EINE INDEXKONSTRUKTION FÜR DEN GRAD DER STOCHASTISCHEN TRANSITIVITÄT MITTELS DER THEORIE UNSCHARFER MENGEN

von

Ulrich WERNER

Forschungsbericht Nr. 99

April 1976

INHALTSVERZEICHNIS

1. Der Begriff der "modelladäquaten Indexkonstruktion"

Die folgenden Betrachtungen gehen vom bekannten Paradoxon von C o n d o r c e t aus (vgl. etwa R. BOUDON (2) S. 9 oder G. BAMBERG - A. COENENBERG (1), Kap. 8):

Eine Anzahl n von Personen gibt bezüglich dreier psychologischer Objekte (A, B, C), die etwa 3 politische Parteien oder 3 Bewerber um einen Posten sein können, verschiedene konsistente (d. h. transitive) Rangordnungsurteile ab. Person 1 beispielsweise $A > C > B$, Person 2 beispielsweise $C > A > B$. Die Aggregation aller n Urteile nach "demokratischen" Regeln kann u. U. zu einem inkonsistenten Majoritätsergebnis wie etwa $A > B$, $B > C$, $C > A$ führen. (Diese drei Ungleichungen lassen sich daher nicht wie oben bei den Personen 1 und 2 in einer Doppelungleichung vereinen.) - Die Aggregation aller n Urteile wird im folgenden als Indexkonstruktion aufgefaßt und dargestellt. Der Fall, daß sich aus n konsistenten Urteilen ein inkonsistentes aggregiert, wird im 2. Teil dieser Arbeit unter den Begriff einer Indexkonstruktion, die "nicht modelladäquat" ist, subsumiert. Dazu möchte ich zunächst den Begriff einer "modelladäquaten Indexkonstruktion" definieren. Es muß dabei betont werden, daß die hier entwickelten Gedanken nicht alle prinzipiell neu sind (vgl. etwa G. Th. GUILBAUD (3)), wesentlich ist aber die hier geübte besondere Gewichtlegung auf gewisse formale Betrachtungsaspekte und die entsprechenden Definitionen.

Gegeben seien n Tripel (x_i, y_i, z_i), $i = 1, \ldots, n$. Die Komponenten seien Elemente aus dem Kontinuum der reellen Zahlen R, also $(x_i, y_i, z_i) \in R^3$. Jedes der drei n - Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_n)$, $(z_1, \ldots, z_n)$ werde in einen eindimensionalen R^1 abgebildet ("Reduktion" des R^n in den R^1), mit anderen Worten, es werden die

Indizes $x = f(x_1, \ldots, x_n)$, $y = f(y_1, \ldots, y_n)$, $z = f(z_1, \ldots, z_n)$ (mittels jeweils derselben Funktion f) gebildet (vgl. U. WERNER (1o)).

Es sei nun eine mit dem Symbol $\circ$ bezeichnete Verknüpfung definiert und es mögen die "Individualgesetze" (das "Modell") $x_i \circ y_i = z_i$ für alle i gelten.

Definition: Die Indexkonstruktionen x, y und z aus den drei n - Tupeln der x_i, y_i und z_i heißen "modelladäquat", wenn die "Individualgesetze" auch für die Datenaggregate, also die Indizes gelten:

wenn also stets $x_i \circ y_i = z_i$ gilt,

muß bei Modelladäquatheit auch

$x \circ y = z$ gelten.

Beispiel 1: Die Verknüpfung sei die Addition; es gelte für jedes i: $x_i + y_i = z_i$. Dann ist die Indexbildung "arithmetisches Mittel" $x = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$ modelladäquat,

denn es gilt auch $\bar{x} + \bar{y} = \bar{z}$. Hingegen ist die Indexbildung "geometrisches Mittel" $x = \tilde{x} = (\prod_{i=1}^{n} x_i)^{\frac{1}{n}}$ (nur für $x_i > 0$ bzw. $x_i \in R^+$) nicht modelladäquat, denn im allgemeinen gilt $\tilde{x} + \tilde{y} \neq \tilde{z}$.

