mit drei saisonalen Parametern	50
<u>Teil C: Autokovarianzfunktion saisonaler Modelle</u>	
1.1. Einleitung	58
1.2. Moving Average Prozesse	58

2. 2-Parametermodelle	59
2.1. Modelle mit einem saisonalen Parameter	59
2.2. Modelle mit zwei saisonalen Parametern	60
3. 3-Parametermodelle	61
3.1. Modelle mit einem saisonalen Parameter	61
3.2. Modelle mit zwei saisonalen Parametern	63
3.3. Modelle mit drei saisonalen Parametern	66
Appendix: Komplexe Zahlen	70
Literatur	75
Tabellenanhang	77

Teil A: Das saisonale Box-Jenkins-Modell

1. Saisonale Modelle

1.1. Einführung

Die Box-Jenkins-Methode zur Analyse von Zeitreihen stellt nichtsaisonale Zeitreihen als stochastische Differenzgleichung der Form

$$\psi(B)z_t = \theta(B)a_t \quad (1.1)$$

dar. Dabei ist $\psi(B)$ der nichtstationäre ARI-(autoregressive integrierte) Operator

$$\begin{aligned} \psi(B) &= (1 - \psi_1 B - \psi_2 B^2 \dots - \psi_{p+d} B^{p+d}) = \\ &= (1-B)^d (1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p) \quad (1.2) \\ &= \nabla^d \phi(B) \end{aligned}$$

das Produkt aus dem nichtstationären Differenzenoperator d -ter Ordnung ∇^d mit dem stationären autoregressiven Operator $\phi(B)$. Prozeß (1.1) heißt ARIMA(p,d,q)-Prozeß, z_t ist die beobachtete Zeitreihe und a_t ist der sogenannte "white-noise-Prozeß".

$$\begin{aligned} E a_t &= 0 \\ \text{Var } a_t &= \sigma_a^2 \quad (1.3) \end{aligned}$$

$$\text{Cov } a_t a_s = 0$$

Durch zusätzliche multiplikative Operatorpolynome in (1.1) können saisonale Komponenten in das ARIMA-Modell eingeführt werden. Dies ist Gegenstand der saisonalen Box-Jenkins-Modelle.

Wie bei den ARIMA-Prozessen, so wird auch bei saisonalen Modellen das Prinzip der Parsimonität gefordert. Die Anzahl der Parameter eines saisonalen Modells soll ohne Verlust der adäquaten Darstellung so klein wie möglich gehalten werden.

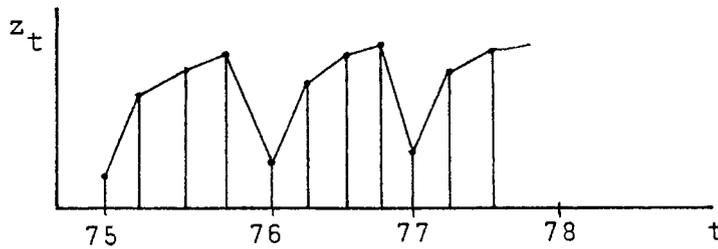
Saisonale Modelle sind durch Saisonfiguren gekennzeichnet, die durch zufällige Störungen oder anderen Prozessen überlagert werden. Die Saisonfigur kann im wesentlichen als periodische Funktion angesehen werden. Die Periodenlänge ist gleichzeitig Länge der Saisonfigur. Nach der Länge der Saisonfigur unterscheiden wir

- $s = 12$ monatliche Zeitreihen
- $s = 4$ vierteljährliche Zeitreihen
- $s = 2$ halbjährliche Zeitreihen

Beispiel 1.1

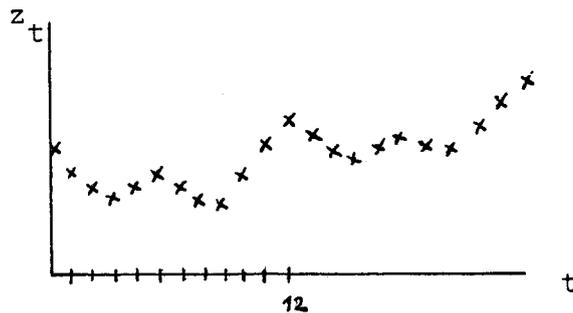
Brutto-Anlage Investitionen Österreichs

Diese vierteljährliche Zeitreihe enthält eine sägezahn-ähnliche Saisonfigur



Beispiel 1.2

Kreditvolumen



Die bisherigen Modelle der Saisonbereinigung von Zeitreihen gehen vom

additiven Modell $z = T+S+I$ oder vom
multiplikativen Modell $z = T \times S \times I$

aus, wobei

T ... die Trendkomponente
S ... die saisonale Komponente
I ... die irreguläre Komponente

bedeutet. Mathematische Modelle für den Trend sind Polynome in der Zeit t , für die saisonalen Komponenten harmonische Reihen der Form

$$\sum_i A_i \cos(\alpha_i t + \beta_i) \quad (1.4)$$

Die irreguläre Komponente ist eine Restgröße, die aus T und S nicht weiter erklärt werden kann und ist ein stochastischer Prozeß, der dem white noise Prozeß nahe kommen soll.

1.2. Saisonfiguren als Spezialfälle des AR(2)-Prozesses

Gegeben sei der AR(2)-Prozeß

$$(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2) z_t = a_t \quad (1.5)$$

Damit der Prozeß stationär ist, müssen die Parameter in folgendem Bereich des R_2 liegen (vgl. G.E.P.Box-G.Jenkins (1970) S.58 und Stralkowski (1970))

$$\begin{aligned} |\theta_2| &< 1 \\ |\theta_1| &< 2 \\ \theta_1 + \theta_2 &< 1 \\ \theta_1 - \theta_2 &< 1 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Sind die Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$(1 - \alpha_1 B)(1 - \alpha_2 B) = 0 \quad (1.7)$$

(konjugiert) komplex, so lauten die Lösungsfolgen

$$z_t = C_1 r^t \cos(\theta t + C_2) \quad (1.8)$$

mit

$$r = \sqrt{-\theta_2} \quad -1 \leq \theta_2 \leq 0 \quad (1.9)$$

$$\cos \theta = \frac{\theta_1}{2\sqrt{-\theta_2}} \quad 0 \leq \theta \leq M, \theta_2 \leq 0 \quad (1.10)$$

Nur für $\theta_2 = -1$ treten ungedämpfte (reine Sinus-) Schwingungen auf. Für $\theta = \frac{2\pi}{T}$ seien im folgenden für spezielle Periodenlängen $T (=1, 2, 3, \dots)$ die AR(2)-Prozesse und die Zeitreihen für die Anfangsbedingungen $z_0 = 0$ und $z_1 = 1$ berechnet.

a) $T=1$

$$\cos 2\pi = \frac{\theta_1}{2\sqrt{-\theta_2}} = 1$$

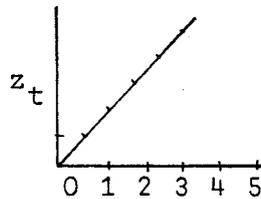
$$\theta_1 = 2\sqrt{-\theta_2}$$

Für $\theta_2 = -1$ ist $\theta_1 = 2$

Die D-Form*) lautet

$$\begin{aligned} (1-2B+B^2)z_t &= 0 \\ (1-B)^2 z_t &= 0 \\ z_t &= 2z_{t-1} - z_{t-2} \end{aligned} \quad (1.11)$$

t	0	1	2	3	4	5	6
z _t	0	1	2	3	4	5	6



oder $z_t = t \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (1.12)$

*) D-Form: Abkürzung für Differenzgleichungsform

Dieses Modell ist nicht stationär.

b) T=2

$$\cos \pi = \frac{\vartheta_1}{2\sqrt{-\vartheta_2}} = -1$$

$$\vartheta_1 = -2\sqrt{-\vartheta_2}$$

Für $\vartheta_2 = -1$ ist $\vartheta_2 = -2$

Die D-Form ist

$$(1+2B+B^2)z_t = 0$$

$$z_t = -2z_{t-1} - z_{t-2} \quad (1.13)$$

t	0	1	2	3	4	5
z _t	0	1	-2	3	-4	5

$$z_t = (-1)^{t+1} t \quad t=0,1,2,\dots \quad (1.14)$$

Dieses Modell ist als Grenzfall ebenfalls nicht stationär.

Es weist ein explodierendes zyklisches Verhalten auf.

c) T=3

$$\cos \frac{2\pi}{3} = \frac{\vartheta_1}{2\sqrt{-\vartheta_2}} = -\frac{1}{2}$$

$$\vartheta_1 = -\sqrt{-\vartheta_2}$$

$$\vartheta_2 = -1 \quad \vartheta_1 = -1$$

$$(1+B+B^2)z_t = 0$$

(1.15)

$$z_t = -z_{t-1} - z_{t-2}$$

t	0	1	2	3	4	5
z _t	0	1	-1	0	+1	-1

$$z_t = \{0, 1, -1\}_3 \quad (1.16)$$

d) T=4

$$\cos \frac{\pi}{2} = \frac{\vartheta_1}{2\sqrt{-\vartheta_2}} = 0$$

$$\vartheta_1 = 0 \quad \vartheta_2 \text{ beliebig für ungedämpft } \vartheta_2 = -1 \quad (1-17)$$

$$(1+B^2)z_t = 0$$

$$z_t = -z_{t-2}$$

$$\begin{array}{c|ccc} t & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline z_t & 0 & 1 & 0 & -1 & \end{array}$$

$$z_t = \{0, 1, 0, -1\}_4$$

(1.18)

e) T=6

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{\vartheta_1}{2\sqrt{-\vartheta_2}} = \frac{1}{2}$$

$$\vartheta_1 = -\vartheta_2$$

$$\vartheta_2 = -1 \quad \vartheta_1 = 1$$

$$(1-B+B^2)z_t = 0$$

$$z_t = z_{t-1} - z_{t-2}$$

(1.19)

$$\begin{array}{c|cccccc} t & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline z_t & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$z_t = \{0, 1, 1, 0, -1, -1\}_6$$

(1.20)

f) T=8

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\vartheta_1}{2\sqrt{-\vartheta_2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\phi_1 = \sqrt{-2\phi_2}$$

$$\phi_2 = -1 \quad \phi_1 = \sqrt{2}$$

$$(1 - \sqrt{2}B + B^2)z_t = 0$$

$$z_t = \sqrt{2}z_{t-1} - z_{t-2} \quad (1.21)$$

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
z_t	0	1	$\sqrt{2}$	1	0	-1	$-\sqrt{2}$	-1	0	1	

$$z_t = \{0, 1, \sqrt{2}, 1, 0, -1, -\sqrt{2}, -1\}_8 \quad (1.22)$$

g) T = 12

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\phi_1}{2\sqrt{-\phi_2}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\phi_1 = +\sqrt{-3\phi_2}$$

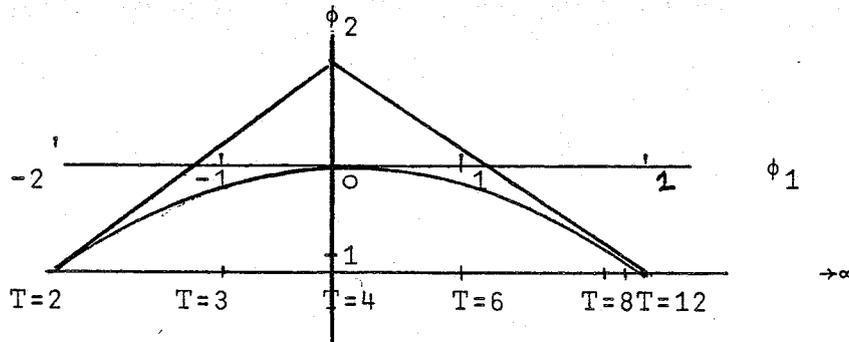
$$\phi_2 = -1 \quad \phi_1 = \sqrt{3}$$

$$(1 - \sqrt{3}B + B^2)z_t = 0$$

$$z_t = \sqrt{3}z_{t-1} - z_{t-2} \quad (1.23)$$

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
z_t	0	1	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{3}$	1	0	-1	$-\sqrt{3}$	-2	$-\sqrt{3}$	-1	0	1

$$z_t = \{0, 1, \sqrt{3}, 2, \sqrt{3}, 1, 0, -1, -\sqrt{3}, -2, -\sqrt{3}, -1\}_{12} \quad (1.24)$$



Die diskutierten Fälle sind Spezialfälle der Parameterkonstellationen im stationären (ϕ_1, ϕ_2) -Dreieck, wobei die ungedämpften Sinusschwingungen nur auf der Grundlinie des Dreiecks ($\phi_2 = -1$) auftreten. Sie treten auch in Zusammenhang mit nichtstationären Differenzenoperatoren als Bestandteile dieser Operatoren auf. Zur Übersicht diene folgende

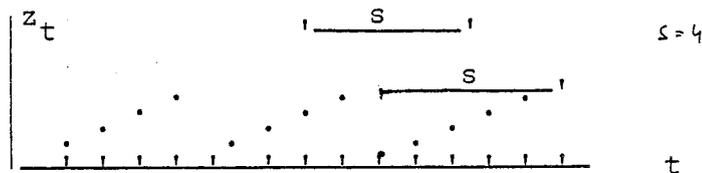
Zusammenfassung:

Periodenlänge T	Operator
1	$(1-2B+B^2)=(1-B)^2$
2	$(1+2B+B^2)$
3	$(1+B+B^2)$
4	$(1+B^2)$
6	$(1-B+B^2)$
8	$(1-\sqrt{2}B+B^2)$
12	$(1-\sqrt{3}B+B^2)$

1.3. Saisonale Differenzenoperatoren

Wie wir gesehen haben, lassen sich streng periodische Funktionen als Spezialfälle des AR(2)-Prozesses darstellen. Die Saisonmuster, die durch sie dargestellt werden können, sind jedoch nur auf wenige beschränkt. Damit gelangt man zur Betrachtung des saisonalen Differenzenoperators $1-B^s$.

Dieser Operator ist auch folgender Motivation zugänglich: In saisonalen Zeitreihen, die eine Saisonfigur der Länge s besitzen, weisen Beobachtungen, die s Intervalle auseinanderliegen, ein ähnliches Verhalten auf.



Daher geht man in saisonalen Zeitreihen auf saisonale Differenzen der Form

$$\begin{aligned} \nabla_s z_t &= (1-B^s)z_t = \\ &= z_t - z_{t-s} \end{aligned} \quad (1.25)$$

über. Die Nullstellen des saisonalen Differenzenoperators liegen am Einheitskreis

$$\begin{aligned} 1-B^s &= 0 \\ B_k &= e^{i\frac{2\pi k}{s}} \quad k=0,1,\dots,s-1 \end{aligned} \quad (1.26)$$

und daher ist ∇_s ein nichtstationärer Operator. Durch die Beziehung

$$\begin{aligned} (1-B^s)z_t &= 0 \\ \text{bzw.} \quad z_t &= z_{t-s} \end{aligned} \quad (1.27)$$

können durch Angabe von s Anfangswerten beliebige streng periodische Saisonmuster erzeugt werden.

Im folgenden seien einige wichtige saisonale Differenzenoperatoren besprochen:

a) Der Operator $1-B^2$

Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$\begin{aligned} (1-B^2) &= (1-B)(1+B) = 0 \\ \text{sind} \quad B_1 &= 1 \quad \text{und} \quad B_2 = -1 \end{aligned} \quad (1.28)$$

Die Lösung der Differenzgleichung ist

$$y_t = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot (-1)^t \quad (1.29)$$

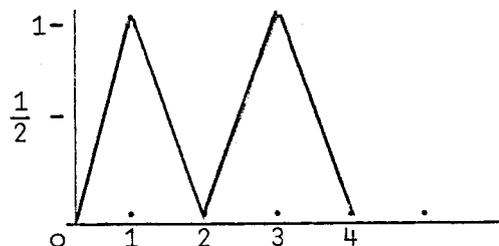
Setzen wir die Anfangsbedingungen $y_0=0$ und $y_1=1$ ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= C_1 + C_2 \\ 1 &= C_1 - C_2 \end{aligned} \quad (1.30)$$

bzw. $C_1 = \frac{1}{2}$ und $C_2 = -\frac{1}{2}$. Wir erhalten somit mit

$$y_t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-1)^t \quad (1.31)$$

$y_t = \{0,1\}_2$



den Typ der Sägezahnkurve für $s=2$.

Beispiel 1.3.: $(1+B^2)z_t=0$

Im Unterschied zum saisonalen Differenzenoperator ist dieser Prozeß ein Spezialfall des AR(2)-Prozesses mit der Periodenlänge $T=4$ (vgl. 1.17). Nun sei die komplexe Lösungsfolge abgeleitet:

Die Nullstellen der charakteristischen Gleichung

$$(1+B^2) = 0 \quad (1.32)$$

sind $B_1=i$ und $B_2=-i$ (vom Typ $u \pm iv$)

$$r = \sqrt{-\phi_2} = \sqrt{u^2+v^2} = 1 \quad (1.33)$$

$$\cos \theta = \frac{u}{r} = 0 \quad (1.34)$$

bzw.

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v}{u} \quad \operatorname{tg} \bar{\theta} = -\frac{v}{u}$$

Dies entspricht einem Winkel von $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ und $\theta_2 = \frac{3\pi}{2}$. Nach der Formel $T=2\pi/\theta$ sind die dazugehörigen Periodenlängen $T_1=4$ und $T_2=4/3$. Wegen des "aliasing"-Problems ist $T_2=4/3$ eine assoziierte Periode, die dieselbe diskrete periodische Punktfolge liefert. Es genügt daher, nur Winkel $0 \leq \theta \leq \pi$ zu betrachten.

Beispielhalber betrachten wir im folgenden beide Lösungsfolgen

$$\begin{aligned}y_t^1 &= A \cos\left(\frac{\pi}{2}t + B\right) \\y_t^2 &= A \cos\left(\frac{3\pi}{2}t + B\right)\end{aligned}\tag{1.35}$$

Die Anfangsbedingungen seien $y_0 = 0$ und $y_1 = 1$

$$\begin{aligned}0 &= A \cos B \\B_1 &= \frac{\pi}{2}, \quad B_2 = \frac{3\pi}{2}\end{aligned}\tag{1.36}$$

Zur Bestimmung von A aus der zweiten Anfangsbedingung haben wir 4 Möglichkeiten

- a) θ_1, B_1 $1 = A \cos \pi \rightarrow A = -1$
- b) θ_1, B_2 $1 = A \cos 2\pi \rightarrow A = 1$
- c) θ_2, B_1 $1 = A \cos 2\pi \rightarrow A = 1$
- d) θ_2, B_2 $1 = A \cos 3\pi \rightarrow A = -1$

Wir erhalten vier Lösungsfolgen

- a) $y_t = -1 \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}(t+1)\right)$
 - b) $y_t = 1 \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}(t+3)\right)$
 - c) $y_t = 1 \cos\left(\frac{3\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}(3t+1)\right) = \cos\frac{3\pi}{2}\left(t + \frac{1}{3}\right)$
 - d) $y_t = -1 \cos\left(\frac{3\pi}{2}t + \frac{3\pi}{2}\right) = -\cos\left(\frac{3\pi}{2}(t+1)\right)$
- (1.37)

Die Folgen a) und d) sind dieselben, da $T = \frac{4}{3}$ eine assoziierte Periode (vgl. A 14) von $T=4$ ist.

$$\cos\frac{\pi}{2}(t+1) = \cos\frac{3\pi}{2}(t+1)\tag{1.38}$$

Ebenso ist

$$\cos\frac{\pi}{2}(t+3) = \cos\frac{3\pi}{2}\left(t + \frac{1}{3}\right)\tag{1.39}$$

Wie man nun leicht nachrechnet, ist

$$\cos\frac{\pi}{2}t = \{1,0,-1,0\}_4 \quad (1.40)$$

und

$$\cos\frac{\pi}{2}(t+1) = \{0,-1,0,1\}_4 \quad (1.41)$$

der um $b=1$ Einheit "später" begonnene Kosinuszyklus. Daher ist

$$-\cos\frac{\pi}{2}(t+1) = \{0,1,0,-1\}_4 \quad (1.42)$$

oder

$$\sin\frac{\pi}{2}t = -\cos\frac{\pi}{2}(t+1) \quad (1.43)$$

Entsprechend ist

$$\cos(\frac{\pi}{2}(t+3)) = \{0,1,0,-1\}_4 \quad (1.44)$$

der um $b=3$ Einheiten später beginnende Zyklus. Wegen der Periodizität ist $b'=T-b = 4-3 = 1$

$$\cos\frac{\pi}{2}(t+3) = \cos\frac{\pi}{2}(t-1) \quad (1.45)$$

also gleich dem Zyklus, der $b'=1$ Einheiten "früher" beginnt.

b) Der Operator $(1-B^4)$

Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung sind

$$(1-B)(1+B)(1+B^2) = 0 \quad (1.46)$$

Wir sehen, daß sich der saisonale Differenzenoperator vierter Ordnung aus dem saisonalen Differenzenoperator 2. Ordnung mit dem speziellen AR(2)-Operator $(1+B^2)$ der Periodenlänge $T=4$ (vgl. 1.17) zusammensetzt. Die Lösungsfolge ist

$$y_t = C_1 + C_2(-1)^t + A\cos(\frac{\pi}{2}t+B) \quad (1.47)$$

Die imaginären Wurzeln entsprechen wieder der Periodenlänge $T=4$. Die Anfangsbedingungen seien $(y_0, y_1, y_2, y_3) = (0, 1, 2, 3)$.

Wir erhalten damit vier Gleichungen

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & 0 = C_1 + C_2 + A \cos B \\ \text{(ii)} \quad & 1 = C_1 - C_2 + A \cos\left(\frac{\pi}{2} + B\right) \\ \text{(iii)} \quad & 2 = C_1 + C_2 + A \cos(\pi + B) \\ \text{(iv)} \quad & 3 = C_1 - C_2 + A \cos\left(\frac{3\pi}{2} + B\right) \end{aligned} \tag{1.48}$$

Wegen der Summensätze gilt $\cos(\pi + B) = -\cos B$, $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + B\right) = \sin B$,
 $\cos\left(\frac{\pi}{2} + B\right) = -\sin B$

$$\begin{aligned} \text{(iii)} - \text{(i)} \quad & 2 = -A \cos B - A \cos B = -2A \cos B \\ & A \cos B = -1 \end{aligned} \tag{1.49}$$

$$\begin{aligned} \text{(iv)} - \text{(ii)} \quad & 2 = A \sin B + A \sin B = 2A \sin B \\ & A \sin B = 1 \end{aligned} \tag{1.50}$$

$$\operatorname{tg} B = -1$$

$$B_1 = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

$$A_1 = \frac{1}{\sin \frac{3\pi}{4}} = +\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = +\sqrt{2} \quad A_2 = \frac{1}{\sin \frac{7\pi}{4}} = -\sqrt{2}$$

Die Konstanten C_1 und C_2 berechnen sich analog durch

$$\begin{aligned} \text{(i)} + \text{(iii)} \quad & 2 = 2C_1 + 2C_2 \\ & C_1 + C_2 = 1 \end{aligned} \tag{1.51}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} + \text{(iv)} \quad & 4 = 2C_1 - 2C_2 \\ & 2 = C_1 - C_2 \end{aligned} \tag{1.52}$$

Daraus ergibt sich $C_1 = \frac{3}{2}$ und $C_2 = -\frac{1}{2}$.

Wir erhalten somit die Lösungsfolgen

$$y_t = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(-1)^t + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{4}t + \frac{3\pi}{4}\right) \tag{1.53}$$

$$y_t = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(-1)^t - 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{7\pi}{4}\right) \tag{1.54}$$

Beispiel A 2:

Zum Nachweis seien die ersten vier Werte nochmals berechnet:

$$y_0 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} + \sqrt{2} \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = 1 - 1 = 0 \quad \frac{2\pi}{4}$$

$$y_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + \sqrt{2} \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = 2 - 1 = 1 \quad \frac{5\pi}{4}$$

$$y_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} + \sqrt{2} \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = 1 + 1 = 2 \quad \frac{8\pi}{4}$$

$$y_3 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + \sqrt{2} \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = 2 + 1 = 3 \quad \frac{11\pi}{4}$$

c) Der Operator $1-B^3$

Dieser Operator kann zerlegt werden in

$$1-B^3 = (1-B)(1+B+B^2)$$

wobei der Operator $(1+B+B^2)$ einen Randfall des AR(2)-Prozesses darstellt. Es ist eine Kosinusschwingung zur Periodenlänge $T=3$ (vgl. (1.15)).

d) Der Operator $(1-B^6)$

Dieser Operator setzt sich zusammen aus

$$(1-B^3)(1+B^3)$$

womit, wie zu erwarten, auch in diesem Modell der Operator $(1-B^3)$ vorkommt und damit eine Periodenlänge von $T=3$.

e) Der Operator $(1-B^{12})$

Dieser zerlegt sich in

$$(1-B^3)(1+B^3)(1+B^6)$$

womit wieder Cosinusfunktionen der Länge $T=3$ enthalten sind.

2. Saisonale Modellklassen

2.1. Das multiplikative Modell

Im folgenden sei die Motivation eines multiplikativen Zeitreihenmodells (nach Box-Jenkins (1970), S.303) wiedergegeben. Eine saisonale Zeitreihe mit bekannter Saisonfigur der Länge s und N Beobachtungen werde mittels

$$N = Ms + c \quad (2.1)$$

wobei $M = \text{mod}(N, s)$ (2.2)

$$C = N - Ms \quad (2.3)$$

in ein Matrixschema geschrieben

$$\{z_t\}_{t=1, \dots, N} \sim \{z_{mr}\}_{\substack{m=1, \dots, n^+C \\ r=1, \dots, s}} \quad (2.4)$$

wobei C die restlichen Elemente der Zeitreihe enthalten

$$C = \{z_{M+1,1}, \dots, z_{M+1,c}\} \quad (2.5)$$

In Tabellenform:

		Saison r				
Jahre m	z_{11}	z_{12}	\dots	\dots	\dots	z_{1s}
	z_{21}	z_{22}	\dots	\dots	\dots	z_{2s}
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
	z_{M1}	\dots	\dots	\dots	\dots	z_{Ms}
	$z_{M+1,1}$	\dots	\dots	\dots	\dots	$z_{M+1,c}$

Diese Tabelle hat s Spalten (für jedes Element der Saisonfigur) und $M+1$ Zeilen, die den Jahren entsprechen, wobei die $M+1$ ste Zeile das letzte noch nicht vollständig bekannte Jahr ist. Die Anordnung in dieser Tabelle soll herausstreichen, daß für saisonale Zeitreihen zwei Zeitkomponenten von Bedeutung sind: die monatliche, und jährlich saisonale.

Man kann daher zweierlei Art von Zusammenhang erwarten:

a) von aufeinanderfolgenden Jahren für jeden Monat

$$z_{1r}, z_{2r}, \dots, z_{mr} \quad r=1, \dots, s$$

b) von aufeinanderfolgenden Monaten in einem Jahr

$$z_{m1}, z_{m2}, \dots, z_{ms} \quad m=1, \dots, M$$

Dieses Schema ist der Varianzanalyse ähnlich, in dem die Spalten die Saisoneffekte und die Zeilen die Jahreseffekte widerspiegeln.

Das multiplikative Modell spezifiziert für die beiden Komponenten eines saisonalen Modells jeweils einen ARIMA-Prozeß und setzt beide multiplikativ zusammen.

Komponente a)

Zunächst spezifizieren wir die saisonale Komponente, indem wir für einen bestimmten Monat r ($1 \leq r \leq s$) für aufeinanderfolgende Jahre einen ARIMA-Prozeß ansetzen

$$z_{t,r} = \phi_1 z_{t-1,r} + \phi_2 z_{t-2,r} + \dots + \phi_p z_{t-p,r} + a_{t,r} \quad (2.6)$$

Gehen wir nun auf die eindimensionale Schreibweise zurück, so ist

$$\begin{aligned} z_t &= \phi_1 z_{t-s} + \phi_2 z_{t-2s} + \dots + \phi_p z_{t-ps} + a_t \\ &= (\phi_1 B^s + \phi_2 B^{2s} + \dots + \phi_p B^{ps}) z_t + a_t \end{aligned} \quad (2.7)$$

Bringen wir den Klammerausdruck auf die linke Seite, so erhalten wir

$$\phi(B^s) z_t = (1 - \phi_1 B^s - \phi_2 B^{2s} - \dots - \phi_p B^{ps}) z_t = a_t \quad (2.8)$$

Wir nennen $\phi_p(B^s)$ das saisonale autoregressive Operatorpolynom (kurz: SAR-Operator) der Ordnung P , wobei der Index P auch weggelassen werden kann.

Analog zu dieser Ableitung definiert man das saisonale Moving-Average Polynom (SMA-Polynom) $\Theta_Q(B^S)$ der Ordnung Q

$$\Theta_Q(B^S) = (1 - \Theta_1 B^S - \dots - \Theta_Q B^{QS}) \quad (2.9)$$

und einen nichtstationären saisonalen Differenzenoperator ∇_S^D

$$\nabla_S^D = (1 - B^S)^D \quad (2.10)$$

Damit können wir die saisonale Komponente folgendermaßen spezifizieren

$$\phi(B^S) \nabla_S^D z_t = \Theta(B^S) \alpha_t \quad (2.11)$$

Wir bezeichnen den Störprozeß mit α_t , da im allgemeinen der durch ein saisonales Modell spezifizierte Prozeß noch keine Störungen a_t liefert, die einem white-noise-Prozeß gehorchen. Von den saisonalen Operatorpolynomen (SAR und SMA) fordert man ebenfalls, daß sie den Stationaritäts- und den Invertibilitätsbedingungen genügen.

Man beachte, daß wir bei dieser Art Spezifikation eines saisonalen Modells angenommen haben, daß die saisonalen Beziehungen für jede Saisoneinheit r (Monate, Quartale, etc.) dieselben sind. Die Parameter ϕ_i und Θ_i sind für alle Monate (Quartale) gleich. Dies kann als Prinzip der Parsimonität für saisonale Modelle interpretiert werden.

Komponenten b)

Durch die saisonalen Komponenten a) kann ein saisonaler Prozeß im allgemeinen nicht alleine erklärt werden. Für den Restprozeß α_t kann man wieder versuchen, einen (nichtsaisonalen) ARIMA-Prozeß zu spezifizieren.

$$\phi(B) \nabla^d \alpha_t = \theta(B) a_t \quad (2.12)$$

Der dadurch gewonnene Störprozeß a_t soll nun möglichst einem white-noise-Prozeß nahekommen. $\phi(B)$ und $\theta(B)$ sind die jeweiligen AR- und MA-Operatorpolynome vom Grad p und q , die ebenfalls die Stationaritäts- und Invertibilitätsbedingungen erfüllen.

$$\phi(B) = (1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p) \quad (2.13)$$

$$\theta(B) = (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q) \quad (2.14)$$

$$\nabla^d = (1-B)^d \quad (2.15)$$

Mit $\psi(B) = \nabla^d \phi(B)$ bezeichnen wir den nichtstationären verallgemeinerten autoregressiven Operator (ARI-Operator).

Zusammensetzung der Komponenten a) und b)

Wir drücken die erste Prozeßkomponente in der Random-Shock-Form aus

$$a_t = \Theta^{-1}(B^S) \phi(B^S) \nabla_S^D z_t \quad (2.16)$$

und setzen diese Form in die Komponente b) ein

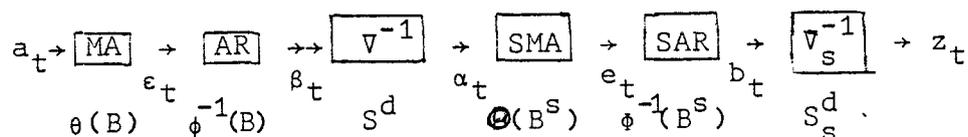
$$\Theta^{-1}(B^S) \phi(B^S) \nabla_S^D \phi(B) \nabla^d = \theta(B) a_t \quad (2.17)$$

bzw.

$$\phi(B^S) \phi(B) \nabla_S^D \nabla^d z_t = \Theta(B^S) \theta(B) a_t \quad (2.18)$$

Wir bezeichnen diesen Prozeß als SARIMA(p,d,q)x(P,D,Q)_S-Prozeß.

Als Black-Box-Schema können wir den Prozeß folgendermaßen auffassen:



Weiters wollen wir folgende Abkürzungen verwenden:

Def. 2.1.: Verallgemeinerter saisonaler Operator $\phi^S(B)$
(ARI_S-Operator)

$$\phi^S(B) = \phi(B^S) \nabla_S^D \quad (2.19)$$

Die Ordnung des ARI_S-Operators ist $P_S + sD = s(P+D)$

Def. 2.2.: Verallgemeinerter autoregressiver saisonaler Operator (SARI-Operator)

$$\begin{aligned}\psi^S(B) &= \phi^S(B)\psi(B) \\ &= \phi(B^S)\phi(B)\nabla_S^D\nabla^d\end{aligned}\quad (2.20)$$

Die Ordnung des Operators ist $L=s(P+D)+p+d$

Def. 2.3.: Saisonaler Moving-Average-Operator (SMA-Operator)

$$\theta^S(B) = \theta(B^S)\theta(B) \quad (2.21)$$

Die Ordnung des SMA-Operators ist $L=Q+q$

2.2. Der SARIMA(0,1,1)x(0,1,1)_s-Prozeß

a) Die D-Form

So wie der IMA(1,1)-Prozeß ein wichtiger Prozeß der ARIMA-Prozesse ist (exponentielles Glätten), so ist auch der SARIMA(0,1,1)x(0,1,1)_s-Prozeß einer der wichtigsten Prozesse zur Prognose von saisonalen Zeitreihen. Er ist multiplikativ aus einem IMA(1,1)-Prozeß zwischen den Saisonen und innerhalb der Saisonen zusammengesetzt. Folgen wir den vorangegangenen Ausführungen, so repräsentieren wir die saisonale Komponente durch einen SIMA(1,1)_s-Prozeß

$$\nabla_{12}z_t = (1-\Theta B^{12})\alpha_t \quad (2.22)$$

Die Periodenkomponente (je nachdem, ob jährliche, vierteljährliche o.a. Zeitreihen vorliegen) ist

$$\nabla\alpha_t = (1-\theta B)\alpha_t \quad (2.23)$$

wobei θ von Θ im allgemeinen verschieden ist. Setzen wir beide Komponenten zusammen

$$\nabla\nabla_{12}z_t = (1-\theta B)(1-\Theta B^{12})\alpha_t \quad (2.24)$$

oder ausgeschrieben lautet die D-Form (Differenzgleichungsform)

$$z_t - z_{t-1} - z_{t-12} - z_{t-13} = a_t - \theta a_{t-1} - \theta a_{t-12} - \theta a_{t-13} \quad (2.25)$$

In dieses Modell gehen die vergangenen Werte z_t, z_{t-1}, z_{t-13} voll ein, während die dazugehörigen Störungen mit a_t , bzw. a_{t-1} , a_{t-12} , a_{t-13} gewichtet eingehen. Die Störung a_{t-13} bekommt im allgemeinen ein sehr geringes Gewicht, da θ meistens nahe bei Null liegt. Die Invertibilitätsbedingungen für den Prozeß erfordern, daß die Wurzeln von

$$(1-\theta B)(1-\theta B^{12}) = 0 \quad (2.26)$$

außerhalb des Einheitskreises liegen, d.j. für die Parameter gilt

$$|\theta| < 1 \quad \text{und} \quad |\theta| < 1$$

Die Ordnung des Moving Average Operators bestimmt sich aus

$$(1-\theta B)(1-\theta B^{12}) = (1-\theta B - \theta B^{12} + \theta \theta B^{13}) \quad (2.27)$$

und bestimmt sich aus

$$q+sQ = (1+12) = 13$$

b) Die RS-Form

Um den Prozeß der Random-Shock-Form (RS-Form)

$$z_t = \psi(B)a_t \quad (2.28)$$

darzustellen, bestimmen wir analog zu den IMA-Prozessen die λ -Form des Modells

$$(1-\theta B)(1-\theta B^{12}) = (\nabla + \lambda B)(\nabla_{12} + \Lambda B^{12}) \quad (2.29)$$

mit

$$\lambda = 1-\theta$$

$$\Lambda = 1-\theta \quad (2.30)$$

Die λ -Form lautet nun

$$\nabla \nabla_{12} z_t = (\nabla + \lambda B)(\nabla_{12} + \Lambda B^{12}) a_t \quad (2.31)$$

Summieren wir diesen Ausdruck mit Hilfe des Summationsoperators SS_{12} , wobei

$$S_{12} = 1 + B^{12} + B^{24} + \dots \quad (2.32)$$

So erhalten wir

$$\begin{aligned} z_t &= (1 + \lambda SB)(1 + \lambda S_{12} B^{12}) a_t = \\ &= 1 + \lambda S a_{t-1} + \lambda S_{12} a_{t-12} + \lambda \lambda S S_{12} a_{t-13} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Daraus lassen sich nun die ψ_j -Koeffizienten der RS-Form bestimmen

$$\begin{aligned} \psi_1 = \psi_2 = \dots = \psi_{11} &= & \psi_{12} &= \lambda + \Lambda \\ \psi_{13} = \psi_{14} = \dots = \psi_{23} &= \lambda(1 + \Lambda) & \psi_{24} &= \lambda(1 + \Lambda) + \Lambda \\ \psi_{25} = \psi_{26} = \dots = \psi_{35} &= \lambda(1 + 2\Lambda) & \psi_{36} &= \lambda(1 + 2\Lambda) + \Lambda \end{aligned} \quad (2.34)$$

Schreiben wir die ψ_j -Koeffizienten als zweidimensionales Matrixschema $\psi_{r,m}$ mit $r=1,2,\dots$ der Anzahl der Jahre und $m=1,2,\dots,12$ der Anzahl der Saisonen, erhalten wir kürzer

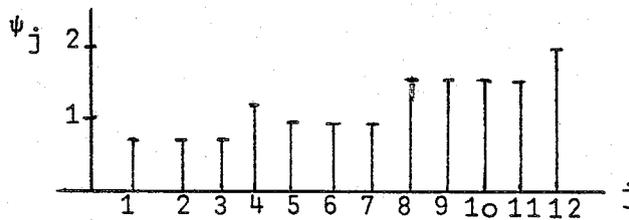
$$\psi_{r,m} = \lambda(1 + r\Lambda) + \vartheta \Lambda \quad (2.35)$$

$$\text{wobei } \vartheta = \begin{cases} 1 & m=12 \\ 0 & m \neq 12 \end{cases} \quad (2.36)$$

eine Indikatorfunktion für $s=m$ ist.

Beispiel 2.1 Der ψ_j -Koeffizient für $\theta=0,2$ und $H=0,5$, $S=4$
Dann ist $\lambda=1-\theta=0,8$ und $\Lambda=1-H=0,5$

$$\begin{aligned} \psi_1 = \psi_2 = \psi_3 &= 0,8 & \psi_4 &= 1,3 \\ \psi_5 = \psi_6 = \psi_7 &= 1,04 & \psi_8 &= 1,54 \\ \psi_9 = \psi_{10} = \psi_{11} &= 1,6 & \psi_{12} &= 2,1 \end{aligned}$$



3. Prognose von SARIMA-Prozessen

Analog zu der Prognose von ARIMA-Prozessen unterscheiden wir drei Formen der Prognose

- a) Prognose in D-Form
- b) Prognose in RS-Form *)
- c) Prognose in π -Form (invertierte Form)

Zur numerischen Berechnung wird fast ausschließlich die Prognose in D-Form verwendet. Die Prognose in RS-Form dient der Berechnung der Prognosevarianzfunktion und dem Update von Prognosen, während die Prognose in π -Form den direkten Ansatz der MSE-Prognose liefert und die Gewichte vergangener Werte auf den zu prognostizierenden Wert angibt.

Weiters unterscheiden wir zwischen der Prognosefunktion $\hat{z}_t(1)$ und der eventuellen Prognosefunktion $\check{z}_t(1)$

3.1. Die Prognosefunktion

Zur Betrachtung von Prognosefunktionen von ARIMA-Prozessen erweist sich das Konzept der bedingten Erwartungswerte als recht nützlich.

Definition 3.1. Bedingte Erwartungswerte

Zur kürzeren Schreibweise kürzen wir die bedingten Erwartungswerte durch einen eckigen Klammersausdruck ab:

$$E_t[z_{t+j}] = [z_{t+j}] = E[z_{t+j} | P, z_t, z_{t-1}, \dots] \quad (3.1)$$

$$\text{wobei } P = (\phi_1 \dots \phi_p, \phi_1 \dots, \phi_p, \theta_1 \dots \theta_q, \Theta_1 \dots \Theta_Q) \quad (3.2)$$

Es ist der bedingte Erwartungswert einer Zeitreihe

$$[z_{t+j}] = \begin{cases} z_{t+j} & j \leq 0 \\ z_t(j) & j > 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

*) RS-Form: Random Shock-Form

der Störprozeß (white noise)

$$[a_{t+j}] = \begin{cases} a_{t+j} & j \leq 0 \\ 0 & j > 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

Bedingte Erwartungswerte erlauben realisierte und theoretische Werte in einem Konzept zu vereinen.

Ist t der Prognosezeitpunkt und l die leadzeit, so ist die Prognosefunktion gleich den bedingten Erwartungswerten zum Zeitpunkt t

$$\hat{z}_t(l) = E_t[z_{t+l}] \quad (3.5)$$

Die Prognosen in D-Form lauten somit

$$\phi(B^S)\phi(B)\nabla_S^D \nabla^d [z_{t+l}] = \Theta(B^S)\theta(B)[a_{t+l}] \quad (3.6)$$

$$\text{bzw. } \phi(B^S)\phi(B)\nabla_S^D \nabla^d \hat{z}_t(l) = 0 \quad l > Q_S + q \quad (3.7)$$

Die Prognosefunktion $\hat{z}_t(l)$ erfüllt für lags größer als der SMA-Operator der Ordnung $R=Q+q$ die Differenzgleichung

$$\phi(B^S)\hat{z}_t(l) = 0 \quad (3.8)$$

Beispiel 3.1 SARIMA (0,1,1)x(0,1,1)₄-Modell

$$\nabla^4 \nabla z_t = (1 - \theta_1 B)(1 - \Theta_1 B^4) a_t$$

Die Prognosefunktion $\hat{z}_t(l)$ lautet

$$\nabla^4 \nabla [\hat{z}_{t+l}] = (1 - \theta_1 B)(1 - \Theta_1 B^4) [a_{t+l}]$$

oder ausgeschrieben

$$\begin{aligned} [z_{t+l}] &= [z_{t+l-1}] + [z_{t+l-4}] - [z_{t+l-5}] + [a_{t+l}] \\ &\quad - \theta_1 [a_{t+l-1}] - \Theta_1 [a_{t+l-4}] + \theta_1 \Theta_1 [a_{t+l-5}] \end{aligned}$$

Setzen wir $\theta_1=0,2$ und $\hat{\Theta}_1=0,5$ so erhalten wir

$$\begin{aligned}\hat{z}_t(1) &= z_t + z_{t+3} - z_{t-4} - 0,2 a_t - 0,5 a_{t-3} + 0,1 a_{t-4} \\ \hat{z}_t(2) &= \hat{z}_t(1) + z_{t-2} - z_{t-3} - 0,5 a_{t-2} + 0,1 a_{t-3} \\ \hat{z}_t(3) &= \hat{z}_t(2) + z_{t-1} - z_{t-2} - 0,5 a_{t-1} + 0,1 a_{t-2} \\ \hat{z}_t(4) &= \hat{z}_t(3) + z_t - z_{t-1} - 0,5 a_t + 0,1 a_{t-1} \\ \hat{z}_t(5) &= \hat{z}_t(4) + \hat{z}_t(1) - z_t + 0,1 a_t\end{aligned}$$

wegen $R=Q+q=4+1=5$ erfüllt die Prognosefunktion für $l > 5$ die Differenzgleichung $\hat{z}_t(l) = \hat{z}_t(l-1) + \hat{z}_t(l-4) - \hat{z}_t(l-5)$

3.2. Die eventuelle Prognosefunktion (EFF)

Die EFF ist Lösung der homogenen Differenzgleichung des SARI-Operators

$$\phi^S(B) \check{z}_t(l) = 0 \quad (3.9)$$

$$\phi(B^S) \phi(B) \nabla_S^D \nabla_S \check{z}_t(l) = 0 \quad l > L-R \quad (3.10)$$

wobei B auf l wirkt.

Wir unterscheiden die EFF deshalb von der Prognosefunktion $\hat{z}_t(l)$, da die EFF allgemein nicht die Prognosefunktion überdecken muß, oder die letzten beobachteten Zeitreihenwerte enthält. Die Differenzgleichung der EFF ist von der Ordnung

$$L = s(P+D) + p + d \quad (3.11)$$

und wir nennen die L Anfangswerte zur Lösung der Differenzgleichung die Pivotprognosen. Für saisonale EFF erweist es sich wieder als zweckmäßig, die EFF als Matrixschema zu schreiben.

Wir setzen

$$\begin{aligned}l = (r, m) \quad r = 0, 1, 2 \dots \\ m = 1, 2, \dots, s\end{aligned} \quad (3.12)$$

um die leadzeit der Jahre r im Monat m zu bezeichnen. Für vierteljährliche Zeitreihen ist daher $\gamma=(1,3)$

Im folgenden sei eine kurze Übersicht über die wichtigsten autoregressiven Operatorpolynome und deren EFF gegeben.

Autoregressiver Operator	EFF $\check{z}_t(r,m)$	Backorder = Anzahl der Startwerte
(1) $1-\phi B^s$	$\mu+(b_{o,m}-\mu)\phi^r$	s
(2) $1-B^s$	$b_{o,m}$	s
(3) $(1-B)(1-\phi B^s)$	$b_{o,r}(b_{o,m}-b_o)\phi^r+b_1 \frac{1-\phi^r}{1-\phi}$	$s+1$
(4) $(1-\phi B)(1-B^s)$	$b_{o,m}+b_1\phi^{m-1}(1-\phi^{sr})/(1-\phi^s)$	$s+1$
(5) $(1-B)(1-B^s)$	$b_{o,m}+b_1r$	$s+1$
(6) $(1-B)(1-B^s)^2$	$b_{o,m}+b_1mr+\frac{1}{2}b_2r(r-1)$	$2s+1$
(7) $(1-B)^2(1-B^s)$	$b_{o,m}+(b_1+(m-1)b_2)r+\frac{1}{2}b_2sr(r-1)$	$s+2$

3.3. Die EFF eines ARIMA(0,1,1)x(0,1,1)_s-Modells

Die EFF ist Lösung von

$$(1-B)(1-B^s)\check{z}_t(1)=0 \quad 1 > 0 \quad (3.13)$$

$$\text{da } L=s(P+D)+p+d=s+1 \quad \text{und } R=sQ+p=s+1 \quad (3.14)$$

$$\text{ist } L-R=s+1-s-1s=0$$

In diesem Modell fallen die $s+1$ Pivotprognosen mit den ersten $s+1$ Werten der Prognosefunktion zusammen.

Setzen wir nun $l=(r,m)$ $m=1,\dots,s$, $r=1,2,\dots$ so ist die EFF Lösung von

$$(1-B)(1-B^s)\check{z}_t(r,m)=0 \quad (3.15)$$

Da $(1-B)$ immer ein Faktor von $(1-B^s)$ ist, so kommt die Wurzel $B_1=1$ doppelt in der charakteristischen Gleichung vor. In diesem Fall lautet die Lösung

$$z_t=c_1+c_2t \quad (3.16)$$

Beispiel 3.2. $z_t = (1-B)^2 a_t$

Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung ist die Doppel-
lösung $1-B=1$.

Die allgemeine Lösung lautet daher

$$z_t = c_1 + c_2 t \quad (3.17)$$

Man beachte, daß $(1-B)^2 = 1 - 2B + B^2$ die Differenzgleichung
der Geraden $z_t = 1+t$ ist und als Grenzfall des AR(2)-Prozesses
die entartete "Periode" $T=1$ hat (vgl. 1.11).