Beispiel 2: Die Verknüpfung sei die Multiplikation, die Individualgesetze lauten: $x_i \cdot y_i = z_i$. Dann ist das geometrische Mittel als Index modelladäquat (denn es gilt $\tilde{x} \cdot \tilde{y} = \tilde{z}$), das arithmetische hingegen nicht (denn im allgemeinen gilt $\bar{x} \cdot \bar{y} \neq \bar{z}$).

Beispiel 3: Das Individualgesetz sei die pythagoräische Eigenschaft $x_i^2 + y_i^2 = z_i^2$.*) Weder das arithmetische noch das geometrische Mittel ist modelladäquat, hingegen das

*) formal: $f(x_i) \circ f(y_i) = f(z_i)$

"quadratische Mittel" $x = \overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ wegen

$\overline{x^2} + \overline{y^2} = \overline{z^2}$ (dagegen gilt i. a. $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 \neq \bar{z}^2$).

Man sieht also bereits an diesen einfachsten Beispielen, daß sich verschiedene Mittelwerte (und natürlich auch andere Verteilungsparameter) durch die Forderung nach einem modelladäquaten Index für verschiedene Individualgesetze begründen lassen! Nebenbei sei bemerkt, daß infolge der Definitionsbereiche R bzw. R^+ für die zu aggregierenden Individualdaten die Verknüpfung stets eine "innere Verknüpfung" ist und auch die Indexbildung als Operation "abgeschlossen" ist.

Die Forderung der Modelladäquatheit läßt sich folgendermaßen erweitern: gilt stets $x_i \circ y_i \neq z_i$, so darf es keine n - Tupel geben, für die $x \circ y = z$ gilt.

In allgemeinster Formulierung läßt sich die Modelladäquatheit wie folgt aussprechen: gilt eine "Systemeigenschaft" für alle Tripel (x_i, y_i, z_i), so muß sie auch für das Tripel (x, y, z) gelten.

Zunächst wäre der gesamte R^{n+1} für die Indexkonstruktion, welche durch (n + 1) - Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n, x)$ dargestellt sei, zu betrachten; die Systemeigenschaft läßt aber nur einen Unterraum des R^{n+1} für die Indexkonstruktion x zu. Bei der "intuitiven" Indexkonstruktion in der Soziologie definieren sich die Unter - Punktmengen des R^{n+1} durch die Forderung soziologischer "Sachadäquatheit". Allgemeiner können oft durch eine "Sachlogik" im Sinne der deskriptiven Statistik (vgl. G. MENGES (6), Kap. 8) Begründungen gegeben werden. Die hier nur in ihren Grundgedanken definierte "Modelladäquatheit" soll im Rahmen einer größeren Arbeit untersucht werden (vgl. U. WERNER (15)).

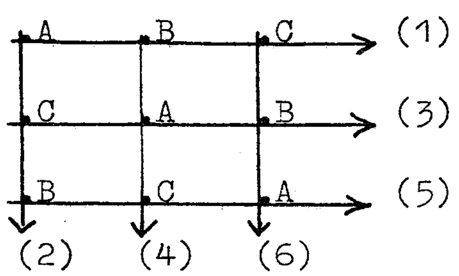
Für den C o n d o r c e t-Effekt werde ich weiter unten zeigen, daß sich mittels einer geeigneten Definition einer Funktion f sowie der x_i etc. und der x etc. das Paradoxon dadurch beschreiben läßt, daß entgegen der Forderung der Modelladäquatheit gilt:

$$f\left[f(x_i) + f(y_i)\right] \neq f\,(z_i) \quad \text{für alle } i\text{, jedoch}$$
$$f\left[f(x) + f(y)\right] = f\,(z).$$

2. Eine Darstellung des C o n d o r c e t -Effektes durch Matrizen

Die $2^3 = 8$ möglichen Rangordnungen der 3 Objekte A, B, C zerfallen in 6 transitive und 2 intransitive Strukturen (vgl. z.B. R. ZIEGLER (16), S. 72 oder U. WERNER (13)).