Die restlichen $s-1$ Wurzeln sind verschieden und enthalten
konjugiert komplexe Wurzeln. Wir schreiben die $s+1$ Konstanten
(die durch die Anfangsbedingungen bestimmt werden) ebenfalls
in Matrixform $b_{0,1}^{(t)}, \dots, b_{0,s}^{(t)}, \dots, b_1^{(t)}$ (3.18)

sodaß die EFF die Form

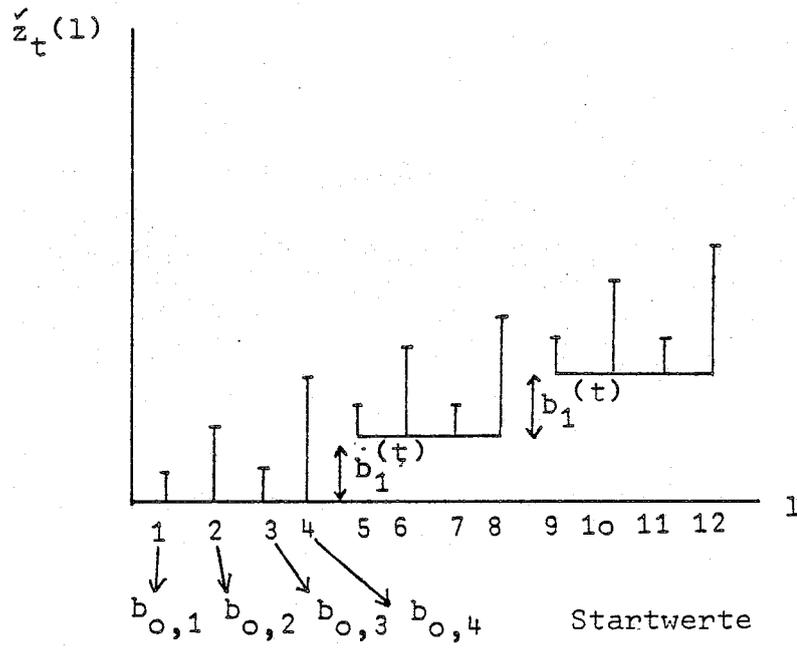
$$\check{z}_t(1) = \check{z}_t(r,m) = b_{0,m}^{(t)} + r b_1^{(t)} \quad 1 > 0 \quad (3.19)$$

annimmt. Die $s+1$ Konstanten sind die adaptiven Koeffizienten
 $b_{r,m}^{(t)}$, die durch die $s+1$ Pivotprognosen bestimmt werden und
sich damit von einer Periode zur anderen an die Zeitreihe
anpassen (daher der Index t).

Beispiel 3.3. Die EFF eines $(0,1,1) \times (0,1,1)_4$ -Prozesses

Dieses vierteljährliche Modell hat die Saisonlänge 4 und besitzt
daher $s+1=5$ Pivotprognosen und adaptive Konstanten $b_{0,1}^{(t)}, b_{0,2}^{(t)},$
 $b_{0,3}^{(t)}, b_{0,4}^{(t)}, b_1^{(t)}$

Die 4 Koeffizienten $b_{0,i}^{(t)}$ $i=1, \dots, 4$ bestimmen die durch-
schnittliche saisonale Komponente, während $b_1^{(t)}$ die jährliche
Veränderung der saisonalen Konstanten angibt.



Graphische Struktur der EFF

Teil B: Saisonale Autokorrelationsstrukturen

1. Die ACF für verschiedene SARIMA-Prozesse

Zur Identifikation von saisonalen Zeitreihenmodellen mit Hilfe der Box-Jenkins Methode ist die ACF das wichtigste Hilfsmittel. Nichtsaisonale ARIMA-Prozesse haben - auf Grund des Prinzips der Parsimonität - nur wenige Parameter, maximal 2 oder 3. Unterschiedliche Werte und Vorzeichen lassen nur eine geringe Anzahl von verschiedenen ACF-Mustern zu, sodaß zur Identifikationsphase eine überschaubare Menge von Alternativen bereit steht.

Dies ist jedoch bei saisonalen Modellen nicht so einfach. Neben der oft doppelt so großen Anzahl von Modellparametern kommt noch die Möglichkeit einer additiven oder multiplikativen Modellwahl dazu. Dazu kommt noch, daß durch unterschiedliche Vorzeichen der Parameter bestimmte ACF-Muster nicht gleich bleiben, oder nur ganz bestimmte ACF-Muster möglich sind.

Die Aufgabe des folgenden Abschnitts ist die Beschreibung der wichtigsten SARIMA-Prozesse für unterschiedliche Moving Average Operatoren. Saisonale Differenzen und saisonale Autoregressive Operatoren seien bereits bestimmt.

1.1. Modellklassen

Die große Vielfalt von saisonalen Modellen legt folgende Klasseneinteilung nahe.

I Additive und multiplikative Modelle

In multiplikativen Modellen kann das MA-Polynom durch ein Produkt von zwei Polynomen dargestellt werden, in dem entweder nur saisonale (SMA-Operator) oder nur nichtsaisonale (MA-Operator) Parameter vorkommen.

In additiven Modellen besteht das MA-Polynom aus saisonalen und nichtsaisonalen Parametern.

Schließlich ist noch eine Kombination von additiven und

multiplikativen Modellen möglich.

II Anzahl der saisonalen Parameter

Da saisonale Modelle ebenfalls nach dem Prinzip der Parsimonität erstellt werden sollen, unterscheiden wir Modelle aufsteigend nach ein, zwei, etc. saisonalen Parametern.

III Doppelt saisonale Modelle

In multiplikativen saisonalen Modellen kann das MA-Polynom aus dem Produkt von einem saisonalen Operatorpolynom mit einem nichtsaisonalen dargestellt werden. Aus Gründen der Parsimonität liegt der Gedanke nahe, durch Multiplikation eines weiteren saisonalen Operatorpolynoms saisonale Parameter einzusparen. Doppelt saisonale Modelle bestehen daher aus zwei saisonalen MA-Operatoren und einem nichtsaisonalen. Auch hier sind wieder Kombinationen mit additiven Modellen möglich.

IV Die Länge der saisonalen Komponenten

Nach der Länge der Saisonfigur unterscheiden wir im wesentlichen monatliche und vierteljährliche Modelle. Neben der größeren Länge der ACF, die bei monatlichen Zeitreihen zu schätzen ist, tritt bei vierteljährlichen (und halbjährlichen) Modellen das Problem auf, daß Beiträge zum ersten Teil der ACF (meistens bis zum lag $s/2$) durch Überlappen von saisonalen und nichtsaisonalen Parametern zustande kommen. Bei monatlichen Zeitreihen sind diese Muster in der ACF weiter auseinandergezogen. Durch diese Überlappung können beste Autokorrelationen verstärkt oder kompensiert werden.

Im folgenden betrachten wir nur SARIMA-Prozesse zur Saisonlänge $s=4$. Die Beschreibung der Modelle erfolgt nach der Anzahl der Parameter in aufsteigender Ordnung. Weiters wird in jeder Klasse von Modellen mit gleicher Anzahl von Parametern additive, multiplikative und doppelt multiplikative Modelle unterschieden.

Für die Parameter werden einheitlich nur die Werte $\pm 0,5$ gewählt. Die Wahl des Grenzfalles $\pm 1,0$ hat sich als nicht vorteilhaft er-

wiesen, da dadurch einige Korrelationen verschwinden und andere überproportional groß werden. Dies scheint ein akzeptabler Kompromiß zu sein um den allgemeinen Eindruck und die spezielle Eigenschaften eines ACF-Musters widerzugeben. Ist n die Anzahl der Parameter, so betrachten wir daher 2^n verschiedene ACF pro saisonalem Modell.

Weitere Ausführungen:

Zusätzlich könnte man die saisonalen Modelle noch bezüglich weiterer Kriterien auswerten

- a) Wie verhält sich die PACF eines saisonalen Modells
- b) Wie verändert sich die ACF, wenn ein oder mehrere autoregressive Parameter vorkommen. Damit ist die Analyse gemischter saisonaler Modelle verbunden
- c) Wie verhält sich das Spektrum saisonaler Modelle
- d) Wie sehen die zugehörigen inversen ACF aus

"Backorder" saisonaler Modelle

Für die Länge der ACF und PACF ist es günstig, den größten lag (maximum Backorder) eines Modells zu definieren.

Definition 1.1 Linke und rechte "backorder"

- a) Die linke "backorder" L ist die Summe der größten Exponenten des ARI- und des SARI-Operatorpolynoms.

$$\phi_p(B^s)\phi(B)\nabla_s^D\nabla_s$$

$$\begin{aligned} L &= P_s + D_s + p + d = \\ &= s(P+D)+p+d \end{aligned}$$

- b) Die rechte "backorder" R ist die Summe der größten Exponenten des MA- und des SMA-Operatorpolynoms

$$\Theta_Q(B^s)\theta(B)$$

$$R = Q_s + p$$

Definition 1.2. Maximale backorder

Gegeben sei der SARIMA $(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$ -Prozeß. Dann ist die maximale backorder M das Maximum von linker und rechter backorder

$$M = \max (L,R)$$

Damit kann man folgende beide Aussagen treffen

- a) Die ACF eines reinen MA-Prozesses ist nicht größer als die maximale backorder $M=R$
- b) Die PACF eines reinen AR-Prozesses ist nicht größer als die maximale backorder $M=L$

Kurzbeschreibung saisonaler Modelle

Die große Einteilungsvielfalt saisonaler Modelle nach Modellklassen legt es nahe, eine weitere Kurzbeschreibung einzuführen. Die Schreibweise in Operatorpolynomen dient sehr zur kompakten und mnemotechnischen Beschreibung, trotzdem werden bei saisonalen Modellen diese Ausdrücke relativ lang.

Deshalb wollen wir folgende Kurzbeschreibung verwenden

$$(1-\theta_1 B \dots -\theta_p B^p)(1-\phi_1 B^s \dots -\phi_Q B^{sQ}) = (1+2+\dots+q) \times (1+s+\dots+sQ)$$

Additive und multiplikative Modelle werden durch + und \times -Zeichen unterschieden. Zur Charakterisierung dienen nur die Exponenten des B-Verschiebungsoperators, und die Klammern geben die Operatorpolynome an. Die Anzahl der Parameter ist die Summe der einzelnen Positionen.

1.2. Moving Average Prozesse

Bevor wir im nächsten Kapitel die saisonalen Moving Average Modelle zu analysieren beginnen, wollen wir einige Grundstrukturen einfacher Moving Average Prozesse diskutieren. Diese lassen sich zum Teil auf saisonale Moving Average Prozesse übertragen.

1.2.1. Der MA(2)-Prozeß

Der MA(2)-Prozeß weist als einfachster MA-Prozeß eine "additive" Struktur auf. Damit weist die ACF eines MA(2)-Prozesses zwei wesentliche Grundeigenschaften auf, die sich in allen additiven saisonalen Modellen wiederholen.

Die Beschreibung der folgenden Modelle kann nur in Zusammenhang mit den theoretischen ACF in Teil B und den exemplarisch graphischen ACF-Mustern (für Saisonlänge $s=4$ und Parameterwerte $\pm 0,5$) diskutierte werden. Dazu sei nochmals die Kurzschreibweise für die Computerausdrucke erklärt.

Für $z_t = (1 - 0,5B^1 - 0,5B^2)a_t$ schreiben wir in kürzerer "Computernotation"
 $= (1 - .5B1 - .5B2)$

Die beiden "Grundeigenschaften" eines MA(2)-Prozesses sind

1) Positive und negative ACF

- a) Sind alle Parameter positiv ($\theta_1=0,5, \theta_2=0,5$), so ist die ACF positiv
- b) Sind alle Parameter negativ ($\theta_1=-0,5, \theta_2=-0,5$) so ist die ACF negativ

2) Positiv-negative Stufe

Haben zwei benachbarte Parameter unterschiedliche Vorzeichen, dann besitzt die ACF "charakteristische Stufen"

- a) ist der erste Parameter positiv ($\theta_1=+0,5, \theta_2=-0,5$) so ist dies eine -+ Stufe (negativ-positiv Stufe)

b) ist der erste Parameter negativ ($\theta_1 = -0,5$, $\theta_2 = +0,5$) so ist dies eine +- Stufe (positiv-negativ Stufe)

Man beachte, daß die beiden Stufen nicht symmetrisch sein müssen. Die jeweilige positive Autokorrelation ist betragsmäßig kleiner als der benachbarte negative Wert.

1.2.2. Der MA(3)-Prozeß

Eine weitere wichtigen Grundstruktur zwischen "additiven" und "Multiplikativen" Modellen läßt sich am MA(3)-Prozeß und am MA(1x1)-Prozeß erklären. Dabei sei MA(1x1) eine Kurzbezeichnung für den "multiplikativen" MA-Prozeß zweiter Ordnung.

$$\text{MA}(1x1) \quad z_t = (1 - \theta_1 B^1)(1 - \theta_2 B^2) a_t$$

Am MA(3)-Prozeß können wir erstmals "Verstärkungs-" und "Dämpfungs-" (Kompensations-)modelle unterscheiden. Die Kompensationsmodelle treten bei den Parameterkonstellationen $(-, -, -)$, $(-, +, +)$, $(+, -, +)$ und $(+, +, -)$ auf. Sind die Vorzeichenkombinationen lexikographisch geordnet und stellen wir die ersten wie auf einer und die restlichen vier Modelle auf einer anderen Seite zusammen, so liegen die Kompensationsmodelle auf der ersten Seite außen-außen, auf der zweiten Seite innen-innen.

Die Verstärkungsmodelle sind die restlichen Parameterkonstellationen, sie liegen damit am graphischen Computerausdruck innen-innen und außen-außen.

Die meisten saisonalen Moving Average Prozesse zeichnen sich durch ACF neu aus, deren dominierende Werte an den entsprechenden lags Hinweise auf die Parameter derselben Ordnung geben.

(Beispiel: hohe Autokorrelationen an lag 4 deutet auf eine θ_4 Parameter). Daß dies nicht im allgemeinen der Fall ist, zeigt bereits der MA(3)-Prozeß. Es kann also bei additiven Modellen durchaus passieren, daß vorläufig identifizierte Parameterwerte nicht die entsprechende Wirkung der Schätzung des Modells zeigen, d.h. die ACF der Residuen bei entsprechender Parameterwahl trotz geschätzten Parameter θ_k an lag k noch Autokorrelation aufweist.

1.2.3. Der MA(1x1)-Prozeß

Der MA(1x1)-Prozeß ist wegen

$$z_t = (1 - \theta_1 B)(1 - \theta_2 B^2) a_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 + \theta_1 \theta_2 B^3)$$

formal von der Ordnung 2, jedoch ist die rechte backorder $R=3$. Damit paßt er in das Schema der MA(3)-Prozesse jedoch nur mit spezieller Parameterkonstellation $\theta_3 = -\theta_1 \theta_2$. Bei den eingesetzten Parameterwerten von $\pm 0,5$ hat dieser zur Folge, daß die Korrelationen an lag 3 etwa halb so groß sind wie im additiven MA(3)-Prozeß.

Der multiplikative MA(1x1)-Prozeß hat den Vorteil, nur die Verstärkungsmodelle des additiven MA(3)-Prozesses herauszugreifen. Dem ACF-Muster der MA(1x1)-Prozesse entsprechen daher die innen-innen und außen-außen ACF-Muster des MA(3)-Prozesses. Neben der geringen Parameteranzahl (Prinzip der Parsimonität) haben daher die "multiplikativen" Modelle durch ihre Eigenschaft besonders die saisonalen Verstärkungsmodelle zu forcieren, eine wichtige Bedeutung in der Konzeption und Anwendung von saisonalen Moving-Average Prozessen.

Durch Spezifikationen von multiplikativen Modellen erreicht man eine spezielle Parameterstruktur von additiven Modellen höher backorder. Dies gilt in entsprechender Erweiterung für doppelt saisonale (multiplikative) Modelle.

2. 2-Parametermodelle

2.1. Modelle mit einem saisonalen Parameter

Zwei-Parametermodelle mit einem saisonalen Parameter erfassen zwei der wichtigsten und meist verwendeten Modelle. Das additive (1+s)-Modell und das multiplikative (1xs)-Modell. Das multi-

plikative (1+s)-Modell zusammen mit dem Differenzenoperator $\nabla \nabla_s$ ist die saisonale Verallgemeinerung des exponentiellen Glättens.

2.1.1. Das $z_t = (1 - \theta_1 B - \theta_4 B^4)$ -Modell

Allgemein: Dieses additive (1+s) Modell folgt dem MA(2)-Schema, aber nun an den lags 1 und 4. Zusätzlich tritt bei lag 3 eine Autokorrelation auf (die betragsmäßig maximal die Hälfte der beiden anderen Korrelationen anrechnen kann). Diese zusätzliche Korrelation kommt durch das Zusammenwirken der saisonalen (\oplus) mit der nicht-saisonalen Komponente (\ominus) zustande. Das Vorzeichen von ρ_3 bestimmt sich durch die Vorzeichen von θ_1 und θ_4 . Sind diese Vorzeichen gleich, so ist $\rho_3 > 0$. Sind diese verschieden, so ist $\rho_3 < 0$.

Charakteristika: Ist $|\theta_1| = |\theta_4|$ so ist $|\rho_1| = |\rho_4|$. Die vorläufigen Parameterwerte können indirekt proportional zu ρ_1 und ρ_3 gewählt werden. Die kennzeichnenden Werte des Modells sind ρ_1, ρ_4 .

2.1.2. Das $z_t = (1 - \theta_1 B)(1 - \theta_4 B^4)a_t$ -Modell

Allgemein: Da multiplikative (1xs)-Modell ist das einfachste saisonale Modell und weist das typische "Gabel"-Muster aller multiplikativen Prozesse auf. Wir unterscheiden für $\theta_1 < 0$ "offene Gabelmuster" \lrcorner und für $\theta_1 > 0$ "geschlossene Gabelmuster" \llcorner . Diese Gabelmuster entstehen im Gegensatz zum korrespondierenden additiven (1+s) Modell dadurch, daß durch multiplikative Modelle zwei zusätzliche Autokorrelationen ρ_3 und ρ_5 , also vor und nach den saisonalen lag $s=4$ induziert wurden.

Dies entspräche etwa einer "Interaktion" zwischen saisonaler und nichtsaisonaler Prozeßkomponenten in diesem Modell. Im Unterschied zum $(1+s)$ -Modell sind die Autokorrelationen ρ_1 und ρ_4 in multiplikativen Modellen leicht größer.

Charakteristika: Ebenso wie im $(1+s)$ -Modell gilt für $|\theta| = |\theta_4|$ daß $|\rho_1| = |\rho_4|$ ist. Bei ungleichen Parameter dominiert der betragsmäßig größere die ACF. Weiters gilt für alle Parameterkonstellationen $\rho_{s-1} = \rho_{s+1}$. Die kennzeichnenden Werte der ACF sind wie im $(1+s)$ -Modell ρ_1 und ρ_4 jedoch diesmal mit dem charakteristischen Gabelmuster, d.h. ist $\rho_{s+1} \neq 0$, so ist das multiplikative Modell $(1xs)$ dem additiven $(1+s)$ -Modell vorzuziehen.

2.2. Modelle mit zwei saisonalen Parameter

2.2.1 Das $z_t = (1 - \theta_3 B^3 - \theta_4 B^4) a_t$ -Modell

a) (s_{-1}, s) -Modelle

Allgemein: Dieses additive $(s_{-1}+s)$ -Modell folgt ebenfalls dem MA(2)-Schema, aber nur an den lags 3 und 4. Im Gegensatz zum $(1+s)$ Modell tritt durch Interaktion der beiden saisonalen Parameter ein zusätzlicher Beitrag zu lag 1 auf. Dieser ist ebenfalls betragsmäßig maximal die Hälfte der beiden anderen Korrelationen. Ebenso wie im $(1+s)$ Modell ist dieser zusätzliche Beitrag für gleiche Vorzeichen von θ_3 und θ_4 positiv, andernfalls negativ.

Charakteristika: Für $|\theta_3| = |\theta_4|$ gilt $|\rho_3| = |\rho_4|$, anderenfalls dominiert der größte Parameter die ACF. Die "charakteristische Stufe" des MA(2)-Prozesses ist in diesem Fall symmetrisch.

Kennzeichen: Die kennzeichnenden Korrelationen sind ρ_3 und ρ_4 . Ist ρ_3 im Vergleich zu ρ_1 beträchtlich größer (bzw. kann nicht signifikant geschätzt werden), so ist dieses Modell dem $(1+s)$ -Modell vorzuziehen.

2.2.2. Das $z_t = (1 - \theta_3 B^3)(1 - \theta_4 B^4)a_t$ -Modell

Allgemein: Dieses multiplikative $(s_{-1}xs)$ -Modell folgt in gleicher Weise wie das $(s_{-1}+s)$ -Modell dem MA(2)-Schema an den lags 3 und 4. Im Unterschied zum multiplikativen $(1xs)$ -Modell treten nun die beiden zusätzlichen Beiträge infolge Interaktion der saisonalen Parameter an den lags 1 und 7 ($s-s_{-1}$ bzw. $s+s_{-1}$) auf. Es entsteht nicht das charakteristische Gabelmuster der $(1xs)$ -Modells, sondern eine Art verdoppeltes asymmetrisches Gabelmuster. Die Korrelationen an der Stelle s_{-1} und s können größere Werte annehmen als im additiven $(s_{-1}+s)$ -Modell.

Charakteristika:

- a) Ist $|\theta_{s-1}| = |\theta_s|$ dann ist $|\rho_3| = |\rho_4|$, ansonsten dominiert der größere Parameter die ACF.
- b) Bei gleichen Vorzeichen der Parameter ist $\rho_1 > 0$, bei ungleichen Vorzeichen sind beide Korrelationen negativ.

Kennzeichen: Die kennzeichnenden Autokorrelationen dieses Modells sind ρ_3 und ρ_4 in Verbindung mit ρ_7

- a) Immer dann, wenn $\rho_7 > \rho_5$ ist (aber immer noch kleiner), sollte dieses Modell dem $(1xs)$ -Modell vorgezogen werden.
- b) Ist ρ_4 groß und haben ρ_1 und ρ_7 das gleiche Vorzeichen (aber kleiner im Vergleich zu ρ_4), dann sollte man dieses Modell versuchen.

b) $(s, 2s)$ -Modelle

2.2.3. Das $z_t = (1 - \theta_4 B^4 - \theta_8 B^8)a_t$ -Modell

Allgemein: Dieses Modell folgt dem allgemeinen MA(2)-Schema, aber nur an den lags 4 und 8. Man beachte, daß das Modell

mit $(s, 2s)$ -Komponenten auch als $(s, s/2)$ -Komponenten interpretiert werden können. Das $(2+4)$ -Modell weist damit das um die Hälfte verkleinerte (aber sonst gleiche) ACF-Schema auf, wie das $(4+8)$ -Modell.

Charakteristika :

- a) Für $|\theta_4| = |\theta_8|$ ist $|\rho_8|$ für alle Parameterkonstellationen konstant
- b) Ist $\theta_8 > 0$ so treten bei ρ_4 Verstärkungseffekte auf. Die Korrelationen kann bis $\pm 0,5$ ansteigen.
- c) Ist $\theta_8 < 0$ so treten bei ρ_4 Kompensationseffekte auf, Die Korrelation kann man bis $1/6$ senken.

Kennzeichen: Sind bei saisonalen Modellen an der Stelle s und an der Stelle $2s$ (bzw. $\frac{s}{2}$) etwa gleich große Korrelationen vorhanden, so ist dieses Modell günstig.

2.2.4. Das $z_t = (1 - \theta_4 B^4)(1 - \theta_8 B^8)a_t$ -Modell

Allgemein: Dieses Modell ist der multiplikativen $(sx2s)$ -Version des vorigen Modells. Die maximale Backorder $\pi=12$. Die Korrelationen treten nur an der Stelle $4, 8$ und 12 auf. Im wesentlichen folgt das ACF-Schema dem $(sx2s)$ -Modell. Wie fast immer bei multiplikativen Modellen wird das Vorzeichen von ρ_{12} durch die Vorzeichenkonstellation der Parameter bestimmt. $\rho_{12} > 0$ für gleiche Vorzeichen von θ_s und θ_{2s} , ansonsten negativ.

Kennzeichen: Tritt neben ρ_4 und ρ_8 noch eine zusätzliche Korrelation an der Stelle ρ_{12} auf, so kann dieses Modell gegenüber dem $(s+2s)$ -Modell gewählt werden. Man probiere jedoch auch einen saisonalen autoregressiven Parameter $(1 - \phi_4 B^4)$, da dieser bei der

Schätzung nur s statt $3s$ Anfangswerte benötigt.
Dieses Modell ist einem autoregressiven dann vorzuziehen, wenn $|p_4| < |p_8| > |p_{12}|$ gilt.

2.2.5. Das $z_t = (1 - \theta_4 B^4)(1 - \theta_4 B^4)a_t$ -Modell

Allgemein: Multiplikative Modelle mit den gleichen saisonalen Parametern in beiden Komponenten haben Verstärkungseffekte in der betreffenden saisonalen lag zur Folge (bis $\pm 0,6$). Derart hohe Korrelationen können im einfachen SMA-Modell infolge der Investibilitätsbedingung nicht vorkommen. Man beachte, daß der Verstärkungseffekt nur bei gleichen Vorzeichen der Parameter vorkommt. Bei ungleichen Vorzeichen bewirkt der Kompensationseffekt ein Verschwinden von ρ_4

Kennzeichen: Ist $\rho_4 > 0,5$ so ist dieses Modell in Erwägung zu ziehen. Die zusätzliche Korrelation zur lag 8 ist vernachlässigbar.

c) (s_{-1}, s_{+1}) -Modelle

2.2.6. Das $z_t = (1 - \theta_3 B^3 - \theta_5 B^5)a_t$ -Modell

Allgemein: Das ACF-Schema folgt einem AR(2)-Schema an den Stellen 3 und 5 (also vor und nach der Saisonlänge $s=4$). Der zusätzliche Beitrag auf Grund der Interaktion der beiden Parameter tritt nur an der Stelle $s_{+1} - s_{-1} = 2$ auf.