Ich möchte eine bislang nicht verwendete formale Darstellungsart der 6 transitiven Urteile erläutern. Die Buchstaben A, B, C werden in einem "lateinischen Quadrat" angeordnet (d. h. in jeder Zeile und in jeder Spalte kommt jeder Buchstabe nur einmal vor). Die Pfeilrichtungen in der folgenden Abbildung geben die Art der Rangordnung an, die Zahlen in Klammer die Nummer der so durchnumerierten transitiven Anordnungen. (3) bedeutet z.B.: 3. Anordnung (C > A > B), (2) = 2. Anordnung (A > C > B). Jede der Anordnungen wird daraufhin untersucht, ob A > B, ob B > C, ob C > A. Im Falle des Zutreffens wird das Zeichen + eingetragen, im Falle des Nichtzutreffens das Zeichen –. So erklären sich die beiden quadratischen Vorzeichentafeln:



	A > B	B > C	C > A
(1)	+	+	–
(3)	+	–	+
(5)	–	+	+

	(2)	(4)	(6)
A > B	+	–	–
B > C	–	+	–
C > A	–	–	+

Die Zweckmäßigkeit dieser Darstellungsart durch Erzielung einer Ordnung ergibt sich nicht nur daraus, daß im lateinischen Quadrat alle sechs Rangreihen enthalten sind und die beiden Vorzeichentafeln eine Symmetrie aufweisen, sondern vor allem daraus, daß bei zwei mit ungeraden Zahlen numerierten Rangreihen der Zeilen zwei widersprechende binäre Rangordnungen auftreten, ebenso bei zwei mit geraden Zahlen numerierten Rangordnungen der Spalten, die paarweisen Kombinationen einer ungeradzahlig mit einer geradzahlig numerierten Rangordnung ergeben jedoch nur eine widersprechende binäre Rangordnung - beispielsweise (3) und (6) weisen beide B > C, C > A auf und widersprechen einander nur in der Ordnung von (A, B). Insgesamt gibt es 9 solche Paare von Rangreihen mit nur einem "Widerspruch" (und 6 Paare von Rangreihen mit zwei Widersprüchen).

Genauer formuliert ordnen wir der Antwort der Person i ein Vorzeichen (signum) x_i wie folgt als Index zu:

$$x_i = \begin{cases} +1 = \operatorname{sgn}[B > C \mid i] \\ -1 = \operatorname{sgn}[B < C \mid i] \end{cases}$$

Weiters sei definiert: $\operatorname{sgn}[C > A \mid i] = +1 = y_i$

und $\operatorname{sgn}[A > B \mid i] = +1 = z_i$

Weitere Vorzeichen ergeben sich aus der Regel (die Anschreibung "unter der Bedingung, daß Person i die Antwort gibt" lassen wir weg):

$$\frac{\operatorname{sgn}[X > Y]}{\operatorname{sgn}[X < Y]} = -1$$

Wie die Vorzeichentafeln zeigen, gilt für den "Indexvektor" $\vec{v_i} = (x_i, y_i, z_i)$ wegen der Konsistenz stets, daß nicht alle Komponenten gleich sind; die Fälle