Kennzeichen: Die Kennzeichen der Autokorrelation sind ρ_3 und ρ_5 . Dieses Modell ist aber nur von theoretischer Bedeutung.

2.2.7. Das $z_t = (1 - \theta_3 B^3)(1 - \theta_5 B^5)a_t$ -Modell

Allgemein: Dies ist das multiplikative $(s_{-1} \times s_{+1})$ -Modell zum vorigen Modell. Die zusätzliche Korrelation tritt nun an der Stelle ρ_8 auf.

Kennzeichen: Autokorrelation zu ρ_3 und ρ_5 mit zusätzlichen kleinen Beitrag ρ_8 .

3. 3-Parametermodelle

3.1. Modelle mit einem saisonalen Parameter

Für 3-Parametermodelle mit einem saisonalen Parameter ist ein lag-Schema relevant (1,2,s). Dabei können wir ein additives (1+2+s), drei multiplikative (1+2xs), (1x(2+s)) und (2x(1+s)) und ein doppelt multiplikatives (1x2xs)-Modell unterscheiden.

3.1.1. Das $z_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \theta_4 B^4) a_t$ -Modell

Allgemein: Regelmäßigkeiten für ACF-Schemata mit 3 Parametern sind wegen teilweiser Kompensationseffekte schwerer zu beschreiben. Das Vorzeichen des ersten Parameters legt einen "paarweisen horizontalen" Vergleich für Parameterkonstellationen der Form (\pm, \dots) nahe. ρ_3 ist ein zusätzlicher Beitrag, der durch Interaktion der Parameter θ_1 und θ_4 zustande kommt. ρ_2 wird einerseits durch den Parameter θ_2 bestimmt, andererseits durch einen zusätzlichen Beitrag infolge Interaktion von θ_2 mit θ_4 (bei saisonalen Modellen mit $s > 5$ teilt sich diese Korrelation in ρ_2 und ρ_{s-2}). Es ist $\theta^2 \rho_2 = -\theta_2 + \theta_2 + \theta_2 \theta_s$.

Charakteristika:

- a) Die ($\pm, +, +$)-Konstellationen zeigen als einzige große ρ_1, ρ_2 und ρ_3 -Beiträge zugleich
- b) Die ($\pm, +, -$)-Konstellationen zeigen dominierende ρ_1 und ρ_4 kompensierter ρ_2 .
- c) Die ($\pm, -, +$)-Konstellationen zeigen leicht dominierende ρ_4 bei sonstigen Kompensationseffekten
- d) Die ($\pm, -, -$)-Konstellationen zeigen leicht dominierende ρ_4 bei sonstigen Kompensationseffekten.

Kennzeichen: Das $(1+2+s)$ -Modell ist dann zu wählen, wenn das additive $(1+s)$ -Modell signifikante Korrelationen zum lag 2 aufweist. Man beachte, daß nicht jedes Hinzufügen von θ_1 den gewählten Effekt vermittelt.

3.1.2. Das $z_t = (1-\theta_1 B)(1-\theta_2 B^2)(1-\theta_4 B^4)a_t$ -Modell

Allgemein: Doppelt saisonale Modelle weisen bei geringer Parameteranzahl längere und ausgeprägtere ACF-Strukturen auf. Die maximale backorder ist 12, während für $s > 4$ die ACF auf 10 Beiträge verteilt ist, wird sie im Fall $s=4$ auf 7 zusammengedrängt. Die Korrelationen für lags größer als s sind in der Regel unbedeutend, im Fall $s=4$ ist ρ_5 aus Verstärkungseffekten (zwei einfache und eine dreifache Interaktion) manchmal von Bedeutung. Für $s > 5$ gilt sonst $\rho_{s-1} = \rho_{s+1}$. Im Unterschied zum additiven $(1+2+s)$ -Modell dominiert die ACF eher an den Stellen $(1, 2, s)$. Neben der paarweisen horizontalen Struktur können wir auch eine "vertikale"-ACF-Struktur erkennen. Modelle mit negativen θ_1 zeigen ein heterogenes Verhalten. Aufeinanderfolgende Korrelationen zeigen ein eher wechselndes Verhalten (wie ein AR(1)-Prozeß mit negativen θ_1). Modelle mit positiven θ_1 zeigen ein homogenes Verhalten (wie ein AR(1)-Prozeß mit positiven θ_1).

Charakteristika:

- a) $(\overset{+}{-}, -, -)$: große Werte der ACF bis zum lag 4, ρ_4 dominiert leicht
- b) $(\overset{+}{-}, -, +)$: dominierendes ρ_2 und große ρ_4 , bei verschwindenden restlichen Korrelationen
- c) $(\overset{+}{-}, +, -)$: dominierendes ρ_1 und große ρ_4 bei größeren Beiträgen von ρ_2 und ρ_5
- d) $(\overset{+}{-}, +, +)$ Die ACF ähnelt einem AR(1)-Prozeß mit $\overset{+}{-}\theta$ Parameter.

Kennzeichen: Große Korrelationen von ρ_1, ρ_2, ρ_4 bei ausklingender ACF.

3.1.3. Das $z_t = (1 - \theta_4 B^4)(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2)a_t$ -Modell

Allgemein: Im Unterschied zum (1x2xs)-Modell hat dieses Modell eine maximale Backorder von 6. Die dominierende Komponente ist ρ_4 während die beiden anderen Parameter je nach Vorzeichenkonstellationen Kompensationen und Verstärkungen erzeugen. ρ_3 und ρ_5 sind nicht so ausgeprägt. Sonst weist das Modell im wesentlichen dieselben ACF-Muster wie das (1x2xs)-Modell auf.

Kennzeichen: Große Korrelationen von ρ_1, ρ_2, ρ_4 . Dann empfehlenswert, wenn nicht so große Verstärkungseffekte wie im (1x2xs)-Modell gewünscht sind.

3.1.4. Das $z_t = (1 - \theta_2 B^2)(1 - \theta_1 B - \theta_4 B^4)a_t$ -Modell

Allgemein: Dieses Modell weist ein fast gleiches ACF-Muster wie das ((1+2)x4)-Modell auf. Lediglich die Interaktionen zwischen den Parametern führen zu "Neben"korrelationen verschiedener Größe und Vorzeichen.

Kennzeichen: Die dominierenden Werte sind ρ_1, ρ_2 und ρ_4

3.2. Modelle mit zwei saisonalen Parametern

Für saisonale 3-Parametermodell mit zwei saisonalen Parametern unterscheiden wir folgender lag-Schemata:

$(1, s_{-1}, s)$, $(1, s, s_{+1})$ und $(1, s, 2s)$. Man beachte, daß $(1, s_{-1}, s)$ -Modell und $(1, s, s_{+1})$ -Modell ähnliche lag-Strukturen (bei verschobener saisonaler Länge) aufweisen. Auch können alle $(1, s, 2s)$ -

Modelle als Modelle doppelter Saisonlänge von $(1, \frac{s}{2}, s)$ -Modellen betrachtet werden. Für jede der drei Gruppen können wieder additive, multiplikative und doppelt-multiplikative Modelle diskutiert werden.

a) $(1, s_{-1}, s)$ -Modelle

3.2.1. Das $z_t(1-\theta_1 B - \theta_3 B^3 - \theta_4 B^4)a_t$ -Modell

Allgemein: Zunächst würde man erwarten, daß dieses Modell dem $(1+2+s)$ -Modell ähnlich ist. Dies stimmt jedoch nur teilweise. Dafür kann das $(1+s_{-1}+s)$ -Modell als Verallgemeinerung des multiplikativen $(1 \times s_{-1})$ -Modells angesehen werden. Das Modell weist keine paarweise horizontale Struktur, dafür aber ein "innen-außen" Struktur auf. Diese "innen-außen"-Struktur soll Modelle mit Verstärkungseffekten und mit Kompensationseffekten zusammenfassen. Man beachte, daß Verstärkungs- und Kompensationsmodelle nicht symmetrisch aufgebaut sind.

Charakteristika:

- a) Verstärkungseffekte treten bei den Modellen $(-, -, +, +)$, $(-, +, -, -)$, $(+, -, -, -)$ und $(+, +, +, +)$ auf. Der Name "innen-außen"-Struktur soll den durch die Abbildung vermittelt Eindruck beschreiben. Die vier obigen Modelle sind die zwei inneren der linken Seite und die zwei äußeren der rechten Seite. Davon weisen die beiden inneren Modelle "offene Gabelstruktur" und die beiden äußeren "geschlossene Gabelstruktur" zu den lag 3 auf.
- b) Kompensationseffekte treten bei den restlichen Modellen auf. Das sind die beiden äußeren der linken Seite und die beiden inneren der rechten Seite. Diese weisen bei stärkeren ρ_4 die additive MA(2)-Struktur in den lags 3 und 4 auf. Sie besitzen jedoch durchwegs kleinere Korrelationen als die Verstärkungsmodelle.

Kennzeichen: Für die Praxis scheinen hauptsächlich die Verstärkungsmodelle relevant zu sein. Die sind durch starke ρ_1, ρ_3 und ρ_4 Korrelationen geprägt. Dabei sind ρ_1 und ρ_3 gleich groß, während ρ_4 etwas abfällt. Durch die asymmetrische Gabelstruktur und ρ_3 sind die Verstärkungsmodelle bei stärkeren ρ_4 als Erweiterung des $(1+s_{-1})$ -Modelle günstig. Das Modell bietet sich auch als Erweiterung additiver $(s_{-1}+s)$ -Modelle mit großen ρ_1 an. Dabei ist immer zu beachten, daß wegen der Kompensationseffekte nicht jede beliebige Erweiterung die gewünschten Effekte erreicht.

3.2.2. Das $z_t = (1-\theta_1 B)(1-\theta_3 B^3 - \theta_4 B^4) a_t$ -Modelle

Allgemein: Dieses Modelle ist mit dem vorigen $(1+s_{-1}+s)$ -Modell nahe verwandt. Durch den einfachen multiplikativen Faktor steigt die maximale Backorder auf 5 und auch die Modelle mit Kompensationseffekten weisen durchschnittlich höhere Korrelationen auf. ρ_5 entsteht durch Interaktion der Parameter θ_1 und θ_4 . Bei gleichen Parametern $|\theta_3| = |\theta_4|$ weisen ρ_3 und ρ_4 gleiche Größe auf, die je nach Vorzeichen gleich oder entgegengesetzt gerichtet sind.

Kennzeichen: Die ACF-Struktur wird durch ρ_1, ρ_3, ρ_4 dominiert. Sind ρ_3 und ρ_4 groß und gleich mit etwa vorhandenen ρ_5 , so ist das Modell den $(1+s_{-1}+s)$ -Modell vorzuziehen.

3.2.3. Das $z_t = (1-\theta_1 B)(1-\theta_3 B^3)(1-\theta_4 B^4) a_t$ -Modell

Allgemein: Dieses doppelt multiplikative Modell besitzt eine maximale Backorder der Länge 8. Vor den Korrelationen, die größer als lag 4 sind, ist lediglich ρ_5 und in den kompensierenden Modellen von größerer Bedeutung.

Durch den doppelten multiplikativen Ansatz wurde erreicht, daß die dominierende Korrelationen ρ_1, ρ_2 und ρ_4 bei gleichen Parametergröße gleiche Größe besitzen. Neben diesen typischen multiplikativen Begleiteffekten folgt die ACF-Struktur dem zugehörigen $(1+s_{-1}+s)$ -Modell. Verstärkungseffekte bei den Modellen $(-, \overset{+}{-}, -)$, $(+, -, -)$ und $(+, +, +)$, Kompensationseffekte sonst.

Kennzeichen: Die dominierende Korrelationen sind ρ_1, ρ_2 und ρ_3 . Treten diese gleich stark mit Begleiteffekten bis zum lag 8 auf, so ist dieses Modell günstig.

b) $(1, s, s_{+1})$ -Modelle

3.2.4. Das $z_t = (1 + \theta_1 B - \theta_4 B^4 - \theta_5 B^5) a_t$ -Modell

Allgemein: Dieses Modell folgt genau derselben Struktur wie das $(1+s_{-1}+s)$ -Modell, nur aber sind die Saisonkorrelationen an lag 4 und 5, während $\rho_2=0$ ist. ρ_3 ist ein zusätzlicher Beitrag infolge Interaktionen von θ_1 und θ_4 . Verstärkungseffekte treffen wieder bei den Modellen $(-, \overset{+}{-}, -)$, $(+, -, -)$ und $(+, +, +)$ auf, wobei die ersten beiden die offene und die letzteren beiden die geschlossene Gabelstruktur.

Kennzeichen: Die kennzeichnenden Korrelationen der ACF sind ρ_1, ρ_4 und ρ_5 mit einem "cut off" nach lag 5. Das Modell ist dann günstig, wenn das additive $(1+s)$ -Modell oder das multiplikative $(1xs)$ -Modell eine starke s_{+1} -Komponente aufweist.

3.2.5. Das $z_t = (1 - \theta_1 B)(1 - \theta_4 B^4 - \theta_5 B^5)a_t$ -Modell

Allgemein: Dieses Modell folgt der selben ACF-Struktur wie das $(1x(s_{-1}+s))$ -Modell aber nur an den lags 1, 4 und 5. Die ρ_2 -Korrelation des $(1x(s_{-1}+s))$ -Modell wird nur in zwei Beiträge der Form ρ_2 und ρ_3 aufgeteilt.

Kennzeichen: Die kennzeichnenden Werte sind ρ_1, ρ_4 und ρ_5 wobei ρ_4 und ρ_5 groß und (bei gleichen Parametern) gleich sind, ρ_1 dennoch etwas größer ist. Durch den multiplikativen Ansatz erfolgt der cut off bei lag 6.

3.2.6. Das $z_t = (1 - \theta_1 B^4)(1 - \theta_1 B - \theta_4 B^4)a_t$ -Modell

Allgemein: Dieses Modell soll dem additiven, wie man durch Verdoppelung der saisonalen Komponenten in multiplikativen Modell saisonaler Korrelationen $|\rho_3| > \frac{1}{2}$ erhalten kann.

Man beachte, daß die typischen Verstärkungseffekte nur dann auftreten, wenn die beiden saisonalen Parameter gleiches Vorzeichen haben. Andernfalls treten Kompensationseffekte ein. Die maximale Backorder ist 8, was nicht unvernünftig ist, da Modelle mit starker saisonaler Korrelation sicher über zwei Saisonen ausstrahlen. Die Verstärkungseffekte des Modells sind vom selben Typ wie das $(1xs)$ -Modell.

Charakteristika: Bei den Verstärkungsmodellen treten die typischen offenen und geschlossenen Gabelmuster der multiplikativen Modelle um den lag 4 auf. Man beachte, daß ρ_3 ρ_5 immer gilt.

Kennzeichen: Die dominierende Korrelation des Modells ist ρ_4 bei großer ρ_1 . Die Verstärkungsmodelle sind den multiplikativen (1xs)-Modellen dann vorzuziehen, wenn extrem hohe saisonale Korrelationen vorliegen.

c) (1,s,2s)-Modelle

Es sei nochmals darauf hingewiesen, daß (1,s,2s)-Modelle auch als $(1, \frac{s}{2}, s)$ -Modelle der doppelte Saisonlänge interpretiert werden können.

3.2.7. Das $z_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^4 - \theta_8 B^8) a_t$ -Modell

Allgemein: Ähnlich wie im vorigen $((1+s)xs)$ -Modell treten Kompensationseffekte in ρ_4 bei ungleichen Vorzeichen der saisonalen Parameter auf. Bei gleichen Vorzeichen der Parameter tritt ein leichterer Verstärkungseffekt bei ρ_4 auf. Das Modell geht von der Annahme aus, daß saisonale Effekte über zwei Saisonlängen zurückreichen.

Charakteristika: Man beachte die charakteristischen Stufen des additiven Modells, die hier doppelt bei den lags $3/4$ und $7/8$ auftreten. Für negative θ_1 treten die beiden charakteristischen Stufen gleichgerichtet auf, wenn θ_4 und θ_8 dasselbe Vorzeichen haben. Ansonsten sind die Stufen gegeneinander gerichtet. Für positive θ_1 wandeln sich die charakteristischen Stufen in "charakteristische Paare" um, die je nach Parameterkonstellation negativ oder positiv sind.

Kennzeichen: Die kennzeichnende Korrelationen sind bei Verstärkungsmodellen ρ_4 und ρ_8 treten bei $(1+s)$ -Modellen zusätzliche charakteristische Stufen oder Paare bei der doppelten Saisonlänge auf, so ist dieses Modell zu versuchen.

3.2.8. Das $z_t = (1 - \theta_1 B)(1 - \theta_4 B^4 - \theta_8 B^8)a_t$ -Modell

Allgemein: Wie im vorigen Modell, so können wir auch hier im Verstärkungsmodell und Kooperationsmodell in ρ_4 unterscheiden, je nach Vorzeichenkonstellation der saisonalen Parameter. So wie das $(1+s+2s)$ -Modell als Verallgemeinerung des $(1+s)$ -Modells für doppelte Saisonlängen betrachtet werden kann, so kann das $(1x(s+2s))$ -Modell als Verallgemeinerung des multiplikativen $(1xs)$ -Modells angesehen werden.

Charakteristika: War im $(1+s+2s)$ -Modell die charakteristische Stufen und Paare ein Hauptmerkmal, so sind es in diesem Modell die charakteristische offene und geschlossenen "Gabelmuster". Die "Zinken" der Gabel sind symmetrisch, wobei die $2s$ -Gabel in Kompensationsmodelle stärker eingepreßt ist als die s -Gabel. Bei Verstärkungsmodellen ist das Verhältnis umgekehrt. Für unterschiedliches Vorzeichen der saisonalen Parameter haben die Gabeln entgegengesetzte Richtung, ansonsten sind sie gleichgerichtet.

Kennzeichen: Die kennzeichnenden Korrelationen sind ρ_1, ρ_4 und ρ_8 mit dem typischen Gabelmuster der multiplikativen Modelle. Tritt im multiplikativen $(61xs)$ -Modell noch eine zusätzliche eine "Gabel" um $2s$ auf, so kann dieses Modell versucht werden.

3.2.9. Das $z_t = (1 - \theta_1 B)(1 - \theta_4 B^4)(1 - \theta_8 B^8)a_t$ -Modell

Allgemein: Dieses doppelt multiplikative Modell ist eine weitere Verallgemeinerung des vorigen Modells. Die maximale Backorder ist nun 13.

Charakteristika: Die charakteristische offene und geschlossene Gabel wiederholen sich nun dreimal an den lags 4, 8 und 12. Dabei weist die Abfolge der charakteristischen Gabel folgende Struktur auf. Die Richtung der beiden ersten Gabeln (zu lag 4 und 8) wird durch das Vorzeichen der saisonalen Parameter θ_4 und θ_8 bestimmt. Die dritte Gabel (in lag 12) kann als Interaktion der beiden vorigen angesehen werden, und deren Richtung hängt vom Produkt der Vorzeichen der saisonalen Parameter ab.

Kennzeichen: Die kennzeichnenden Autokorrelationen sind ρ_1 , ρ_4 , ρ_8 und ρ_{12} mit der typischen Gabelstruktur multiplikativer Modelle. Dieses Modell ist dann empfehlenswert, wenn das multiplikative (1xs)-Modell weitere "Gabeln" an den lags 8 und 12 aufweist.

3.3. Modelle mit drei saisonalen Parametern

In saisonalen 3-Parametermodellen mit drei saisonalen Parametern scheinen folgende drei lag-Schemata interessant zu sein (s_{-1}, s, s_{+1}) , $(s_{-1}, s, 2s)$, $(\frac{s}{2}, s, 2s)$. Dabei sei die Dimension von $(s, s_{+1}, 2s)$ -Modellen wegen der Ähnlichkeit zu $(s_{-1}, s, 2s)$ -Modellen weggelassen. Für jede dieser lag-Schemata können nun additive, multiplikative und doppelt multiplikative Modelle unterschieden werden.

a) (s_{-1}, s, s_{+1}) -Modelle

3.3.1. Das $z_t = (1 - \theta_3 B^3 - \theta_4 B^4 - \theta_5 B^5) a_t$ -Modell

Allgemein: Dieses Modell macht im gesamten einen sehr geschlossenen Eindruck, der dadurch entsteht, daß die Korrelationen zu ρ_3 , ρ_4 und ρ_5 keinen Kompensationseffekten unterworfen sind, und bei gleicher Parametergröße gleiche große Korrelationen aufweisen. Die Korrelationen

zu lag 1 und 2 werden durch Interaktion der saisonalen Parameter erzeugt. Man beachte, daß jedes zweite Korrelation ρ_1 durch Kompensationseffekte verschwindet.

Charakteristika: Die saisonalen Korrelationen sind proportional den Parameterwerten, ρ_1 verschwindet wenn θ_3 und θ_5 ungleiche Vorzeichen besitzen.

Kennzeichen: Die kennzeichnenden Korrelationen sind ρ_3, ρ_4 und ρ_5 . Zeigen in multiplikativen (1xs)-Modellen ρ_3 und ρ_5 gleich große Korrelationen wie ρ_4 an, dann ist dieses Modell zu versuchen.

3.3.2. Das $z_t = (1 - \theta_3 B^3)(1 - \theta_4 B^4)(1 - \theta_5 B^5)a_t$ -Modell

Allgemein: Dieses Modell weist die (im Vergleich zum additiven Modell) verstärkten saisonalen Korrelationen an den lags 3, 4, und 5 auf. Außerdem wiederholen sich diese im $s=4$ entstandenen Muster um den lag $2s=8$ in umgekehrter Reihenfolge. Die Maximale Backorder ist 12 und es tritt in ρ_{12} eine zusätzliche Korrelation auf Grund der Interaktion aller drei saisonalen Parameter auf. Ebenfalls treten aufgrund Interaktion zusätzliche Korrelationen zu den lag 1 und 2 auf, wobei ρ_1 infolge Kompensationseffekte verschwinden kann.

Charakteristika: ρ_1 ist nur in den Modellen $(-, -, -)(-, +, -)$, $(+, -, +)$ und $(+, +, +)$ vorhanden, d.h. wenn θ_3 und θ_5 gleiche Vorzeichen besitzen. Bei gleichen Parametern sind die saisonalen Korrelationen nicht gleich. Während ρ_3 und ρ_5 betragsmäßig gleich sind, ist ρ_4 je nach Parameterkonstellation einmal größer oder kleiner.

Kennzeichen: Die kennzeichnende Korrelationen sind ρ_3, ρ_4 und ρ_5 mit umgekehrter Wiederholung zu lag 7, 8, 9. Zeigen multiplikative Modelle keine symmetrischen Gabelstrukturen bei großen saisonalen Korrelationen, so kann dieses Modell verwendet werden.

3.3.3. Das $z_t = (1 - \theta_3 B^3)(1 - \theta_4 B^4 - \theta_5 B^5)a_t$ -Modelle

Allgemein: Dieses Modell folgt in den kennzeichnenden Korrelationen den additiven $(s_{-1} + s + s_{+1})$ -Modell, wobei das multiplikative Modell die Korrelationen verstärkt. Die maximale Backorder ist 8. Die Korrelationen zu 7 und 8 sind Interaktionen der saisonalen Parameter und im Vorzeichen entgegengesetzt den Korrelationen zu lag 4 und 5 gerichtet. Wie im additiven Modell werden die beiden ersten Korrelationen durch Interaktionen erzeugt, wobei ρ_1 in jedem zweiten Fall fast verschwindet.

Charakteristika: Die saisonalen Korrelationen sind proportional den Parametern. Je nach Vorzeichen von θ_4 und θ_5 treten an den lags 7 und 8 kleine charakteristische Stufen, oder Paare auf, ρ_1 verschwindet fast, wenn θ_3 und θ_5 ungleiche Vorzeichen besitzen.

Kennzeichen: Die kennzeichnenden Korrelationen sind ρ_3, ρ_4 und ρ_5 , wobei ρ_5 leicht kleiner ist als die beiden gleich großen ρ_3 und ρ_4 . Zusätzliche Korrelationen treten bis lag 7 und 8 auf, wobei $\rho_6 = 0$ ist. Das Modell ist dann zu empfehlen, wenn neben der Charakteristika des $(s_{-1} + s + s_{+1})$ -Modelle (neben größeren saisonalen Korrelationen) zusätzlich ρ_7 und ρ_8 in charakteristischer Form auftraten.