$$\vec{v_i} = (+1, +1, +1)$$
$$\vec{v_i} = (-1, -1, -1)$$

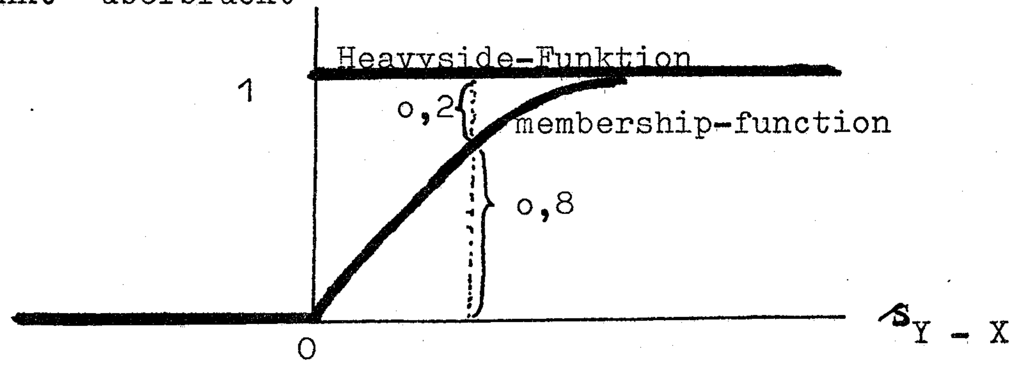
sind also beide ausgeschlossen.

Die obige Regel sgn $[X > Y] = -$ sgn $[Y < X]$ läßt sich folgendermaßen begründen: wir nehmen in einem eindimensionalen Modell an, X bzw. Y seien auf einer Intervallskala (unbekannte) Werte s_x und s_y zugeordnet. Über diese Werte können wir im Falle der Präferenz $x > y$ nur die Aussage treffen: $s_x - s_y > 0$. Nun gilt aber stets sgn$(s_x - s_y) = -$ sgn $(s_y - s_x)$. Schreiben wir sgn $[X \gtrless Y]$ = sgn $(s_x - s_Y \gtrless 0)$, so ergibt sich damit die Begründung der obigen Regel.

An dieser Stelle wird deutlich, daß wir bei einer Transformation der Signumfunktion in eine Heavyside-Funktion (sgn $[X > Y] \rightarrow$ sgn $[X > Y] = 1$,
sgn $[X < Y] \rightarrow$ sgn $[X < Y] + 1 = 0$;
X = Y ist durch die Befragungsmodalität ausgeschlossen) den nun aus den Zahlen 0 und 1 bestehenden Wertebereich als Spezialfall eines Wertebereichs auffassen können, der aus allen Zahlen im abgeschlossenen Intervall $[0, 1]$ besteht. Dies im Sinne des von Z a d e h entwickelten Begriffs der "unscharfen Menge" ("fuzzy set"). Vgl. dazu H.-J. ZIMMERMANN (17).

Man kann sich vorstellen, daß bei kleinen Werten $s_Y - s_X = \varepsilon > 0$ eine "Unschärfe" hinsichtlich des Urteils $Y > X$ besteht (die durch eine Zahl im Intervall $(0, 1)$ zum Ausdruck kommt); diese Unschärfe wird durch die Sprung-Unstetigkeitsstelle der Heavyside-Funktion im

Nullpunkt "überbrückt"



M. KOCHEN ((4), (5)) hat Experimente durchgeführt, durch welche bei Urteilen wie "5 ist größer als 2", "7 ist größer als 2" (allgemein: $X > Y$) die "membership-function" ("charakteristische Funktion") bestimmt wurde, die sich als ogiveförmig erwies. Gewisse formale Analogien der charakteristischen Funktion mit der "Itemcharakteristik" der psychologischen Testtheorie bestehen und sollen in einer weiteren Arbeit zusammengefaßt und näher untersucht werden (U. WERNER (14)). Beispielsweise haben beide Funktionen die Eigenschaft einer Verteilungsfunktion. Der Anstieg der Wendetangente ist gleich der "Trennschärfe" (des Tests). Beide Funktionen wurden bei einer Modellkonstruktion als Lösung der Differentialgleichung (contagion - equation vgl. A. RAPOPORT (7), S. 5o4) für eine logistische Funktion aufgefaßt.

In der obigen Zeichnung addieren sich Wahrheitswerte für komplementäre Ereignisse stets zu 1; $1 + 0 = 1$ bei der Heavyside-Funktion entspricht: Wahrheitswert für ($X > Y$) plus Wahrheitswert für ($X < Y$) = 1 (unter Entscheidungszwang fällt die Indifferenz $X = Y$ aus und $X > Y$ ist verhaltensmäßig, wenn auch nicht unbedingt erlebensmäßig, komplementär zu $X < Y$). Bei der Wahr~~scheinlichh~~eitswertskala von der Mächtigkeit des Kontinuums bei der Definition der "fuzzy set" ist jedoch jede dichotome Zerlegung des Intervalls $[0, 1]$, beispielsweise 0,8 + 0,2 = 1, möglich (weshalb man modellmäßig eine stetige grade-of-membership-function annehmen kann).

Nun zur Definition eines Aggregatindex (x, y, z) aus den Individualindizes (x_i, y_i, z_i), welche der Vorgangsweise von C o n d o r c e t zur demokratischen Bestimmung "der Meinung der Gesamtheit" entspricht:

Der Index für die Gesamtmeinung lautet:

$$(x, y, z) = (\operatorname{sgn} \sum_{i=1}^{n} x_i, \operatorname{sgn} \sum_{i=1}^{n} y_i, \operatorname{sgn} \sum_{i=1}^{n} z_i).$$

Da im Gegensatz zu jedem Indexvektor (x_i, y_i, z_i) bei (x, y, z) alle 8 Vorzeichenkombinationen möglich sind, ist die Operation nicht "abgeschlossen", die Indexbildung nicht "modelladäquat". (Formal genauer betrachtet, besteht hier wegen der Betrachtung der Tripel die Indexbildung in eine Reduktion eines "subspace" des R^{3n} in einen subspace des R^3).

Ausführlich geschrieben, ergibt sich:

$$\begin{aligned} x_i &= n_1 - n_2 - n_3 + n_4 + n_5 - n_6 = m_{BC} - m_{CB} \\ y_i &= -n_1 - n_2 + n_3 - n_4 + n_5 + n_6 = m_{CA} - m_{AC} \\ z_i &= n_1 + n_2 + n_3 - n_4 - n_5 - n_6 = m_{AB} - m_{BA} \end{aligned}$$

Wobei n_i = Anzahl der Personen, welche die Rangreihung (i) angeben

$$\sum_{i=1}^{6} n_i = n$$

m_{AB} = Häufigkeit, mit der bei n Urteilenden das Urteil A > B abgegeben wurde.

Wegen der Konsistenz der individuellen Rangreihungen gilt stets (wie man aus den obigen zwei quadratischen Vorzeichentafeln leicht erkennt):

$$\operatorname{sgn}\left[\operatorname{sgn} x_i + \operatorname{sgn} y_i\right] \neq \operatorname{sgn} z_i.$$

Wenn das Aggregaturteil inkonsistent ist, gilt wegen der Gleichheit der 3 Vorzeichen:

$$\operatorname{sgn}\left[\operatorname{sgn} x + \operatorname{sgn} y\right] = \operatorname{sgn} z.$$

Setzt man $\operatorname{sgn} x = f(x)$, so läßt sich also diese "Modellinadäquatheit" durch

$$\begin{cases} f\left[f(x_i) + f(y_i)\right] \neq f(z_i) & \text{für alle } i \\ f\left[f(x) + f(y)\right] = f(z) & \end{cases}$$

ausdrücken.

Es sei ein von Condorcet selbst konstruiertes Beispiel angegeben, welches die mögliche Modellinadäquatheit belegt: von $n = 60$ Personen gehören der "Partei" (2) keine Personen an; die stärkste Partei (1) erhält $n_1 = 23$ Stimmen; $n_5 = 17$, $n_3 = 10$, $n_6 = 8$, $n_4 = 2$.
Also gilt:

	$n_i\ x_i$	$n_i\ y_i$	$n_i\ z_i$
(1)	+ 23	− 23	+ 23
(2)	0	0	0
(3)	− 10	+ 10	+ 10
(4)	− 8	+ 8	− 8
(5)	+ 17	+ 17	− 17
(6)	+ 2	− 2	− 2
	$\Sigma x_i =$ + 24	$\Sigma y_i =$ + 10	$\Sigma z_i =$ + 6
	$\operatorname{sgn} \Sigma x_i =$ + 1	$\operatorname{sgn} \Sigma y_i =$ +1	$\operatorname{sgn} \Sigma z_i =$ + 1
Resultat:	$x = 1$ A > B	$y = 1$ B > C	$z = 1$ C > A