3.3.4. Das $z_t = (1 - \theta_4 B^4)(1 - \theta_3 B^3 - \theta_5 B^5)a_t$ -Modell

Allgemein: Dieses Modell folgt wie das vorige Modell in den kennzeichnenden Korrelationen dem $(s_{-1} + s + s_{+1})$ -Modell. Wie zuvor werden durch den multiplikativen Ansatz die saisonalen Korrelationen verstärkt. Die maximale backorder beträgt 9. Die charakteristischen Stufen und Paare der zusätzlichen Korrelationen sind nun in den lag 8 ($\rho_8 = 0$) "auseinandergezogen" an den lag 7 und 9. ρ_8 ist ein zusätzlicher Beitrag mit geringerer Bedeutung. ρ_1 und ρ_2 kommen wie im additiven $(s_{-1} + s + s_{+1})$ -Modell durch Interaktionen zustande, wobei jedes zweite ρ_1 durch Kompensationseffekte verschwindet.

Charakteristika: Im großen und ganzen dasselbe wie im vorigen Modell, nur ist $\rho_8 = 0$ und die charakteristischen Stufen und Paare an den lags 7 und 9 auseinanderliegend.

Kennzeichen: Die kennzeichnenden Korrelationen sind ρ_3, ρ_4 und ρ_5 , wobei ρ_4 (bei gleichen Parametern) leicht größer als ρ_3 und ρ_5 ist. Das Modell ist dann zu empfehlen, wenn das additive $(s_{-1} + s + s_{+1})$ -Modell die backorder P mit Korrelationen an den lags 7 und 9 aufweist.

3.3.5. Das $z_t = (1 - \theta_5 B^5)(1 - \theta_3 B^3 - \theta_4 B^4)a_t$ -Modell

Allgemein: Das Modell folgt wie die beiden vorigen Modelle dem additiven $(s_{-1} + s + s_{+1})$ -Modell. Die maximale backorder ist wie zuvor 9. Die charakteristischen Stufen und Paare treten nun an den lags 8 und 9 auf. $\rho_7 = 0$ und ρ_4 ist von geringer Bedeutung. ρ_1 und ρ_2 kommen ebenfalls durch Interaktion der saisonalen Parameter zustande, wobei ρ_1 durch Kompensationseffekte nur dann fast verschwindet, wenn θ_3 und θ_5 ungleiches Vorzeichen besitzen. In diesen Fällen wird ρ_4 zusätzlich gedämpft.

Charakteristika: folgen dem additiven $(s_{-1}+s+s_{+1})$ -Modell, wobei neben $\rho_7=0$ die charakteristischen Stufen und Paare an den lags 8 und 9 zu finden sind.

Kennzeichen: Die kennzeichnenden Korrelationen sind ρ_3, ρ_4 und ρ_5 wobei nun ρ_3 leicht kleiner als die beiden gleich großen ρ_4 und ρ_5 Korrelationen sind. Dabei können zusätzliche Dämpfungen für ρ_4 vorkommen. Die charakteristischen Stufen an den lags 8 und 9 bestimmen die Welt dieses Modells gegenüber den beiden vorigen.

c) $(s_{-1}, s, 2s)$ -Modelle

3.3.6. Das $z_t = (1 - \theta_3 B^3 - \theta_4 B^4 - \theta_8 B^8)$ -Modell

Allgemein: Dieses Modell zeigt ein nun einheitliches Bild aufgrund von Dämpfungs- und Verstärkungseffekten. Dämpfungseffekte treten bei denjenigen Modellen auf, wo θ_4 und θ_8 gleiches Vorzeichen besitzen. In den Verstärkungsmodellen zeigt dieses Modell die typischen offenen und geschlossenen Gabeln des multiplikativen $(1xs)$ -Modells und den lag 4. ρ_8 ist von den Dämpfungseffekten nicht betroffen und ρ_5 ist zusätzlich Korrelation kleiner als ρ_3 .

Charakteristika: In den Verstärkungsmodellen sind die Parameter proportional den saisonalen Korrelationen, wobei ρ_4 vor den gleich großen Korrelationen ρ_3 und ρ_8 dominiert. Offene Gabeln treten in den Modellen $(-, +, +)$ $(+, -, +)$ auf, geschlossene bei den Modellen $(-, -, +)$ und $(+, +, +)$.

Kennzeichen: Die kennzeichnenden Korrelationen sind (in den Verstärkungsmodellen) ρ_4 und ρ_8 . ρ_9 tritt erst in zweiter Linie zur Erzeugung der offenen und geschlossenen Gabel (in asymmetrischer Form) auf. Bei gleichen Parametern gilt $|\rho_1| = |\rho_5|$. Im Unterschied zum additiven $(1+s+2s)$ -Modell 3.2.7 (das durch charakteristische Stufen alleine gekennzeichnet ist) tritt hier neben dem typischen Gabelmuster ρ_8 singulär auf.

3.3.7. Das $z_t = (1 - \theta_3 B^3)(1 - \theta_4 B^4 - \theta_8 B^8)a_t$ -Modell

Allgemein: Wie im vorigen Modell sind im wesentlichen die Verstärkungsmodelle interessant, die bei Modellen mit verschiedenen Vorzeichen der saisonalen Parameter auftreten. Um Unterschied zu $(1x(s+2s))$ -Modell werden in den Verstärkungsmodellen die offenen und geschlossenen Gabeln nicht um den lag 2 wiederholt, sondern sie treten an den lags 7/8 als charakteristische Paare oder Stufen auf. Weiters ist an lag 11 eine kleine zusätzliche Korrelation zu beobachten.

Charakteristika: Die Verstärkungsmodelle treten an denselben Vorzeichenkonstellationen wie im vorigen Modell auf. ρ_3 ist in diesem Fall größer als ρ_8 , ρ_1 und ρ_7 sind gleich.

Kennzeichen: In den Verstärkungsmodellen sind die kennzeichnenden Korrelationen ρ_3, ρ_4 und ρ_8 . Typisch ist die Abfolge von geschlossenen (offenen) Gabeln in lag 4 und charakteristische Paare (Stufen) an den lags 7/8 bei singulären ρ_{11} .

3.3.8. Das $z_t = (1 - \theta_3 B^3)(1 - \theta_4 B^4)(1 - \theta_8 B^8)\theta_t$ -Modell

Allgemein: Im Gegensatz zum multiplikativen (1xsx2s)-Modell 3.2.9. werden in den Verstärkungsmodellen die offenen und geschlossenen Gabeln nur zweimal um die lags 4 und 8 wiederholt, während an den lags 11/12 charakteristische Paare und Stufen auftreten bei singulären ρ_{15} (maximale backorder = 15).

Charakteristika: Die Verstärkungsmodelle treten bei denselben Vorzeichenkonstellationen wie in den beiden vorigen Modellen auf. ρ_3 ist so groß wie ρ_8 und ρ_1 so wie ρ_7 (bei gleichen Parametern). Geschlossene Gabeln treten dann auf, wenn das Produkt der Vorzeichen der drei Parameter positiv ist. Bei negativem Vorzeichenprodukt sind die Gabeln offen.

Kennzeichen: Die kennzeichnenden Korrelationen sind ρ_3, ρ_4 und ρ_8 . Typisch ist die Abfolge von zwei Gabelmustern um die lags 4 und 8, charakteristische Paare und Stufen an den lags 11/12 und singulär ρ_{15} .

- Anmerkung:
- a) das (4x(3+8))-Modell ist in den Verstärkungsmodellen durch Gabel in die lags 4 und 8 bei singulären ρ_{12} gekennzeichnet.
 - b) das ((3+4)x8)-Modell weist in den Verstärkungsmodellen Gabel an den lags 4 und 8 auf mit charakteristischen Stufen oder Paaren an den lags 11/12. Die Dämpfungsmodelle haben Gabeln um den lag 8 und charakteristische Stufen/Paare an den lags 11/12, jedoch eine "deformierte" Gabel um den lag 4.
 - c) (s/2,s,2s)-Modelle.

3.3.9. Das $z_t = (1 - \theta_2 B^2 - \theta_4 B^4 - \theta_8 B^8) a_t$ -Modell

Allgemein: Dieses Modell ist dadurch gekennzeichnet, daß die ungeraden Korrelationen null sind. Man beachte, daß die Dämpfungseffekte in den Modellen $(\pm, -, -)$, die Verstärkungseffekte in den Modellen $(\pm, +, +)$ am größten sind. In den anderen Modellen wird jeweils eine Korrelation gedämpft.

Kennzeichen: Die kennzeichnenden Korrelationen sind ρ_2, ρ_4 und ρ_8 . Alleine ρ_6 wird durch Interaktion erzeugt. Die restlichen (ungeraden) Werte der ACF sind null.

Anmerkung: a) Das $z_t = (1 - \theta_2 B^2)(1 - \theta_4 B^4 - \theta_8 B^8) a_t$ -Modell hat in etwa dieselbe ACF-Struktur wie das $(2+4+8)$ -Modell. ρ_2 ist etwas stärker ausgeprägt, und neben ρ_6 kommt ρ_{10} als weitere zusätzliche Korrelation dazu.

b) Ebenso ist das $z_t = (1 - \theta_2 B^2 - \theta_4 B^4)(1 - \theta_8 B^8) a_t$ -Modell eine ähnliche Erweiterung des $(2+4+8)$ -Modells, nun aber bis zum lag 12, wo eine weitere zusätzliche Korrelation auftritt.

3.3.10. Das $z_t = (1 - \theta_2 B^2 - \theta_4 B^4 - \theta_5 B^5) a_t$ -Modell

Allgemein: Letztlich sei noch das $(2+4+5)$ -Modell besprochen. In diesem Fall wollen wir Modelle, die ein großes ρ_2 aufweisen, als Verstärkungsmodelle bezeichnen. Das sind die $(\pm, +, -)$ und $(\pm, +, +)$ -Modelle. ρ_1 und ρ_3 werden durch Interaktionen erklärt.

Kennzeichen: In den Verstärkungsmodellen tritt ρ_2 betragsmäßig größer als ρ_4 und ρ_5 auf.

Teil C: Autokovarianzfunktion saisonaler Modelle

1.1. Einleitung

In diesem Abschnitt der Arbeit werden die theoretischen ACovF (Autokovarianzfunktionen) saisonaler Modelle wiedergegeben. Sie alle lassen sich am besten aus der Autokovarianz-erzeugenden Funktion ableiten

$$\begin{aligned} \gamma(B) &= \sigma_a^2 \psi(B)\psi(B^{-1}) \\ \text{wobei} \quad \gamma(B) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k B^k \\ \text{und} \quad \psi(B) &= 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots \end{aligned}$$

die Transferfunktion des SARIMA-Prozesses ist.

$$z_t = \psi(B)a_t$$

Durchwegs bestehe die Vereinbarung, daß fehlende γ_k Null sind.

1.2. Moving Average Prozesse

Die folgenden Formeln beziehen sich auf die ACovF.

1.2.1. MA(2)-Prozeß: $z_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2)a_t$

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= 1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 \\ \gamma_1 &= -\theta_1(1 - \theta_2) \\ \gamma_2 &= -\theta_2 \end{aligned}$$

1.2.2. MA(3)-Prozeß: $z_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \theta_3 B^3)a_t$

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= 1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 \\ \gamma_1 &= -\theta_1 + \theta_1\theta_2 + \theta_2\theta_3 \\ \gamma_2 &= -\theta_2 + \theta_1\theta_3 \\ \gamma_3 &= -\theta_3 \end{aligned}$$

$$1.2.3. \underline{z_t = (1-\theta_1 B^1)(1-\theta_2 B^2)a_t}$$

$$\psi(B) = (1-\theta_1 B^1 - \theta_2 B^2 + \theta_1 \theta_2 B^3)$$

$$\gamma_0 = 1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_1^2 \theta_2^2$$

$$\gamma_1 = -\theta_1 + \theta_1 \theta_2 - \theta_1 \theta_2^2 = -\theta_1 (1 - \theta_2 + \theta_2^2)$$

$$\gamma_2 = -\theta_2 - \theta_1^2 \theta_2 = -\theta_2 (1 + \theta_1^2)$$

$$\gamma_3 = \theta_1 \theta_2$$

Im Unterschied zum MA(3)-Prozeß wird im "multiplikativen" MA(2)-Prozeß $\theta_3 = -\theta_1 \theta_2$ gesetzt, wodurch eine spezielle Struktur des MA(3)-Prozesses erzeugt wird.

2. 2-Parametermodelle

2.1. Modelle mit einem saisonalen Parameter:

$$2.1.1. \underline{z_t = (1-\theta_1 B^1 - \theta_s B^s)a_t}$$

$$\gamma_0 = 1 + \theta_1^2 + \theta_s^2$$

$$\gamma_1 = -\theta_1$$

$$\gamma_{s-1} = \theta_1 \theta_s$$

$$\gamma_s = -\theta_s$$

$$2.1.2. \underline{z_t = (1-\theta_1 B^1)(1-\theta_s B^s)a_t}$$

$$\gamma_0 = (1 + \theta_1^2)(1 + \theta_s^2)$$

$$\gamma_1 = -\theta_1 (1 + \theta_s^2)$$

$$\gamma_{s-1} = \theta_1 \theta_s$$

$$\gamma_s = -\theta_s (1 - \theta_1^2)$$

$$\gamma_{s+1} = \theta_s - 1$$

2.2. Modelle mit zwei saisonalen Parametern:

$$2.2.1. \underline{z_t = (1 - \theta_{s-1} B^{s-1} - \theta_s B^s) a_t}$$

$$\gamma_0 = 1 + \theta_{s-1}^2 + \theta_s^2$$

$$\gamma_1 = \theta_{s-1} \theta_s$$

$$\gamma_{s-1} = -\theta_{s-1}$$

$$\gamma_s = -\theta_s$$

$$2.2.2. \underline{z_t = (1 - \theta_{s-1} B^{s-1})(1 - \theta_s B^s) a_t}$$

$$\gamma_0 = (1 + \theta_{s-1}^2)(1 + \theta_s^2)$$

$$\gamma_1 = \theta_{s-1} \theta_s$$

$$\gamma_{s-1} = -\theta_{s-1} - \theta_{s-1} \theta_s^2 = -\theta_{s-1}(1 + \theta_s^2)$$

$$\gamma_s = -\theta_s - \theta_{s-1}^2 \theta_s = -\theta_s(1 + \theta_{s-1}^2)$$

$$\gamma_{2s-1} = \theta_{s-1} \theta_s = \gamma_1$$

$$2.2.3. \underline{z_t = (1 - \theta_s B^s - \theta_{2s} B^{2s}) a_t}$$

$$\gamma_0 = 1 + \theta_s^2 + \theta_{2s}^2$$

$$\gamma_s = -\theta_s(1 - \theta_{2s})$$

$$\gamma_{2s} = -\theta_{2s}$$

$$2.2.4. \underline{z_t = (1 - \theta_s B^s)(1 - \theta_{2s} B^{2s}) a_t}$$

$$\gamma_0 = (1 + \theta_s^2)(1 + \theta_{2s}^2)$$

$$\gamma_s = -\theta_s(1 - \theta_{2s} + \theta_{2s}^2)$$

$$\gamma_{2s} = -\theta_{2s}(1 + \theta_s^2)$$

$$\gamma_{3s} = \theta_s \theta_{2s}$$

$$2.2.5. \quad \underline{z_t = (1 - \theta_s B^s)(1 - \theta_s B^s) a_t}$$

$$\gamma_0 = 1 + (\theta_s + \theta_s)^2 + \theta_s^2 \theta_s^2$$

$$\gamma_s = -(\theta_s + \theta_s)(1 + \theta_s \theta_s)$$

$$\gamma_{2s} = \theta_s \theta_s$$

$$2.2.6. \quad \underline{z_t = (1 - \theta_{s-1} B^{s-1} - \theta_{s+1} B^{s+1}) a_t}$$

$$\gamma_0 = 1 + \theta_{s-1}^2 + \theta_{s+1}^2$$

$$\gamma_2 = \theta_{s-1} \theta_{s+1}$$

$$\gamma_{s-1} = -\theta_{s-1}$$

$$\gamma_{s+1} = -\theta_{s+1}$$

$$2.2.7. \quad \underline{z_t = (1 - \theta_{s-1} B^{s-1})(1 - \theta_{s+1} B^{s+1}) a_t}$$

$$\gamma_0 = (1 + \theta_{s-1}^2)(1 + \theta_{s+1}^2)$$

$$\gamma_2 = \theta_{s-1} \theta_{s+1}$$

$$\gamma_{s-1} = -\theta_{s-1}(1 + \theta_{s+1}^2)$$

$$\gamma_{s+1} = -\theta_{s+1}(1 + \theta_{s-1}^2)$$

$$\gamma_{2s} = \theta_{s-1} \theta_{s+1}$$

3. 3-Parametermodelle

3.1. Modelle mit einem saisonalen Parameter

$$3.1.1. \quad \underline{z_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \theta_s B^s) a_t}$$

$$\gamma_0 = 1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_s^2$$

$$\gamma_1 = -\theta_1 + \theta_1 \theta_2 = -\theta_1(1 - \theta_2)$$

$$\gamma_2 = -\theta_2$$

$$\gamma_{s-2} = \theta_2 \theta_s$$

$$\gamma_{s-1} = \theta_1 \theta_s$$

$$\gamma_s = -\theta_s$$

$$3.1.2. \quad z_t = \frac{(1-\theta_1 B^1)(1-\theta_2 B^2)(1-\theta_s B^s) a_t}{}$$

Sei $s/2 = 2$:

$$\gamma_0 = (1+\theta_1^2) (1+\theta_2^2)(1+\theta_s^2)$$

$$\gamma_1 = -\theta_1(1+\theta_2^2) (1+\theta_s^2)$$

$$\gamma_{s/2-1} = \theta_1\theta_2(1-\theta_s+\theta_s^2)$$

$$\gamma_{s/2} = -\theta_2(1+\theta_1^2)(1-\theta_s+\theta_s^2)$$

$$\gamma_{s/2+1} = \gamma_{s/2-1}$$

$$\gamma_{s-1} = \theta_1\theta_s(1+\theta_2^2)$$

$$\gamma_s = -\theta_s(1+\theta_1^2) (1+\theta_2^2)$$

$$\gamma_{s+1} = \gamma_{s-1}$$

$$\gamma_{3s/2-1} = -\theta_1\theta_2\theta_s$$

$$\gamma_{3s/2} = \theta_2\theta_s(1+\theta_1^2)$$

$$\gamma_{3s/2+1} = \gamma_{3s/-1}$$

$$3.1.3. \quad z_t = \frac{(1-\theta_1 B^1 - \theta_2 B^2)(1-\theta_4 B^4) a_t}{}$$

$$\gamma_0 = (1-\theta_1^2 + \theta_2^2)(1+\theta_4^2)$$

$$\gamma_1 = -\theta_1(1-\theta_2)(1+\theta_4^2)$$

$$\gamma_2 = -\theta_2(1+\theta_4^2)$$

$$\gamma_{s-2} = \theta_2\theta_4$$

$$\gamma_{s-1} = \theta_1\theta_4(1-\theta_2)$$

$$\gamma_s = -\theta_4(1+\theta_1^2 + \theta_2^2)$$

$$\gamma_{s+1} = \gamma_{s-1}$$

$$\gamma_{s+2} = \gamma_{s-2}$$

3.2. Modelle mit zwei saisonalen Parametern

a) (1,s-1,s)-Modelle:

3.2.1. $\underline{z}_t = \frac{(1-\theta_1 B^1 - \theta_{s-1} B^{s-1} - \theta_s B^s) a_t}{(1-\theta_1 B^1 - \theta_{s-1} B^{s-1} - \theta_s B^s)}$

$$\gamma_0 = 1 + \theta_1^2 + \theta_{s-1}^2 + \theta_s^2$$

$$\gamma_1 = -\theta_1 + \theta_{s-1} \theta_s$$

$$\gamma_{s-2} = \theta_1 \theta_{s-1}$$

$$\gamma_{s-1} = \theta_1 \theta_s - \theta_{s-1}$$

$$\gamma_s = -\theta_s$$

3.2.2. $\underline{z}_t = \frac{(1-\theta_1 B^1)(1-\theta_{s-1} B^{s-1} - \theta_s B^s) a_t}{(1-\theta_1 B^1)(1-\theta_{s-1} B^{s-1} - \theta_s B^s)}$

$$\gamma_0 = 1 + \theta_1^2 + \theta_{s-1}^2 + (\theta_s - \theta_1 \theta_{s-1})^2 + \theta_1 \theta_s^2$$

$$\gamma_1 = -\theta_1 + (\theta_{s-1} + \theta_1 \theta_s)(\theta_s - \theta_1 \theta_{s-1})$$

$$\gamma_2 = -\theta_1 \theta_{s-1} \theta_s$$

$$\gamma_{s-2} = \theta_1 \theta_{s-1}$$

$$\gamma_{s-1} = -\theta_{s-1} + \theta_1 (\theta_s - \theta_1 \theta_{s-1})$$

$$\gamma_s = -\theta_1^2 \theta_s - (\theta_s - \theta_1 \theta_{s-1})$$

$$\gamma_{s+1} = \theta_1 \theta_s$$

3.2.3. $\underline{z}_t = \frac{(1-\theta_1 B)(1-\theta_{s-1} B^{s-1})(1-\theta_s B^s) a_t}{(1-\theta_1 B)(1-\theta_{s-1} B^{s-1})(1-\theta_s B^s)}$

$$\gamma_0 = 1 + \theta_1^2 + \theta_{s-1}^2 + (\theta_1 \theta_{s-1} - \theta_s)^2 + \theta_s^2 (\theta_1^2 + \theta_{s-1}^2 + \theta_1^2 \theta_{s-1}^2)$$

$$\gamma_1 = -\theta_1 + (\theta_1 \theta_{s-1} - \theta_s)(\theta_1 \theta_s - \theta_{s-1}) - \theta_1 \theta_{s-1} \theta_s^2$$

$$\gamma_2 = -\theta_1 \theta_{s-1} \theta_s$$

$$\gamma_{s-2} = \theta_1 \theta_{s-1} (1 + \theta_s^2)$$

$$\gamma_{s-1} = -\theta_{s-1} (1 + \theta_1^2 \theta_s^2) + (\theta_1 \theta_{s-1} - \theta_s)(\theta_{s-1} \theta_s - \theta_1)$$

$$\gamma_s = (\theta_1 \theta_{s-1} - \theta_s)(1 - \theta_1 \theta_{s-1} \theta_s) - \theta_s (\theta_1^2 + \theta_s^2)$$

$$\begin{aligned}\gamma_{s+1} &= \theta_1 \theta_s (1 + \theta_{s-1}^2) \\ \gamma_{2s-2} &= \theta_1 \theta_{s-1} \theta_s \\ \gamma_{2s-1} &= \theta_{s-1} \theta_s (1 + \theta_1^2) \\ \gamma_{2s} &= -\theta_1 \theta_{s-1} \theta_s = \gamma_2\end{aligned}$$

b) (1,s,s+1)-Modelle

$$3.2.4. \underline{z}_t = \frac{(1 - \theta_1 B^1 - \theta_s B^s - \theta_{s+1} B^{s+1}) a_t}{1 - \theta_1 B^1 - \theta_s B^s - \theta_{s+1} B^{s+1}}$$

Die ACovF weist dieselbe Struktur wie die von 3.2.1. auf, nun an den lags 1, s-1, s, s+1.

$$3.2.5. \underline{z}_t = \frac{(1 - \theta_1 B^1)(1 - \theta_s B^s - \theta_{s+1} B^{s+1}) a_t}{1 - \theta_1 B^1 - \theta_s B^s - \theta_{s+1} B^{s+1}}$$

Die ACovF weist dieselbe Struktur wie das Modell 3.2.2. bei um eins verschobenen saisonalen lags auf.

$$3.2.6. \underline{z}_t = \frac{(1 - \theta_1 B^1 - \theta_s B^s)(1 - \theta_s B^s) a_t}{1 - \theta_1 B^1 - \theta_s B^s - \theta_s B^s}$$

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= 1 + \theta_1^2 + (\theta_s + \theta_s)^2 + \theta_s^2 (\theta_1^2 + \theta_s^2) \\ \gamma_1 &= -\theta_1 - \theta_1 \theta_s (\theta_s + \theta_s) \\ \gamma_{s-1} &= \theta_1 (\theta_s + \theta_s) + \theta_1 \theta_s \theta_s^2 \\ \gamma_s &= -(\theta_s + \theta_s) - \theta_1^2 \theta_s^2 - \theta_s \theta_s (\theta_s + \theta_s) \\ \gamma_{s+1} &= \theta_1 \theta_s \\ \gamma_{2s-1} &= -\theta_1 \theta_s \theta_s \\ \gamma_{2s} &= \theta_s \theta_s\end{aligned}$$

c) (1,s,2s)-Modelle

$$3.2.7. \underline{z_t = (1-\theta_1 B - \theta_s B^s - \theta_{2s} B^{2s}) a_t}$$

$$\gamma_0 = 1 + \theta_1^2 + \theta_s^2 + \theta_{2s}^2$$

$$\gamma_1 = -\theta_1$$

$$\gamma_{s-1} = \theta_1 \theta_s$$

$$\gamma_s = -\theta_s (1 - \theta_{2s})$$

$$\gamma_{2s-1} = \theta_1 \theta_{2s}$$

$$\gamma_{2s} = -\theta_{2s}$$

$$3.2.8. \underline{z_t = (1-\theta_1 B)(1-\theta_s B^s - \theta_{2s} B^{2s}) a_t}$$

$$\gamma_0 = (1 + \theta_1^2)(1 + \theta_s^2 + \theta_{2s}^2)$$

$$\gamma_1 = -\theta_1(1 + \theta_s^2 + \theta_{2s}^2)$$

$$\gamma_{s-1} = \theta_1 \theta_s (1 - \theta_{2s})$$

$$\gamma_s = -\theta_s (1 + \theta_1^2)(1 - \theta_{2s})$$

$$\gamma_{s+1} = \gamma_{s-1}$$

$$\gamma_{2s-1} = \theta_1 \theta_{2s}$$

$$\gamma_{2s} = -\theta_{2s} (1 + \theta_1^2)$$

$$\gamma_{2s+1} = \gamma_{2s-1}$$

$$3.2.9. \underline{z_t = (1-\theta_1 B^1)(1-\theta_s B^s)(1-\theta_{2s} B^{2s}) a_t}$$

Die ACovF hat dieselbe Struktur wie das 3.1.2.-Modell (1,2,s) für (1,s,2s), wobei die saisonalen lags doppelt so groß betrachtet werden müssen.