Eine Darstellung der Ergebnisse durch Matrizen ist folgendermaßen möglich:
Jeder Rangreihung (i) kann eine Matrix M_i zugeordnet werden. Beispielsweise ist:

$$M_1 = \begin{array}{c|ccc} & A & B & C \\ \hline A & 0 & 1 & 1 \\ B & 0 & 0 & 1 \\ C & 0 & 0 & 0 \end{array}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir bilden die Matrix M:

$$n_1 M_1 + n_2 M_2 + \dots + n_6 M_6 = M$$

und errechnen leicht:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & (n_1 + n_2 + n_3) & (n_1 + n_2 + n_4) \\ (n_4 + n_5 + n_6) & 0 & (n_1 + n_4 + n_5) \\ (n_3 + n_5 + n_6) & (n_2 + n_3 + n_6) & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & m_{AB} & m_{AC} \\ m_{BA} & 0 & m_{BC} \\ m_{CA} & m_{CB} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & m_{BA} + \sum z_i & m_{CA} - \sum y_i \\ m_{BA} & 0 & m_{CB} + \sum x_i \\ m_{CA} & m_{CB} & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir bilden weiters:

$$\frac{1}{n} M = \begin{pmatrix} 0 & p_{AB} & p_{AC} \\ p_{BA} & 0 & p_{BC} \\ p_{CA} & p_{CB} & 0 \end{pmatrix} = P$$

(Es gilt:

$$p_{AB} = \frac{n_1 + n_2 + n_3}{n}, \quad p_{AB} + p_{BA} = 1, \quad p_{AA} = 0, \text{ etc.})$$

Die Matrix $\frac{1}{n}$ M hat also die formalen Eigenschaften einer Paarvergleichsmatrix (U. WERNER (11), S. 9).

Es gilt: $x = \text{sgn}\,(p_{BC} - p_{CB})$, $y = \text{sgn}\,(p_{CA} - p_{AC})$,

$z = \text{sgn}\,(p_{AB} - p_{BA})$

Die Matrix $P = \frac{1}{n} M$ kann als "Verfeinerung" einer quadratischen Matrix Π mit 6 Nullen und 3 Einsen als Elementen angesehen werden (alle Anordnungen sind möglich, nur in der Hauptdiagonale dürfen keine Einser stehen), die folgendermaßen definiert ist:

$$\Pi_{XY} = \begin{cases} \text{sgn}\,(p_{XY} - p_{YX}) & \text{falls } p_{XY} - p_{YX} > 0 \\ 1+\text{sgn}\,(p_{XY} - p_{YX}) & \text{falls } p_{XY} - p_{YX} < 0 \end{cases}$$

Für das obige Beispiel eines Abstimmungsergebnisses nach C o n d o r c e t ergibt sich:

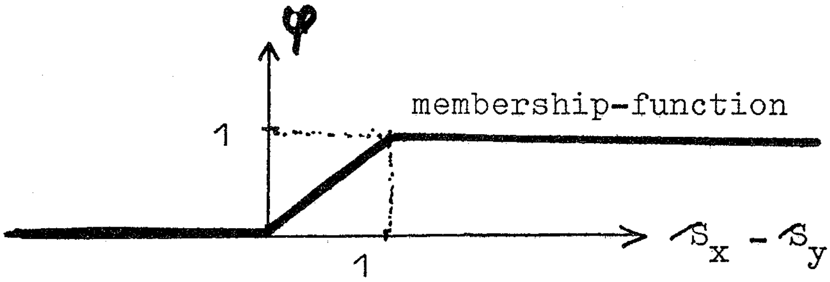
$$P = \frac{1}{n} M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{42}{60} & \frac{27}{60} \\ \frac{18}{60} & 0 & \frac{35}{60} \\ \frac{33}{60} & \frac{25}{60} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Matrix Π wäre also eine durch "Vergröberung" entstandene, zu P "benachbarte" Matrix und stellt das aggregierte Abstimmungsresultat dar. P stellt im Gegensatz zu Π "unscharfe" ("fuzzy") Urteile bezüglich der Rangordnung der 3 Objekte dar. Während jede der Matrizen M_i "scharfe" Urteile darstellt, ergibt das Datenaggregat $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{6} n_i M_i = P$ eine Unschärfe, die umso größer ist, desto geringer die Differenzen $(|p_{XY} - \pi_{XY}| - \frac{1}{2})$ sind. Es läßt sich P nicht nur als durch n Urteile von n Personen entstanden denken, sondern auch aus n Urteilen zu n verschiedenen Zeiten von einer Person zustandegekommen auffassen. P ließe sich dann zur Messung der Reliabilität des Urteils einer Person verwenden.

Die membership-function φ könnte man nun als lineare Approximation (Verteilungsfunktion der Rechtecksverteilung) wie folgt definieren:

$$\varphi = \begin{cases} p_{XY} - p_{YX} = s_X - s_Y & \text{für } 0 \leq s_X - s_Y \leq 1 \\ 0 & \text{für } s_X - s_Y < 0 \\ 1 & \text{für } s_X - s_Y > 0 \end{cases}$$



3. Ein Index für den Grad der Unschärfe bei der Rangordnung von drei Objekten.

Die Matrix P läßt sich also für den Fall, daß nicht alle ihre Elemente entweder gleich Null oder Eins sind, als Ausdruck einer "unscharf" vollzogenen Rangordnung der drei psychologischen Objekte A, B, C deuten - sei dies infolge nicht reliabler Urteile einer Person oder nicht konkordanter Urteile von n Personen. Führt man eine entsprechende experimentelle Situation ein, so lassen sich die Elemente von P auch als verschiedenste Gewißheitsgrade bei binären Rangordnungen durch eine

Person bei einem Experiment auffassen. (Eine Person hat durch Zahlen zwischen 0 und 1 den Grad ihrer Gewißheit anzugeben, daß X gegenüber Y dominiert).

Der Grad dieser Unschärfe kommt in einer "Distanz" zwischen P und Π zum Ausdruck, wobei Π die zu P "benachbarte" Matrix ist. Für die Indexkonstruktion zur (globalen) Messung dieser Unschärfe wäre die Information, welche die Elemente von P oberhalb der Hauptdiagonale liefern, genügend. Die Information weiterer Elemente ist wegen der Komplementarität $p_{xy} + p_{yx} = 1$ der "Wahrheitsgrade" ("Gewichte") redundant (dem entspricht die Definition in der Fuzzy Set Theory, daß für die Elemente der Komplementärmenge $P_{yx} = 1 - P_{xy}$ gilt).

Ein konsistentes Aggregaturteil (d.h. die Matrix Π ist gleich einer der Matrizen M_1 bis M_6) läßt sich auch durch die Eigenschaft einer "schwachen stochastischen Transitivität" der Matrix P ausdrücken:

$$P_{xy} > \frac{1}{2} \wedge P_{yx} > \frac{1}{2} \Rightarrow P_{xz} > \frac{1}{2}$$

Im Falle der stochastischen Intransitivität gilt:

$$P_{xy} > \frac{1}{2} \wedge P_{yz} > \frac{1}{2} \Rightarrow P_{xz} < \frac{1}{2}$$

und Π ist gleich einer der Matrizen

$$M_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{oder } M_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

die im Gegensatz zu den Matrizen M_1 bis M_6 dadurch charakterisiert werden können, daß jede der Zeilen- und Spaltensummen die Zahl 1 ergibt (Randvektoren $\{1, 1, 1\}$ im Gegensatz zu einer Permutation von $\{2, 1, 0\}$ bei M_1 bis M_6).