3.3. Modelle mit drei saisonalen Parametern

a) (s-1,s,s+1)-Modelle

3.3.1.
$$\underline{z}_t = \frac{(1-\theta_{s-1}B^{s-1} - \theta_s B^s - \theta_{s+1}B^{s+1})a_t}{(1-\theta_{s-1}^2 - \theta_s^2 - \theta_{s+1}^2)}$$

$$\gamma_0 = 1 + \theta_{s-1}^2 + \theta_s^2 + \theta_{s+1}^2$$

$$\gamma_1 = \theta_s(\theta_{s-1} + \theta_{s+1})$$

$$\gamma_2 = \theta_{s-1}\theta_{s+1}$$

$$\gamma_{s-1} = -\theta_{s-1}$$

$$\gamma_s = -\theta_s$$

$$\gamma_{s+1} = -\theta_{s+1}$$

3.3.2.
$$\underline{z}_t = \frac{(1-\theta_{s-1}B^{s-1})(1-\theta_s B^s)(1-\theta_{s+1}B^{s+1})a_t}{(1-\theta_{s-1}^2)(1-\theta_s^2)(1-\theta_{s+1}^2)}$$

$$\gamma_0 = (1 + \theta_{s-1}^2)(1 + \theta_s^2)(1 + \theta_{s+1}^2)$$

$$\gamma_1 = \theta_s(\theta_{s-1} + \theta_{s+1})(1 + \theta_{s-1}\theta_{s+1})$$

$$\gamma_2 = \theta_{s-1}\theta_{s+1}(1 + \theta_s^2)$$

$$\gamma_{s-2} = -\theta_{s-1}\theta_s\theta_{s+1}$$

$$\gamma_{s-1} = -\theta_{s-1}(1 + \theta_s^2)(1 + \theta_{s+1}^2)$$

$$\gamma_s = -\theta_s[(1 + \theta_{s-1}^2)(1 + \theta_{s+1}^2) + \theta_{s-1}\theta_{s+1}]$$

$$\gamma_{s+1} = -\theta_{s+1}(1 + \theta_{s-1}^2)(1 + \theta_s^2)$$

$$\gamma_{s+2} = -\theta_{s-1}\theta_s\theta_{s+1}$$

$$\gamma_{2s} = \theta_{s-1}(\theta_{s+1} + \theta_s^2)$$

$$\gamma_{2s+1} = \theta_s\theta_{s+1}(1 + \theta_{s-1}^2)$$

$$\gamma_{3s} = -\theta_{s-1}\theta_s\theta_{s+1}$$

$$3.3.3. \underline{z}_t = \frac{(1-\theta_{s-1} B^{s+1})(1-\theta_s B^2 - \theta_{s+1} B^{s+1}) a_t}{s-1 \quad s \quad s+1}$$

$$\gamma_0 = (1+\theta_{s-1}^2)(1+\theta_s^2 + \theta_{s+1}^2)$$

$$\gamma_1 = \theta_s(\theta_{s-1} + \theta_{s+1} + \theta_s^2 \theta_{s-1})$$

$$\gamma_2 = \theta_{s-1} \theta_{s+1}$$

$$\gamma_{s-2} = -\theta_{s-1} \theta_s \theta_{s+1}$$

$$\gamma_{s-1} = -\theta_{s-1}(1+\theta_s^2 + \theta_{s+1}^2)$$

$$\gamma_{s+1} = -\theta_{s+1}(1+\theta_{s-1}^2)$$

$$\gamma_{2s-1} = \theta_{s-1} \theta_s$$

$$\gamma_{2s} = \theta_{s-1} \theta_{s+1} = \gamma_2$$

$$3.3.4. \underline{z}_t = \frac{(1-\theta_s B^2)(1-\theta_{s-1} B^{s-1} + \theta_{s+1} B^{s+1}) a_t}{s \quad s-1 \quad s+1}$$

$$\gamma_0 = (1+\theta_s^2)(1+\theta_{s-1}^2 + \theta_{s+1}^2)$$

$$\gamma_1 = \theta_s(\theta_{s-1} + \theta_{s+1})$$

$$\gamma_2 = \theta_{s-1} \theta_s^2 \theta_{s+1}$$

$$\gamma_{s-2} = -\theta_{s-1} \theta_s \theta_{s+1}$$

$$\gamma_{s-1} = -\theta_{s-1}(1+\theta_s^2)$$

$$\gamma_s = -\theta_s(1+\theta_{s-1}^2 + \theta_{s+1}^2)$$

$$\gamma_{s+1} = -\theta_{s+1}(1+\theta_s^2)$$

$$\gamma_{s+2} = -\theta_{s-1} \theta_s \theta_{s+1} = \gamma_{s-2}$$

$$\gamma_{2s-1} = \theta_{s-1} \theta_s$$

$$\gamma_{2s+1} = \theta_s \theta_{s+1}$$

$$3.3.5. \underline{z}_t = \frac{(1-\theta_{s+1} B^{s+1})(1-\theta_{s-1} B^{s-1} - \theta_s B^2) a_t}{s+1 \quad s-1 \quad s}$$

$$\gamma_0 = (1+\theta_{s-1}^2 + \theta_s^2)(1+\theta_{s+1}^2)$$

$$\gamma_1 = \theta_s(1+\theta_{s-1})(1+\theta_{s+1})$$

$$\gamma_2 = \theta_{s-1} \theta_{s+1}$$

$$\gamma_{s-1} = -\theta_{s-1}(1+\theta_{s+1}^2)$$

$$\gamma_s = -\theta_s (1 + \theta_{s+1} + \theta_{s-1} \theta_{s+1})$$

$$\gamma_{s+1} = -\theta_{s+1} (1 + \theta_{s-1}^2 + \theta_{s+1}^2)$$

$$\gamma_{s+2} = -\theta_{s-1} \theta_s \theta_{s+1}$$

$$\gamma_{2s} = \theta_{s-1} \theta_{s+1}$$

$$\gamma_{2s+1} = \theta_s \theta_{s+1}$$

$$3.3.6. \quad \underline{z}_t = \frac{(1-\theta_{s-1} B^{s-1} - \theta_s B^s - \theta_{2s} B^{2s}) a_t}{s-1}$$

$$\gamma_0 = 1 + \theta_{s-1}^2 + \theta_s^2 + \theta_{2s}^2$$

$$\gamma_1 = \theta_{s-1} \theta_s$$

$$\gamma_{s+1} = -\theta_{s-1}$$

$$\gamma_s = -\theta_s + \theta_s \theta_{2s}$$

$$\gamma_{2s} = \theta_{2s}$$

$$3.3.7. \quad \underline{z}_t = \frac{(1-\theta_{s-1} B^{s-1})(1-\theta_s B^s - \theta_{2s} B^{2s}) a_t}{s-1}$$

$$\gamma_0 = (1 + \theta_{s-1})^2 (1 + \theta_s^2 + \theta_{2s}^2)$$

$$\gamma_1 = \theta_{s-1} \theta_s (1 - \theta_{2s})$$

$$\gamma_{s-1} = -\theta_{s-1} (1 + \theta_s^2 + \theta_{2s}^2)$$

$$\gamma_s = -\theta_s (1 + \theta_{s-1}^2) (1 - \theta_{2s})$$

$$\gamma_{s+1} = \theta_{s-1} \theta_{2s}$$

$$\gamma_{2s-1} = \theta_{s-1} \theta_s \theta_{2s} (1 + \theta_{2s})$$

$$\gamma_{2s} = -\theta_{2s} (1 + \theta_{s-1}^2)$$

$$\gamma_{3s-1} = \theta_{s-1} \theta_{2s}$$

$$3.3.8. \underline{z}_t = \frac{(1-\theta_{s-1} B^{s-1})(1-\theta_s B^s)(1-\theta_{2s} B^{2s}) a_t}{}$$

$$\gamma_0 = (1+\theta_{s-1}^2)(1+\theta_s^2)(1+\theta_{2s}^2)$$

$$\gamma_1 = \theta_{s-1} \theta_s (1-\theta_{2s} + \theta_{2s}^2)$$

$$\gamma_{s-1} = -\theta_{s-1} (1+\theta_s^2)(1+\theta_{2s}^2)$$

$$\gamma_s = -\theta_s (1+\theta_{s-1}^2)(1-\theta_{2s} + \theta_{2s}^2)$$

$$\gamma_{s+1} = \theta_{s-1} \theta_{2s} (1+\theta_s^2)$$

$$\gamma_{2s-1} = \theta_{s-1} \theta_s (1-\theta_{2s} + \theta_{2s}^2)$$

$$\gamma_{2s} = -\theta_{2s} (1+\theta_{s-1}^2)(1+\theta_s^2)$$

$$\gamma_{2s+1} = -\theta_{s-1} \theta_s \theta_{2s}$$

$$\gamma_{3s-1} = \theta_{s-1} \theta_{2s} (1+\theta_s^2)$$

$$\gamma_{3s} = \theta_s \theta_{2s} (1+\theta_{s-1}^2)$$

$$\gamma_{4s-1} = -\theta_{s-1} \theta_s \theta_{2s}$$

$$3.3.9. \underline{z}_t = \frac{(1-\theta_2 B^2 - \theta_s B^s - \theta_{2s} B^{2s}) a_t}{}$$

$$\gamma_0 = 1 + \theta_2^2 + \theta_s^2 + \theta_{2s}^2$$

$$\gamma_2 = -\theta_2$$

$$\gamma_{s-2} = \theta_2 \theta_s$$

$$\gamma_s = -\theta_s (1 - \theta_{2s})$$

$$\gamma_{s-2} = \theta_2 \theta_{2s}$$

$$\gamma_{2s} = -\theta_{2s}$$

$$3.3.10. \underline{z}_t = \frac{(1-\theta_2 B^2 - \theta_s B^s - \theta_{s+1} B^{s+1}) a_t}{}$$

$$\gamma_0 = 1 + \theta_2^2 + \theta_s^2 + \theta_{s+1}^2$$

$$\gamma_1 = \theta_s \theta_{s+1}$$

$$\gamma_2 = -\theta_2$$

$$\gamma_{s-2} = \theta_2 \theta_s$$

$$\gamma_{s-1} = \theta_2 \theta_{s+1}$$

$$\gamma_s = -\theta_s$$

$$\gamma_{s+1} = -\theta_{s+1}$$

APPENDIX A: Komplexe Zahlen

A.1) Darstellung komplexer Zahlen

Zur Darstellung komplexer Zahlen unterscheiden wir 4 Formen, die sich aus der Kombination zweier Koordinatensysteme mit zweierlei Vektorschreibweise

- (1) $z=(a,b)$ kartesische Zahlenpaarform
- (2) $z=(r,\omega)$ trigonometrische Zahlenpaarform
- (3) $z=a+bi$ kartesische Binomialform
- (4) $z=r(\cos \omega+i \sin \omega)$ trigonometrische Binomialform

Vektorform	Koordinatensysteme	
	kartesisch	Polar
Zahlenpaar	(a,b)	(r,ω)
Binomial	$(a+bi)$	$r(\cos \omega + i \sin \omega)$

Die Umrechnung von kartesischen in Polarkoordinaten erfolgt nach der Form

$$(a,b)=(r \cos \omega, r \sin \omega) \tag{A.1}$$

mit
$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{A.2}$$

und

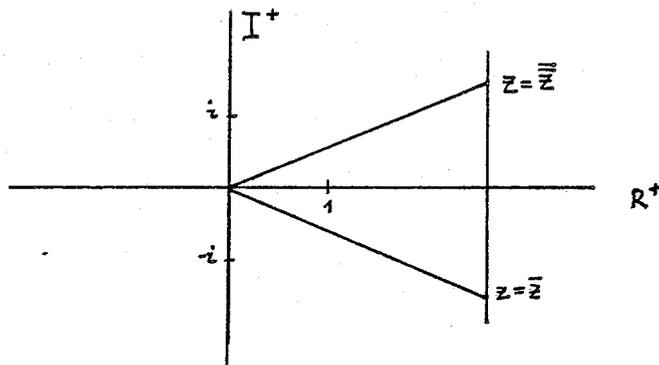
$$y = \begin{cases} \arctan \frac{b}{a} & a>0, b>0 & \text{(I.Quadrant und } R^+ \text{-Achse)} \\ \arctan \frac{b}{a} + \pi & a<0 & \text{(II.+III.Quadrant, } R \text{-Achse)} \\ \arctan \frac{b}{a} + 2\pi & a>0, b<0 & \text{(IV. Quadrant (A.3))} \\ \frac{\pi}{2} & a=0, b>0 & \text{(I}^+ \text{-Achse)} \\ -\frac{\pi}{2} & a=0, b<0 & \text{(I}^- \text{-Achse)} \end{cases}$$

Def. A.1 Man nennt die komplexe Zahl $(a, -b)$ die zu (a, b) konjugiert komplexe Zahl. Wie schreiben auch $(\overline{a, b}) = (a, -b)$. In der Binomialschreibweise lautet die konjugiert komplexe Zahl

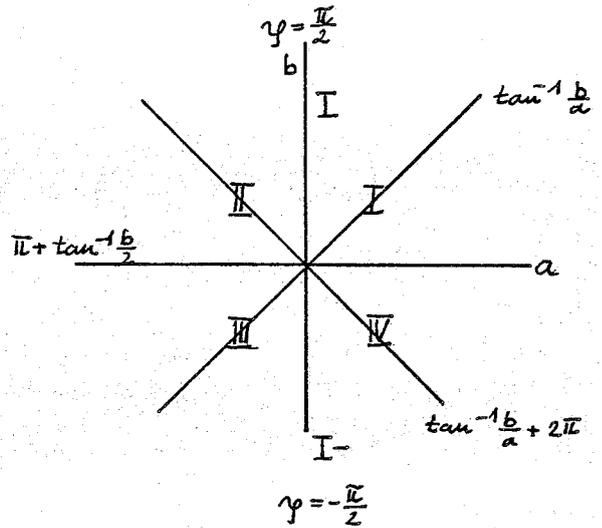
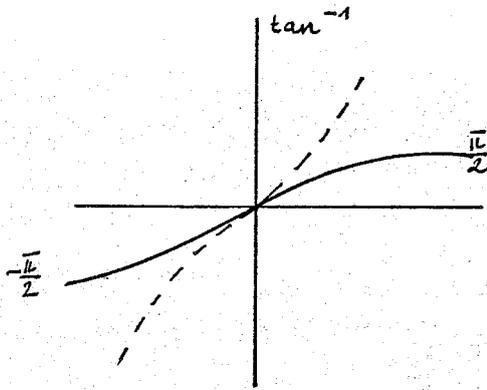
$$\overline{a+bi} = a-bi$$

A.2) Graphische Darstellung

In der komplexen Zahlenebene liegt der Punkt z symmetrisch zum Punkt \bar{z} bezüglich der reellen Achse



Trigonometrische Form



$$-\frac{\pi}{2} < \arctan \frac{b}{a} < \frac{\pi}{2}$$

$$z = a + bi$$

$$z = a - bi$$

$$\arctan \frac{-b}{a} = \arctan \frac{b}{a} + \pi$$

$$\frac{\pi}{2} < \arctan \frac{-b}{a} < \frac{3\pi}{2}$$

(A.4)

Anmerkung:

1. Die trigonometrische Angabe einer komplexen Zahl unterscheidet sich von der Polarkoordinaten-Darstellung von reellen Zahlen dadurch, daß bei komplexen Zahlen für den Radiusvektor auch negative Zahlen zulässig sind.
2. Eine weitere Darstellungsform der trigonometrischen Binomialform ergibt sich aus der komplexen Exponentialfunktion.

$$e^{i\omega} = \cos \omega + i \sin \omega \quad (\text{A.5})$$

Wir nennen daher die Darstellung

$$z = (r, \omega) = r e^{i\omega} \quad (\text{A.6})$$

die Exponentialdarstellung komplexer Zahlen

A 3) Die Assoziierten Perioden

Im folgenden sei für diskrete Kosinusschwingungen demonstriert, daß ein und dieselbe periodische Punktfolge durch Kosinusschwingungen verschiedener Frequenz (Periodenlänge) erzeugt werden kann.

Wegen der Periodizität der Kosinusfunktion gilt

$$\cos \frac{2\pi}{T} t = \cos \left(\frac{2\pi}{T} t + 2\pi k \right) \quad k \in \mathbb{N} \quad (\text{A.7})$$

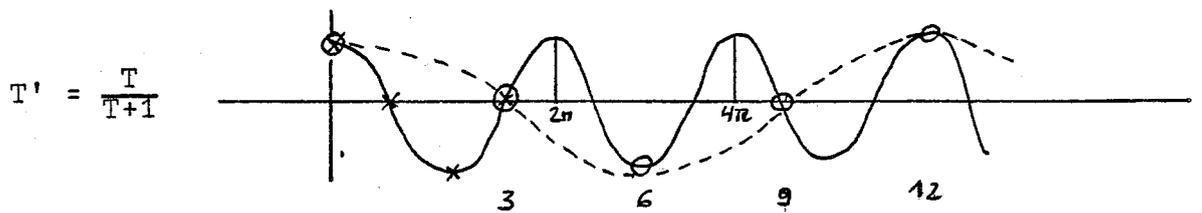
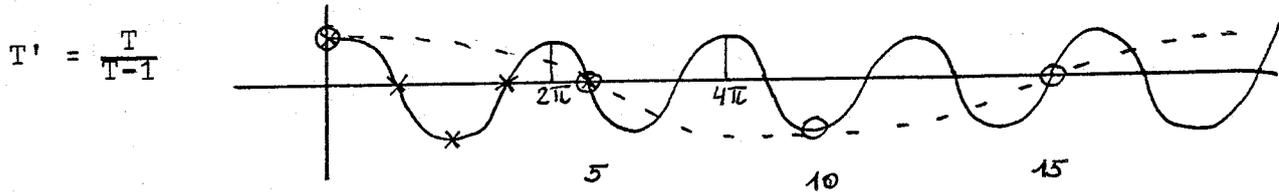
Wir setzen nun $t=k$

$$\begin{aligned} \cos \frac{2\pi}{T} k &= \cos \frac{2\pi}{T} k(1 + T) = \\ &= \cos \frac{2\pi}{T'} k \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

$$\text{mit } T' = \frac{T}{T+1} \quad (\text{A.9})$$

Wir nennen T' die assoziierte Periode erster Ordnung. Im Fall $T'=T/(T-1)$ ist es die Periodenlänge derjenigen Kosinusfunktion die man erhält, wenn man den ersten Punkt aus dem ersten Kosinuszyklus, den zweiten Punkt aus dem ersten Kosinuszyklus nimmt, etc.

Beispiel A1 Sei $T=4$ dann ist $T'_{-1} = \frac{4}{4-1} = \frac{4}{3}$ und $T'_{+1} = \frac{4}{4+1} = \frac{4}{5}$



Setzen wir für die Frequenz $f=1/T$ so erhalten wir für die Frequenzen der assoziierten Perioden

$$\text{bzw. } f' = \frac{1}{T'} = \frac{T+1}{T} = 1 + \frac{1}{T} \quad (\text{A.10})$$

$$f' = 1 - f \quad (\text{A.11})$$

Setzen wir in (A.7) $t=nk$ so erhalten wir die assoziierten Perioden n -ter Ordnung.

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + 2\pi k\right) &= \cos \frac{2\pi}{T} k(n+T) \\ &= \cos \frac{2\pi}{T'(n)} k \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

$$\text{mit } T'(n) = \frac{T}{T-n} \quad (\text{A.13})$$

Die Frequenzen n -ter Ordnung sind

$$f'(n) = \frac{T-n}{T} = 1 - nf \quad (\text{A.14})$$

LITERATURVERZEICHNIS

- ANDERSON, O.D. (1976) Time Series Analysis and Forecasting.
The Box-Jenkins Approach. Butterworths
- ANDERSON, T.W. (1971) The Statistical Analysis of Time Series.
Wiley, New York
- BOX, G.E.P. and JENKINS, G.M. (1967) Models for Forecasting
Seasonal and Nonseasonal Time Series, in Harris (1967),
S. 271-311
- BOX, G.E.P. and JENKINS, G.M. (1970) Time-Series Analysis,
Forecasting and Control. Holden-Day, San Francisco
- BRAND, L. (1966) Differential and Difference Equations.
John Wiley, New York
- CHATFIELD, C. and PROTHERO, D.L. (1973a) Box-Jenkins seasonal
forecasting: Problems in a case-study, J.R.Stat.Soc.A,
136, 295-336
- CHATFIELD, C. and PROTHERO, D.L. (1973b) A reply to some comments
by Box and Jenkins, J.R.Stat.Soc.A, 136, 345-352
- CLEVELAND, W.S. (1972) The Inverse Autocorrelations of a Time
Series and Their Applications, Technometrics, Vol.14,
No.2, S. 277-298
- DRAPER, N.R., SMITH, H. (1966) Applied Regression Analysis,
John Wiley, New York
- GOLDBERG, S. (1968) Differenzgleichungen und ihre Anwendung in
Wirtschaftswissenschaft, Psychologie und Soziologie.
Oldenburg, München
- GRANGER, C.W.J. and NEWBOLD, P. (1977) Forecasting Economic
Time Series. Academic Press, New York
- GRENANDER, U. and ROSENBLATT, M. (1957) Statistical Analysis
of Stationary Time Series. Wiley, New York

- HANNAN, E.J. (1960) Time Series Analysis. Methuen, London
- HARRIS, B. (1967) Spectral Analysis of Time Series.
John Wiley, New York
- JENKINS, G.M. and WATTS, D.G. (1968) Spectral Analysis and its
Applications. Holden-Day, San Francisco.
- LEDOLTER, J. (1977) Adaptivity and Stability of Time Series
Models. Empirica 2, 179-195
- LEDOLTER, J., SCHEBECK, F., THURY, G. (1977), Box-Jenkins-
Methode. Alternative Verfahren zur Prognose ökonomischer
Zeitreihen. Empirica 1
- POLASEK, W. (1977) Das IAZ-System (Interaktives Zeitreihen system).
Institutsarbeit Nr. 87, Institut für Höhere Studien, Wien
- POLASEK, W. (1978) Die Analyse von ARIMA-Prozessen, Wien (Manuskript)
- TINTNER, G. (1940) The Variate Difference Method.
Bloomington Press, Indiana

TABELLENANHANG

Graphischer Ausdruck der ACF mit permutierten Parameterkonstellationen. Die Numerierung der Modelle entspricht der Numerierung in den Teilen B und C. Die ACF für weitere ARIMA- und SARIMA-Prozesse kann durch Aufruf des Computerprogramms IAS-S*IAZ-H3 an der UNIVAC 1106-Anlage des Instituts für Höhere Studien berechnet und graphisch ausgegeben werden.

4.2.1

```

=(1+.5B1)(1+.5B2)
GRAPH OF -.50 -.50
GRAPH INTERVAL IS .4000-01
-1.000 .000 1.000
.+++++.+++++.+++++.+++++.+++++.+++++.+++++.+++++.+++++.+++++.
XXXXX
XXXXX:XXX
VALUES
-.1667
-.33333

```

```

4.2.3
=(1+.5B1)(1+.5B2)
GRAPH OF -.50 -.50
GRAPH INTERVAL IS .4000-01
-1.000 .000 1.000
.+++++.+++++.+++++.+++++.+++++.+++++.+++++.+++++.+++++.+++++.
XXXXX
XXXXX:XXX
VALUES
-.24000
-.40000
-.16000

```

4.2.2

```

=(1+.5B1)(1+.5B2)
GRAPH OF -.50 .50
GRAPH INTERVAL IS .4000-01
-1.000 .000 1.000
.+++++.+++++.+++++.+++++.+++++.+++++.+++++.+++++.+++++.+++++.
XXXXX
XXXXX:XXX
VALUES
-.50000
.33333

```

```

=(1+.5B1)(1+.5B2)
GRAPH OF -.50 .50
GRAPH INTERVAL IS .4000-01
-1.000 .000 1.000
.+++++.+++++.+++++.+++++.+++++.+++++.+++++.+++++.+++++.+++++.
XXXXX
XXXXX:XXX
VALUES
-.56000
.40000
-.16000

```

4.2.4

```

=(1+.5B1)(1+.5B2)
GRAPH OF .50 -.50
GRAPH INTERVAL IS .4000-01
-1.000 .000 1.000
.+++++.+++++.+++++.+++++.+++++.+++++.+++++.+++++.+++++.+++++.
XXXXX
XXXXX:XX
VALUES
.16667
-.33333

```

```

=(1+.5B1)(1+.5B2)
GRAPH OF .50 -.50
GRAPH INTERVAL IS .4000-01
-1.000 .000 1.000
.+++++.+++++.+++++.+++++.+++++.+++++.+++++.+++++.+++++.+++++.
XXXXX
XXXXX:XXX
VALUES
.24000
-.40000
-.16000

```

4.2.5

```

=(1+.5B1)(1+.5B2)
GRAPH OF .50 .50
GRAPH INTERVAL IS .4000-01
-1.000 .000 1.000
.+++++.+++++.+++++.+++++.+++++.+++++.+++++.+++++.+++++.+++++.
XXXXX
XXXXX:XXX
VALUES
.50000
.33333

```

```

=(1+.5B1)(1+.5B2)
GRAPH OF .50 .50
GRAPH INTERVAL IS .4000-01
-1.000 .000 1.000
.+++++.+++++.+++++.+++++.+++++.+++++.+++++.+++++.+++++.+++++.
XXXXX
XXXXX:XXX
VALUES
.56000
.40000
.16000

```

```

1.2.2      = (1+.5B1+.5B2+.5B3)
GRAPH OF   .50 -.50 -.50
GRAPH INTERVAL IS .4000-01
-1.000
.+++++
.000
XXXXXXX
1.000
VALUES
.28571
-.42857
-.28571

```

```

VALUES
.00000
-.14286
-.28571

```

```

= (1+.5B1+.5B2+.5B3)
GRAPH OF   .50 -.50 .50
GRAPH INTERVAL IS .4000-01
-1.000
.+++++
.000
XXXXXXX
1.000
VALUES
.00000
-.14286
-.28571

```

```

VALUES
.00000
-.14286
-.28571

```

```

= (1+.5B1+.5B2+.5B3)
GRAPH OF   .50 .50 -.50
GRAPH INTERVAL IS .4000-01
-1.000
.+++++
.000
XXXXXXX
1.000
VALUES
.28571
.14286
-.28571

```

```

VALUES
-.57143
.42857
-.28571

```

```

= (1+.5B1+.5B2+.5B3)
GRAPH OF   .50 .50 .50
GRAPH INTERVAL IS .4000-01
-1.000
.+++++
.000
XXXXXXX
1.000
VALUES
.57143
.42857
.28571

```

```

VALUES
-.28571
.14286
.28571

```

2.1.2

```

=(1+.501)(1+.500)
GAPM OF -.50 -.50
GAPM INTERVAL IS .4000-01
-1.000
+++++
YXXXXXXXXX
.000
Y
XXXX
XXXXXXX
XXXX
XXXX
-1.0000
.00000
-1.0000
.00000
-1.0000
.00000

```

```

=(1+.501)(1+.500)
GAPM OF -.50 .50
GAPM INTERVAL IS .4000-01
-1.000
+++++
XXXXXXXXXX
.000
Y
XXXX
XXXXXXX
XXXX
XXXX
-1.0000
.00000
-1.0000
.00000
-1.0000
.00000

```

```

=(1+.501)(1+.500)
GAPM OF .50 -.50
GAPM INTERVAL IS .4000-01
-1.000
+++++
XXXXXXXXXX
.000
Y
XXXX
XXXXXXX
XXXX
XXXX
-1.0000
.00000
-1.0000
.00000
-1.0000
.00000

```

```

=(1+.501)(1+.500)
GAPM OF .50 .50
GAPM INTERVAL IS .4000-01
-1.000
+++++
XXXXXXXXXX
.000
Y
XXXX
XXXXXXX
XXXX
XXXX
-1.0000
.00000
-1.0000
.00000
-1.0000
.00000

```

2.1.4

```

=(1+.501)(1+.500)
GAPM OF -.50 -.50
GAPM INTERVAL IS .4000-01
-1.000
+++++
XXXXXXXXXX
.000
Y
XXXX
XXXXXXX
XXXX
XXXX
-1.0000
.00000
-1.0000
.00000
-1.0000
.00000

```

```

=(1+.501)(1+.500)
GAPM OF -.50 .50
GAPM INTERVAL IS .4000-01
-1.000
+++++
XXXXXXXXXX
.000
Y
XXXX
XXXXXXX
XXXX
XXXX
-1.0000
.00000
-1.0000
.00000
-1.0000
.00000

```

```

=(1+.501)(1+.500)
GAPM OF .50 -.50
GAPM INTERVAL IS .4000-01
-1.000
+++++
XXXXXXXXXX
.000
Y
XXXX
XXXXXXX
XXXX
XXXX
-1.0000
.00000
-1.0000
.00000
-1.0000
.00000

```

```

=(1+.501)(1+.500)
GAPM OF .50 .50
GAPM INTERVAL IS .4000-01
-1.000
+++++
XXXXXXXXXX
.000
Y
XXXX
XXXXXXX
XXXX
XXXX
-1.0000
.00000
-1.0000
.00000
-1.0000
.00000

```

2.2.2

=(1-.503)(1-.504)

GRAPH OF -.50 -.50

GRAPH INTERVAL IS .0000-01

-1.000
+++++
.000
XXXX

VALUES
.10000
.00000
-.40000
-.40000
.60000
.00000
.10000

1
2
3
4
5
6
7

1.000
+++++
XXXX
XXXXXXX
XXXXXXX
XXXXXXX
XXXXXXX
XXXXXXX

=(1-.503)(1-.504)

GRAPH OF -.50 .50

GRAPH INTERVAL IS .0000-01

-1.000
+++++
.000
XXXX

VALUES
-.10000
-.00000
-.40000
.40000
.00000
.00000
-.10000

1
2
3
4
5
6
7

1.000
+++++
XXXX
XXXXXXX
XXXXXXX
XXXXXXX
XXXXXXX
XXXXXXX

=(1-.503)(1-.504)

GRAPH OF .50 -.50

GRAPH INTERVAL IS .0000-01

-1.000
+++++
.000
XXXX

VALUES
-.10000
-.00000
.40000
-.40000
.00000
.00000
-.10000

1
2
3
4
5
6
7

1.000
+++++
XXXX
XXXXXXX
XXXXXXX
XXXXXXX
XXXXXXX
XXXXXXX

=(1-.503)(1-.504)

GRAPH OF .50 .50

GRAPH INTERVAL IS .0000-01

-1.000
+++++
.000
XXXX

VALUES
.10000
.00000
-.00000
.00000
.00000
.00000
.10000

1
2
3
4
5
6
7

1.000
+++++
XXXX
XXXXXXX
XXXXXXX
XXXXXXX
XXXXXXX
XXXXXXX

2.2.4

=(1-.503)(.504)

GRAPH OF -.50 -.50

GRAPH INTERVAL IS .0000-01

-1.000
+++++
.000
XXXX

VALUES
.10000
.00000
-.55555
-.55555

1
2
3
4

1.000
+++++
XXXX
XXXXXXX
XXXXXXX
XXXXXXX
XXXXXXX

=(1-.503)(.504)

GRAPH OF -.50 .50

GRAPH INTERVAL IS .0000-01

-1.000
+++++
.000
XXXX

VALUES
-.10000
-.00000
-.55555
-.55555

1
2
3
4

1.000
+++++
XXXX
XXXXXXX
XXXXXXX
XXXXXXX
XXXXXXX

=(1-.503)(.504)

GRAPH OF .50 -.50

GRAPH INTERVAL IS .0000-01

-1.000
+++++
.000
XXXX

VALUES
-.10000
-.00000
.55555
-.55555

1
2
3
4

1.000
+++++
XXXX
XXXXXXX
XXXXXXX
XXXXXXX
XXXXXXX

=(1-.503)(.504)

GRAPH OF .50 .50

GRAPH INTERVAL IS .0000-01

-1.000
+++++
.000
XXXX

VALUES
.10000
.00000
.55555
.55555

1
2
3
4

1.000
+++++
XXXX
XXXXXXX
XXXXXXX
XXXXXXX
XXXXXXX

3.4.4

=(1+.501+.502+.500)

GRAPH OF -.50 -.50 -.50

GRAPH INTERVAL IS .4000-01

-1.000
+++++
XXXXX
XXXXX
XXXXX
XXXXXXX
XXXXXXX

1
2
3
4

VALUES
-.14286
-.14286
-.14286
-.28571

2.4.4

=(1+.501+.502+.500)

GRAPH OF .50 -.50 -.50

GRAPH INTERVAL IS .4000-01

-1.000
+++++
XXXXX
XXXXX
XXXXXXX
XXXXXXX

1
2
3
4

VALUES
.14286
.14286
.14286
.28571

=(1+.501+.502+.500)

GRAPH OF -.50 -.50 .50

GRAPH INTERVAL IS .4000-01

-1.000
+++++
XXXXX
XXXXX
XXXXX
XXXXXXX
XXXXXXX

1
2
3
4

VALUES
-.14286
-.2857
.14286
.28571

VALUES
.000
+++++
XXXXX
XXXXX
XXXXXXX
XXXXXXX

1
2
3
4

VALUES
.14286
-.2857
.14286
.28571

=(1+.501+.502+.500)

GRAPH OF -.50 .50 -.50

GRAPH INTERVAL IS .4000-01

-1.000
+++++
XXXXX
XXXXX
XXXXX
XXXXXXX
XXXXXXX

1
2
3
4

VALUES
-.2857
.14286
-.14286
-.28571

VALUES
.000
+++++
XXXXX
XXXXX
XXXXXXX
XXXXXXX

1
2
3
4

=(1+.501+.502+.500)

GRAPH OF -.50 .50 .50

GRAPH INTERVAL IS .4000-01

-1.000
+++++
XXXXX
XXXXX
XXXXX
XXXXXXX
XXXXXXX

1
2
3
4

VALUES
-.2857
.14286
.14286
.28571

VALUES
.000
+++++
XXXXX
XXXXX
XXXXXXX
XXXXXXX

1
2
3
4

3.4.2

= (1+.501) (1+.502) (1+.504)

GRAPH OF .50 -.50 -.50
GRAPH INTERVAL IS .4000-01

VALUES

1	.30400
2	-.24000
3	.25600
4	-.40000
5	.09600
6	-.10000
7	-.06400

-1.000
 .+++++
 .000
 XXXXXXXX
 YYYYYY
 YYYYYY
 YYYYYY
 YXX
 YXXX
 YXX
 1.000
 .+++++

= (1+.501) (1+.502) (1+.504)

GRAPH OF .50 -.50 .50
GRAPH INTERVAL IS .4000-01

VALUES

1	-.17600
2	-.56000
3	.06400
4	.40000
5	.09600
6	-.10000
7	-.06400

-1.000
 .+++++
 .000
 YXXX
 XXXXXXXX
 YXX
 XXXXXXXX
 YXX
 YXXX
 YXX
 1.000
 .+++++

= (1+.501) (1+.502) (1+.504)

GRAPH OF .50 -.50 -.50
GRAPH INTERVAL IS .4000-01

VALUES

1	-.69600
2	-.24000
3	.06400
4	-.40000
5	-.24000
6	-.10000
7	-.06400

-1.000
 .+++++
 .000
 XXXXXXXX
 YXX
 YXX
 XXXXXXXX
 YXXXXX
 YXX
 YXX
 1.000
 .+++++

= (1+.501) (1+.502) (1+.504)

GRAPH OF .50 .50 .50
GRAPH INTERVAL IS .4000-01

VALUES

1	-.62400
2	-.56000
3	-.30400
4	.40000
5	.24000
6	.16000
7	-.06400

-1.000
 .+++++
 .000
 XXXXXXXX
 YYYYYY
 YYYYYY
 YYYYYY
 YYYYYY
 YXXXXX
 YXXXX
 XXX
 1.000
 .+++++

3.4.2

= (1+.501) (1+.502) (1+.504)

GRAPH OF .50 -.50 -.50
GRAPH INTERVAL IS .4000-01

VALUES

1	-.10000
2	.30400
3	-.24000
4	-.25600
5	-.40000
6	-.09600
7	-.10000
8	-.06400

-1.000
 .+++++
 .000
 XXXXXXXX
 YYYYYY
 XXXXXXXX
 XXXXXXXX
 XXX
 YXXX
 YXX
 1.000
 .+++++

= (1+.501) (1+.502) (1+.504)

GRAPH OF .50 -.50 .50
GRAPH INTERVAL IS .4000-01

VALUES

1	-.17600
2	-.56000
3	.06400
4	.40000
5	.09600
6	-.10000
7	-.06400

-1.000
 .+++++
 .000
 YXXX
 XXXXXXXX
 XXX
 YXX
 YXXXXX
 YXX
 YXXX
 YXX
 1.000
 .+++++

= (1+.501) (1+.502) (1+.504)

GRAPH OF .50 .50 -.50
GRAPH INTERVAL IS .4000-01

VALUES

1	-.49600
2	-.24000
3	.06400
4	-.40000
5	-.24000
6	-.10000
7	-.06400

-1.000
 .+++++
 .000
 XXXXXXXX
 YXXXXX
 YXX
 XXX
 XXXXXXXX
 XXXXXXXX
 XXX
 XXX
 1.000
 .+++++

= (1+.501) (1+.502) (1+.504)

GRAPH OF .50 .50 .50
GRAPH INTERVAL IS .4000-01

VALUES

1	-.62400
2	-.56000
3	-.30400
4	.40000
5	.24000
6	.16000
7	-.06400

-1.000
 .+++++
 .000
 YXXXXX
 XXXXXXXX
 XXXXXXXX
 XXXXXXXX
 XXXXXXXX
 XXXXXXXX
 XXX
 XXX
 1.000
 .+++++

3.43

=(1+.5B4)(1-.5B1+.5B2)

GRAPH OF .50 .50 -.50
GRAPH INTERVAL IS .4000-01

VALUES
-.16667
-.20000
.06667
-.40000
.06667
.13333

-1.000
+++++
XXXXX
XXXXX
XXXXX
XXXXX
XXXXX

VALUES

-.16667
-.46667
-.06667
.40000
-.06667
-.13333

-1.000
+++++
XXXXX
XXXXXXXXXXXXX
XXX
XXX
XXXXX
XXXXX

2

3.43

=(1+.5B4)(1-.5B1-.5B2)

GRAPH OF .50 -.50 -.50
GRAPH INTERVAL IS .4000-01

VALUES
-.16667
-.46667
-.06667
.40000
-.06667
-.13333

-1.000
+++++
XXXXX
XXXXXXXXXXXXX
XXX
XXX
XXXXX
XXXXX

=(1-.5B4)(1-.5B1+.5B2)

GRAPH OF -.50 -.50 .50
GRAPH INTERVAL IS .4000-01

VALUES
-.50000
.20000
.20000
-.40000
.20000
-.13333

-1.000
+++++
XXXXXXXXXXXXX
XXXXX
XXXXX
XXXXXXXXXXXXX
XXXXX
XXXXX

VALUES

-.50000
.46667
-.20000
.40000
-.20000
-.13333

-1.000
+++++
XXXXXXXXXXXXX
XXXXXXXXXXXXX
XXXXX
XXXXXXXXXXXXX
XXXXX
XXXXX

4

=(1-.5B4)(1+.5B1-.5B2)

GRAPH OF -.50 .50 -.50
GRAPH INTERVAL IS .4000-01

VALUES
.16667
-.20000
-.06667
-.40000
-.06667
.13333

-1.000
+++++
XXXXX
XXXXX
XXX
XXXXXXXXXXXXX
XXX
XXXXX

VALUES

.16667
-.46667
.06667
.40000
.06667
-.13333

-1.000
+++++
XXXXX
XXXXXXXXXXXXX
XXX
XXXXXXXXXXXXX
XXX
XXXXX

=(1+.5B4)(1+.5B1+.5B2)

GRAPH OF .50 .50 .50
GRAPH INTERVAL IS .4000-01

VALUES
.50000
.20000
-.20000
-.40000
-.20000
-.13333

-1.000
+++++
XXXXXXXXXXXXX
XXXXX
XXXXX
XXXXXXXXXXXXX
XXXXX
XXXXX

VALUES

.50000
.46667
.20000
.40000
.20000
.13333

-1.000
+++++
XXXXX
XXXXXXXXXXXXX
XXXXXXXXXXXXX
XXXXXXXXXXXXX
XXXXX
XXXXX

8

5

6

9

3 2 2

=(1+.501)(1-.503+.504)

GRAPH OF .50 -.50 -.50

GRAPH INTERVAL IS .4000-01

VALUES

1	.50000
2	-.05862
3	-.41176
4	-.41176
5	-.11765

1.000

XXXXXXXXXX

XXXXXX

XXXXXXXXXX

XXXXXXXXXX

XXXX

=(1+.501)(1-.503+.504)

GRAPH OF .50 -.50 .50

GRAPH INTERVAL IS .4000-01

VALUES

1	.50000
2	-.05862
3	-.41176
4	-.41176
5	-.11765

1.000

XXXXXXXXXX

XXXXXX

XXXXXXXXXX

XXXXXXXXXX

XXXX

=(1+.501)(1-.503+.504)

GRAPH OF .50 -.50 .50

GRAPH INTERVAL IS .4000-01

VALUES

1	.50000
2	-.05862
3	-.41176
4	-.41176
5	-.11765

1.000

XXXXXXXXXX

XXXXXX

XXXXXXXXXX

XXXXXXXXXX

XXXX

3 2 2

=(1+.501)(1-.503+.504)

GRAPH OF .50 -.50 -.50

GRAPH INTERVAL IS .4000-01

VALUES

1	.50000
2	-.05862
3	-.41176
4	-.41176
5	-.11765

1.000

XXXXXXXXXX

XXXXXX

XXXXXXXXXX

XXXXXXXXXX

XXXX

=(1+.501)(1-.503+.504)

GRAPH OF .50 -.50 .50

GRAPH INTERVAL IS .4000-01

VALUES

1	.50000
2	-.05862
3	-.41176
4	-.41176
5	-.11765

1.000

XXXXXXXXXX

XXXXXX

XXXXXXXXXX

XXXXXXXXXX

XXXX

=(1+.501)(1-.503+.504)

GRAPH OF .50 -.50 .50

GRAPH INTERVAL IS .4000-01

VALUES

1	.50000
2	-.05862
3	-.41176
4	-.41176
5	-.11765

1.000

XXXXXXXXXX

XXXXXX

XXXXXXXXXX

XXXXXXXXXX

XXXX

3.2.6

=(1+.504)(1-.501-.504)
 GRAPH OF .50 -.50 -.50
 GRAPH INTERVAL IS .4000-01

VALUES
 -1.000
 .000
 .36364
 .00000
 .04545
 .09091
 .13636
 .18182
 .22727
 .27273
 .31818
 .36364
 .40909
 .45455
 .50000
 .54545
 .59091
 .63636
 .68182
 .72727
 .77273
 .81818
 .86364
 .90909
 .95455
 1.000

=(1+.504)(1-.501+.504)
 GRAPH OF .50 -.50 .50
 GRAPH INTERVAL IS .4000-01

VALUES
 -1.000
 .000
 .31579
 .00000
 -.23684
 .57195
 -.10526
 .00000
 -.05263
 .10526

=(1+.504)(1+.501-.504)
 GRAPH OF .50 .50 -.50
 GRAPH INTERVAL IS .4000-01

VALUES
 -1.000
 .000
 .36364
 .00000
 -.04545
 .09091
 .13636
 .18182
 .22727
 .27273
 .31818
 .36364
 .40909
 .45455
 .50000
 .54545
 .59091
 .63636
 .68182
 .72727
 .77273
 .81818
 .86364
 .90909
 .95455
 1.000

=(1+.504)(1+.501+.504)
 GRAPH OF .50 .50 .50
 GRAPH INTERVAL IS .4000-01

VALUES
 -1.000
 .000
 .31579
 .00000
 .23684
 .57195
 .10526
 .00000
 .05263
 .10526

3.2.6

=(1-.504)(1-.501-.504)
 GRAPH OF -.50 -.50 -.50
 GRAPH INTERVAL IS .4000-01

VALUES
 -1.000
 .000
 .31579
 .00000
 .04545
 .09091
 .13636
 .18182
 .22727
 .27273
 .31818
 .36364
 .40909
 .45455
 .50000
 .54545
 .59091
 .63636
 .68182
 .72727
 .77273
 .81818
 .86364
 .90909
 .95455
 1.000

=(1-.504)(1-.501+.504)
 GRAPH OF -.50 -.50 .50
 GRAPH INTERVAL IS .4000-01

VALUES
 -1.000
 .000
 .36364
 .00000
 -.04545
 .09091
 .13636
 .18182
 .22727
 .27273
 .31818
 .36364
 .40909
 .45455
 .50000
 .54545
 .59091
 .63636
 .68182
 .72727
 .77273
 .81818
 .86364
 .90909
 .95455
 1.000

=(1-.504)(1+.501-.504)
 GRAPH OF -.50 .50 -.50
 GRAPH INTERVAL IS .4000-01

VALUES
 -1.000
 .000
 .31579
 .00000
 -.23684
 .57195
 -.10526
 .00000
 -.05263
 .10526

=(1-.504)(1+.501+.504)
 GRAPH OF -.50 .50 .50
 GRAPH INTERVAL IS .4000-01

VALUES
 -1.000
 .000
 .36364
 .00000
 .04545
 .09091
 .13636
 .18182
 .22727
 .27273
 .31818
 .36364
 .40909
 .45455
 .50000
 .54545
 .59091
 .63636
 .68182
 .72727
 .77273
 .81818
 .86364
 .90909
 .95455
 1.000

3 2 7

=(1+.501-.509+.508)

GRAPH OF .50 -.50 -.50
GRAPH INTERVAL IS .4000-01

VALUES

1	.20571	.000	1.000
2	.00000	X	XXXXXXXXXX
3	-.14286	XXXXX	X
4	-.14286	XXXXX	XXXXX
5	.00000	X	X
6	.00000	X	X
7	-.14286	XXXXX	XXXXX
8	-.20571	XXXXXXXXX	XXXXXXXXXX

=(1+.501-.509+.508)

GRAPH OF .50 -.50 .50
GRAPH INTERVAL IS .4000-01

VALUES

1	.20571	.000	1.000
2	.00000	X	XXXXXXXXXX
3	-.14286	XXXXX	X
4	-.42857	XXXXXXXXXXXXX	XXXXX
5	.00000	X	X
6	.00000	X	X
7	-.14286	XXXXX	XXXXX
8	.20571	XXXXXXXXX	XXXXXXXXXX

=(1+.501+.509-.508)

GRAPH OF .50 .50 -.50
GRAPH INTERVAL IS .4000-01

VALUES

1	.20571	.000	1.000
2	.00000	X	XXXXXXXXXX
3	.14286	XXXXX	X
4	.14286	XXXXX	XXXXX
5	.00000	X	X
6	.00000	X	X
7	-.14286	XXXXX	XXXXX
8	-.20571	XXXXXXXXX	XXXXXXXXXX

=(1+.501+.509+.508)

GRAPH OF .50 .50 .50
GRAPH INTERVAL IS .4000-01

VALUES

1	.20571	.000	1.000
2	.00000	X	XXXXXXXXXX
3	.14286	XXXXX	X
4	.42857	XXXXXXXXXXXXX	XXXXX
5	.00000	X	X
6	.00000	X	X
7	-.14286	XXXXX	XXXXX
8	.20571	XXXXXXXXX	XXXXXXXXXX

3 2 7

=(1+.501-.509-.508)

GRAPH OF -.50 -.50 -.50
GRAPH INTERVAL IS .4000-01

VALUES

1	-.20571	.000	1.000
2	.00000	X	XXXXXXXXXX
3	.14286	XXXXX	X
4	-.14286	XXXXX	XXXXX
5	.00000	X	X
6	.00000	X	X
7	.14286	XXXXX	XXXXX
8	-.20571	XXXXXXXXX	XXXXXXXXXX

=(1+.501-.509+.508)

GRAPH OF -.50 -.50 .50
GRAPH INTERVAL IS .4000-01

VALUES

1	-.20571	.000	1.000
2	.00000	X	XXXXXXXXXX
3	.14286	XXXXX	X
4	-.42857	XXXXXXXXXXXXX	XXXXX
5	.00000	X	X
6	.00000	X	X
7	-.14286	XXXXX	XXXXX
8	.20571	XXXXXXXXX	XXXXXXXXXX

=(1-.501+.509-.508)

GRAPH OF -.50 .50 -.50
GRAPH INTERVAL IS .4000-01

VALUES

1	-.20571	.000	1.000
2	.00000	X	XXXXXXXXXX
3	-.14286	XXXXX	X
4	.14286	XXXXX	XXXXX
5	.00000	X	X
6	.00000	X	X
7	.14286	XXXXX	XXXXX
8	-.20571	XXXXXXXXX	XXXXXXXXXX

=(1-.501+.509+.508)

GRAPH OF -.50 .50 .50
GRAPH INTERVAL IS .4000-01

VALUES

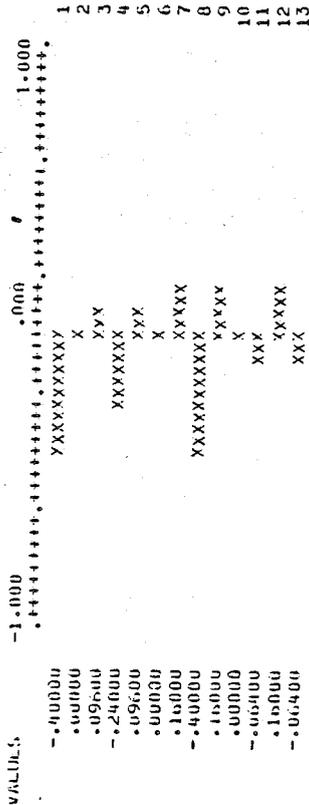
1	-.20571	.000	1.000
2	.00000	X	XXXXXXXXXX
3	-.14286	XXXXX	X
4	.42857	XXXXXXXXXXXXX	XXXXX
5	.00000	X	X
6	.00000	X	X
7	.14286	XXXXX	XXXXX
8	-.20571	XXXXXXXXX	XXXXXXXXXX

3 2 f

= (1-.501) (1+.504) (1-.500)

GRAPH OF -.50 -.50

GRAPH INTERVAL IS .4000-01

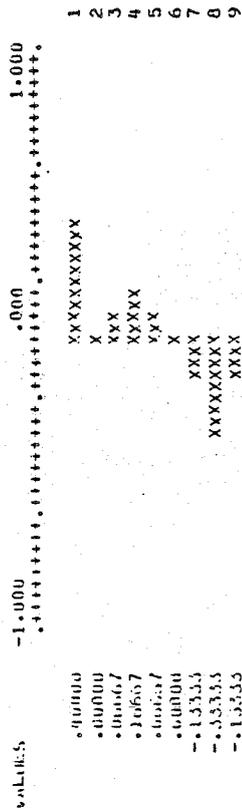


3 2 f

= (1+.501) (1+.504) (1+.500)

GRAPH OF .50 .50

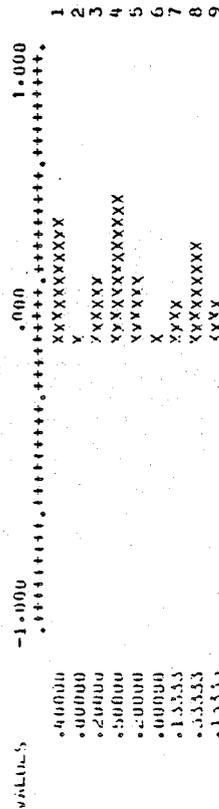
GRAPH INTERVAL IS .4000-01



= (1+.501) (1+.504) (1+.500)

GRAPH OF .50 .50

GRAPH INTERVAL IS .4000-01

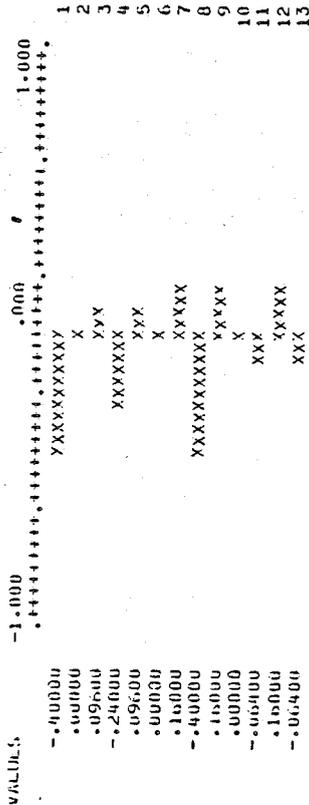


3 2 f

= (1-.501) (1-.504) (1-.500)

GRAPH OF -.50 -.50

GRAPH INTERVAL IS .4000-01

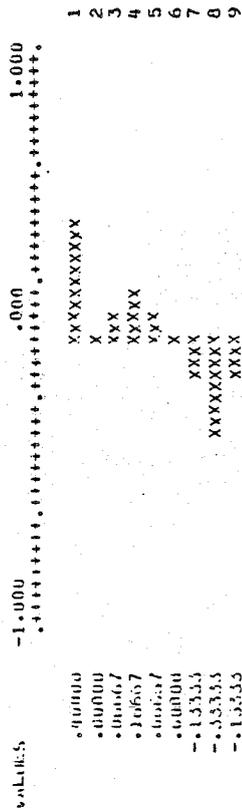


3 2 f

= (1+.501) (1+.504) (1+.500)

GRAPH OF .50 .50

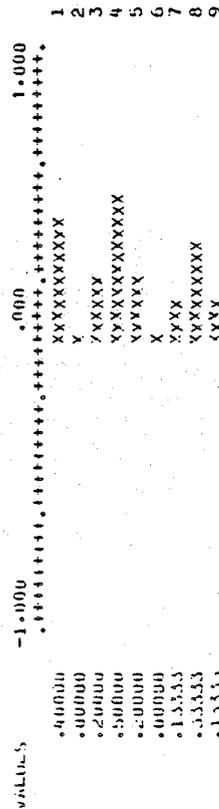
GRAPH INTERVAL IS .4000-01



= (1+.501) (1+.504) (1+.500)

GRAPH OF .50 .50

GRAPH INTERVAL IS .4000-01

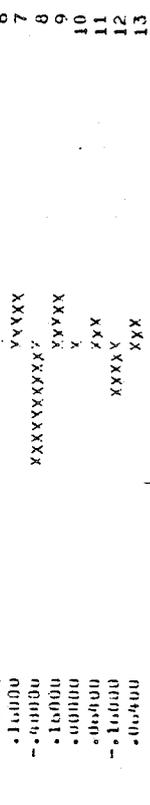


3 2 f

= (1-.501) (1-.504) (1-.500)

GRAPH OF -.50 -.50

GRAPH INTERVAL IS .4000-01



3.3.4

=(1+.5B3+.5B4+.5B5)
GRAPH OF .50 -.50 -.50
GRAPH INTERVAL IS .4000-01

VALUES
-1.000
X
.00000
-1.14286
.28571
-2.28571
X
XXXXXX
XXXXXXX
XXXXXXX
1.000

=(1-.5B3-.5B4-.5B5)
GRAPH OF -.50 -.50 -.50
GRAPH INTERVAL IS .4000-01

VALUES
-1.000
X
.000
XXXXXX
XXXXXX
XXXXXXX
XXXXXXX
XXXXXXX
1.000

=(1+.5B3+.5B4+.5B5)
GRAPH OF .50 -.50 .50
GRAPH INTERVAL IS .4000-01

VALUES
-1.000
X
.000
XXXXXX
XXXXXX
XXXXXXX
XXXXXXX
1.000

=(1-.5B3-.5B4-.5B5)
GRAPH OF -.50 -.50 .50
GRAPH INTERVAL IS .4000-01

VALUES
-1.000
X
.000
XXXXXX
XXXXXX
XXXXXXX
XXXXXXX
XXXXXXX
1.000

=(1+.5B3+.5B4+.5B5)
GRAPH OF .50 .50 -.50
GRAPH INTERVAL IS .4000-01

VALUES
-1.000
X
.000
XXXXXX
XXXXXX
XXXXXXX
XXXXXXX
1.000

=(1-.5B3-.5B4-.5B5)
GRAPH OF -.50 .50 -.50
GRAPH INTERVAL IS .4000-01

VALUES
-1.000
X
.000
XXXXXX
XXXXXX
XXXXXXX
XXXXXXX
XXXXXXX
1.000

=(1+.5B3+.5B4+.5B5)
GRAPH OF .50 .50 .50
GRAPH INTERVAL IS .4000-01

VALUES
-1.000
X
.000
XXXXXX
XXXXXX
XXXXXXX
XXXXXXX
1.000

=(1-.5B3-.5B4-.5B5)
GRAPH OF -.50 .50 .50
GRAPH INTERVAL IS .4000-01

VALUES
-1.000
X
.000
XXXXXX
XXXXXX
XXXXXXX
XXXXXXX
XXXXXXX
1.000

=(1+.5B3+.5B4+.5B5)
GRAPH OF .50 .50 .50
GRAPH INTERVAL IS .4000-01

VALUES
-1.000
X
.000
XXXXXX
XXXXXX
XXXXXXX
XXXXXXX
1.000

=(1-.5B3-.5B4-.5B5)
GRAPH OF -.50 .50 .50
GRAPH INTERVAL IS .4000-01

VALUES
-1.000
X
.000
XXXXXX
XXXXXX
XXXXXXX
XXXXXXX
XXXXXXX
1.000

=(1+.5B3+.5B4+.5B5)
GRAPH OF .50 .50 .50
GRAPH INTERVAL IS .4000-01

VALUES
-1.000
X
.000
XXXXXX
XXXXXX
XXXXXXX
XXXXXXX
1.000

=(1-.5B3-.5B4-.5B5)
GRAPH OF -.50 .50 .50
GRAPH INTERVAL IS .4000-01

VALUES
-1.000
X
.000
XXXXXX
XXXXXX
XXXXXXX
XXXXXXX
XXXXXXX
1.000


```

313
=(1+.583)(1-.584+.585)
GRAPH OF .50 -.50 -.50
GRAPH INTERVAL IS .4000-01
-1.000 .000 1.000
.+++++ .+++++ .+++++
VALUES
.03333
-.06667
.40000
XXXXXXX
-.26667
-.33333
.00000
-.13333
-.13333
1
2
3
4
5
6
7
8

```

```

=(1+.583)(1-.584+.585)
GRAPH OF .50 -.50 .50
GRAPH INTERVAL IS .4000-01
-1.000 .000 1.000
.+++++ .+++++ .+++++
VALUES
-.30000
.06667
.40000
-.40000
.33333
.00000
-.13333
.13333
1
2
3
4
5
6
7
8

```

```

=(1+.583)(1+.584+.585)
GRAPH OF .50 .50 -.50
GRAPH INTERVAL IS .4000-01
-1.000 .000 1.000
.+++++ .+++++ .+++++
VALUES
-.03333
-.20000
.40000
.26667
-.33333
.00000
.13333
-.13333
1
2
3
4
5
6
7
8

```

```

=(1+.583)(1+.584+.585)
GRAPH OF .50 .50 .50
GRAPH INTERVAL IS .4000-01
-1.000 .000 1.000
.+++++ .+++++ .+++++
VALUES
.30000
.20000
.40000
.40000
.33333
.00000
.13333
.13333
1
2
3
4
5
6
7
8

```

```

313
=(1-.583)(1-.584+.585)
GRAPH OF -.50 -.50 -.50
GRAPH INTERVAL IS .4000-01
-1.000 .000 1.000
.+++++ .+++++ .+++++
VALUES
.30000
.06667
-.40000
-.40000
-.33333
.00000
.13333
.13333
1
2
3
4
5
6
7
8

```

```

=(1-.583)(1-.584+.585)
GRAPH OF -.50 -.50 .50
GRAPH INTERVAL IS .4000-01
-1.000 .000 1.000
.+++++ .+++++ .+++++
VALUES
-.03333
-.06667
.40000
-.40000
.33333
.00000
.13333
-.13333
1
2
3
4
5
6
7
8

```

```

=(1-.583)(1+.584+.585)
GRAPH OF -.50 .50 -.50
GRAPH INTERVAL IS .4000-01
-1.000 .000 1.000
.+++++ .+++++ .+++++
VALUES
-.30000
.20000
-.40000
.40000
-.33333
.00000
-.13333
.13333
1
2
3
4
5
6
7
8

```

```

=(1-.583)(1+.584+.585)
GRAPH OF -.50 .50 .50
GRAPH INTERVAL IS .4000-01
-1.000 .000 1.000
.+++++ .+++++ .+++++
VALUES
.03333
-.20000
-.40000
.26667
.33333
.00000
-.13333
-.13333
1
2
3
4
5
6
7
8

```


3 3 6

=(1+.5B3+.5B4+.5B8)

GRAPH OF -.50 -.50 -.50
GRAPH INTERVAL IS .4000-01

VALUES	-1.000	.000	1.000
	.14286	XXXXXX	+++++
	.00000	X	
	-.28571	XXXXXXXXXX	
	-.14286	XXXXX	
	.14286	XXXXX	
	.00000	X	
	.00000	X	
	-.28571	XXXXXXXXXX	

=(1+.5B3+.5B4+.5B8)

GRAPH OF -.50 -.50 -.50
GRAPH INTERVAL IS .4000-01

VALUES	-1.000	.000	1.000
	.14286	XXXXXX	+++++
	.00000	X	
	-.28571	XXXXXXXXXX	
	-.42857	XXXXXXXXXX	
	-.14286	XXXXX	
	.00000	X	
	.00000	X	
	.28571	XXXXXXXXXX	

=(1+.5B3+.5B4+.5B8)

GRAPH OF -.50 -.50 -.50
GRAPH INTERVAL IS .4000-01

VALUES	-1.000	.000	1.000
	.14286	XXXXXX	+++++
	.00000	X	
	-.28571	XXXXXXXXXX	
	.14286	XXXXX	
	.14286	XXXXX	
	.00000	X	
	.00000	X	
	-.28571	XXXXXXXXXX	

=(1+.5B3+.5B4+.5B8)

GRAPH OF -.50 -.50 -.50
GRAPH INTERVAL IS .4000-01

VALUES	-1.000	.000	1.000
	.14286	XXXXXX	+++++
	.00000	X	
	-.28571	XXXXXXXXXX	
	.42857	XXXXXXXXXX	
	-.14286	XXXXX	
	.00000	X	
	.00000	X	
	.28571	XXXXXXXXXX	

GRAPH OF .50 -.50 -.50
GRAPH INTERVAL IS .4000-01

VALUES	-1.000	.000	1.000
	.14286	XXXXXX	+++++
	.00000	X	
	.28571	XXXXXXXXXX	
	-.14286	XXXXX	
	-.14286	XXXXX	
	.00000	X	
	.00000	X	
	-.28571	XXXXXXXXXX	

=(1+.5B3+.5B4+.5B8)

GRAPH OF .50 -.50 .50
GRAPH INTERVAL IS .4000-01

VALUES	-1.000	.000	1.000
	.14286	XXXXXX	+++++
	.00000	X	
	.28571	XXXXXXXXXX	
	-.42857	XXXXXXXXXX	
	.14286	XXXXX	
	.00000	X	
	.00000	X	
	.28571	XXXXXXXXXX	

=(1+.5B3+.5B4+.5B8)

GRAPH OF .50 .50 -.50
GRAPH INTERVAL IS .4000-01

VALUES	-1.000	.000	1.000
	.14286	XXXXXX	+++++
	.00000	X	
	.28571	XXXXXXXXXX	
	.14286	XXXXX	
	-.14286	XXXXX	
	.00000	X	
	.00000	X	
	-.28571	XXXXXXXXXX	

=(1+.5B3+.5B4+.5B8)

GRAPH OF .50 .50 .50
GRAPH INTERVAL IS .4000-01

VALUES	-1.000	.000	1.000
	.14286	XXXXXX	+++++
	.00000	X	
	.28571	XXXXXXXXXX	
	.42857	XXXXXXXXXX	
	.14286	XXXXX	
	.00000	X	
	.00000	X	
	.28571	XXXXXXXXXX	

```

333
=(1-.5B3)(1+.5B4+.5B8)
GRAPH OF -.50 .50 .50 .50
GRAPH INTERVAL IS .4000-01
VALUES
-1.000 .000
.+++++ .+++++ .+++++ .+++++ .+++++ .+++++ .+++++ .+++++ .+++++ .+++++ .+++++
1 XXXXX X 1.000
2 XXXXXXXXXXXX X
3 XXXXXXXXXXXX X
4 XXXXXXXXXXXX X
5 XXXX X
6 XXXX X
7 XXXXXX X
8 XXXXXXXXXXXX X
9 XXXX X
10 XXXX X
11 XXXX X

```

```

113
=(1-.5B3)(1-.5B4-.5B8)
GRAPH OF -.50 -.50 -.50 -.50
GRAPH INTERVAL IS .4000-01
VALUES
.06667 .000
.00000 X
-.40000 XXXXXXXXXXXX
-.16667 XXXX
.13333 X
.00000 X
.06667 XXX
-.33333 XXXXXXXXXXXX
.00000 X
.00000 X
.13333 XXXX

```

```

=(1+.5B3)(1-.5B4+.5B8)
GRAPH OF .50 -.50 -.50
GRAPH INTERVAL IS .4000-01
VALUES
-.06667 .000
.00000 XXX
.40000 X
-.16667 XXXXXXXXXXXX
-.13333 XXXX
.00000 X
-.06667 XXX
-.33333 XXXXXXXXXXXX
.00000 X
.00000 X
-.13333 XXXX

```

```

=(1+.5B3)(1+.5B4+.5B8)
GRAPH OF -.50 .50 -.50
GRAPH INTERVAL IS .4000-01
VALUES
.20000 .000
.00000 X
-.40000 XXXXXXXXXXXX
-.50000 XXXXXXXXXXXX
-.13333 XXXX
.00000 X
.20000 XXX
.33333 XXXXXXXXXXXX
.00000 X
.00000 X
-.13333 XXXX

```

```

=(1+.5B3)(1-.5B4+.5B8)
GRAPH OF .50 -.50 .50
GRAPH INTERVAL IS .4000-01
VALUES
-1.000 .000
.+++++ .+++++ .+++++ .+++++ .+++++ .+++++ .+++++ .+++++ .+++++ .+++++ .+++++
1 XXXXX X 1.000
2 XXXX X
3 XXXXXXXXXXXX X
4 XXXXXXXXXXXX X
5 XXXX X
6 XXXX X
7 XXXXXX X
8 XXXXXXXXXXXX X
9 XXXX X
10 XXXX X
11 XXXX X

```

```

=(1-.5B3)(1-.5B4-.5B8)
GRAPH OF -.50 .50 -.50
GRAPH INTERVAL IS .4000-01
VALUES
-.06667 .000
.00000 XXX
.40000 X
.16667 XXXXXXXXXXXX
.13333 XXXX
.00000 X
-.06667 XXX
-.33333 XXXXXXXXXXXX
.00000 X
.00000 X
.13333 XXXX

```

```

3 3 3      = (1-.503)(1+.504)(1-.508)
          GRAPH OF  -.50  -.50  -.50
          -1.000      .000
          .+++++++
          VALUES
          .09600
          .00000
          -.40000
          -.24000
          .16000
          .00000
          .09600
          -.40000
          -.06400
          .00000
          .16000
          .16000
          .00000
          .00000
          -.06400
          1
          2
          3
          4
          5
          6
          7
          8
          9
          10
          11
          12
          13
          14
          15
          1.000
          .+++++++
  
```

```

          = (1-.503)(1+.504)(1+.508)
          GRAPH OF  -.50  -.50  .50
          -1.000      .000
          .+++++++
          VALUES
          .22400
          .00000
          -.40000
          -.56000
          -.16000
          .00000
          .22400
          .40000
          .06400
          .00000
          -.16000
          -.16000
          .00000
          .00000
          .06400
          1
          2
          3
          4
          5
          6
          7
          8
          9
          10
          11
          12
          13
          14
          15
          1.000
          .+++++++
  
```

```

          = (1-.503)(1+.504)(1-.508)
          GRAPH OF  -.50  .50  -.50
          -1.000      .000
          .+++++++
          VALUES
          -.09600
          .00000
          -.40000
          .24000
          .16000
          .00000
          -.09600
          -.40000
          .06400
          .00000
          .16000
          -.16000
          .00000
          .00000
          .06400
          1
          2
          3
          4
          5
          6
          7
          8
          9
          10
          11
          12
          13
          14
          15
          1.000
          .+++++++
  
```

```

3 3 3      = (1+.503)(1+.504+.508)
          GRAPH OF  .50  .50  -.50
          GRAPH INTERVAL IS .4000-01
          -1.000      .000
          .+++++++
          VALUES
          .06667.
          .00000
          .40000
          .16667
          -.13333
          .00000
          .06667
          -.33333
          .00000
          .00000
          -.13333
          1
          2
          3
          4
          5
          6
          7
          8
          9
          10
          11
          1.000
          .+++++++
  
```

```

          = (1+.503)(1+.504+.508)
          GRAPH OF  .50  .50  .50
          GRAPH INTERVAL IS .4000-01
          -1.000      .000
          .+++++++
          VALUES
          .20000
          .00000
          .40000
          .50000
          .13333
          .00000
          .20000
          .33333
          .00000
          .00000
          .13333
          1
          2
          3
          4
          5
          6
          7
          8
          9
          10
          11
          1.000
          .+++++++
  
```

```

          = (1+.503)(1+.504+.508)
          GRAPH OF  .50  .50  .50
          GRAPH INTERVAL IS .4000-01
          -1.000      .000
          .+++++++
          VALUES
          .20000
          .00000
          .40000
          .50000
          .13333
          .00000
          .20000
          .33333
          .00000
          .00000
          .13333
          1
          2
          3
          4
          5
          6
          7
          8
          9
          10
          11
          1.000
          .+++++++
  
```


3 1 4

= (1+.5B2+.5B4+.5B5)

GRAPH OF .50 -.50 -.50

GRAPH INTERVAL IS .4000-01

VALUES
-1.000
.+++++
.000
XXXXX
XXXXX
XXXXX
XXXXXXX
XXXXXXX
XXXXXXX

1
2
3
4
5

= (1+.5B2+.5B4+.5B5)

GRAPH OF .50 -.50 .50

GRAPH INTERVAL IS .4000-01

VALUES
-1.000
.+++++
.000
XXXXX
XXXXX
XXXXX
XXXXXXX
XXXXXXX
XXXXXXX

1
2
3
4
5

= (1+.5B2+.5B4+.5B5)

GRAPH OF .50 .50 -.50

GRAPH INTERVAL IS .4000-01

VALUES
-1.000
.+++++
.000
XXXXX
XXXXX
XXXXX
XXXXXXX
XXXXXXX
XXXXXXX

1
2
3
4
5

= (1+.5B2+.5B4+.5B5)

GRAPH OF .50 .50 .50

GRAPH INTERVAL IS .4000-01

VALUES
-1.000
.+++++
.000
XXXXX
XXXXXXX
XXXXXXX
XXXXXXX
XXXXXXX
XXXXXXX

1
2
3
4
5

3 1 4

= (1-.5B2-.5B4-.5B5)

GRAPH OF -.50 -.50 -.50

GRAPH INTERVAL IS .4000-01

VALUES
-1.000
.+++++
.000
XXXXX
XXXXX
XXXXX
XXXXXXX
XXXXXXX
XXXXXXX

1
2
3
4
5

= (1-.5B2-.5B4-.5B5)

GRAPH OF -.50 -.50 .50

GRAPH INTERVAL IS .4000-01

VALUES
-1.000
.+++++
.000
XXXXX
XXXXX
XXXXX
XXXXXXX
XXXXXXX
XXXXXXX

1
2
3
4
5

= (1-.5B2+.5B4-.5B5)

GRAPH OF -.50 .50 -.50

GRAPH INTERVAL IS .4000-01

VALUES
-1.000
.+++++
.000
XXXXX
XXXXXXX
XXXXX
XXXXXXX
XXXXXXX
XXXXXXX

1
2
3
4
5

= (1-.5B2+.5B4+.5B5)

GRAPH OF -.50 .50 .50

GRAPH INTERVAL IS .4000-01

VALUES
-1.000
.+++++
.000
XXXXX
XXXXXXX
XXXXX
XXXXXXX
XXXXXXX
XXXXXXX

1
2
3
4
5