Bei der Anwendung des Begriffs "stochastische Transitivität" wurden allerdings die P_{xy} als Wahrscheinlichkeiten (einer Bevorzugung $x > y$) interpretiert, was rein formal bei relativen Häufigkeiten und großem n sinnvoll wäre, (n sei ungerade, sodaß $P_{xy} \neq \frac{1}{2}$). Bettet man die P_{xy} in Konfidenzintervalle ein, so wäre es eine (wohl noch nicht bearbeitete) Aufgabe der Inferenzstatistik, Nullhypothesen wie H_0: " Π ist von der Struktur M_1 bis M_6 " oder H_0': " Π ist von der Struktur M_7 bis M_8" zu testen und die politologisch relevante Frage zu untersuchen, wie sehr man n vergrößern müßte, um Signifikanz zu erreichen.

Bezüglich der Begriffe schwache, mittlere und starke stochastische Transitivität siehe F. RESTLE, (9) S. 87. Bezüglich eines soziologisch relevanten Beispiels zur stochastischen Intransitivität siehe U. WERNER (12) S. 6.

Nun zur Frage eines globalen Index für die Unschärfe der Matrix P (bezüglich einer einzigen binären Rangordnung mit der relativen Häufigkeit P_{xy} gilt: die Unschärfe ist umso größer, desto kleiner $\left| \frac{1}{2} - P_{xy} \right|$).

Zur Messung der Distanz zwischen Π und P und mithin des Grades der stochastischen Transitivität (bzw. Intransitivität) benötigen wir einige Begriffe aus der Theorie unscharfer Mengen (vgl. etwa L. REISINGER (8) S. 126). Sei G eine unscharfe Menge mit Elementen X etc., dann ist die "membership-function" f^{G^*} der benachbarten Menge G^* die eine "klassische" Menge ist, folgendermaßen definiert:

$$f^{G^*}(X) = \begin{cases} 0 \text{ wenn } f^G(X) < \frac{1}{2} \\ 1 \text{ wenn } f^G(X) > \frac{1}{2} \\ (0 \text{ oder } 1, \text{ wenn } f^G(X) = \frac{1}{2}) \end{cases}$$

Die "relative euklidische Distanz" zwischen zwei Mengen G und H ist definiert durch $d_1(G, H) = d_1(H, G) =$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \left[f^G(X_i) - f^H(X_i) \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Die "relative Hamming-Distanz" ist definiert durch

$$d_2(G, H) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left| f^G(X_i) - f^H(X_i) \right|$$

Durch die Normierungsfaktoren $\frac{1}{\sqrt{n}}$ bzw. $\frac{1}{n}$ ist d_1 bzw. d_2 auf das Intervall $[0, 1]$ normiert.

Wenn nun G eine unscharfe Menge und G^* die ihr benachbarte "gewöhnliche" Menge ist, so läßt sich eine globale Distanz von G zu G^* und mithin ein "Unschärfeindex" I_1 oder I_2 (je nach dem Distanzmaß) folgendermaßen definieren:

$$I_1(G) = 2\, d_1(G, G^*)$$

$$I_2(G) = 2\, d_2(G, G^*).$$

Der Normierungsfaktor 2 normiert wieder auf das Intervall $[0, 1]$.

Jede der Matrizen M_i ($i = 1, \ldots\ldots, 8$) läßt sich als Relation, nämlich als Teilmenge des Kartesischen Produkts $O \times O$ der Objektmenge $O = \{A, B, C\}$ deuten. M_1 bis M_6 stellen "strenge Ordnungsrelationen" (transitiv, asymmetrisch und antireflexiv) dar.

M_1 entspricht beispielsweise:

$R_1 = \{(A, B), (B, C), (A, C)\} \subset O \times O$

Ist $(X, Y) \in R_1$ so gilt $f^{R_1}(X, Y) = 1$

Ist $(X, Y) \notin R_1$ so gilt $f^{R_1}(X, Y) = 0.$

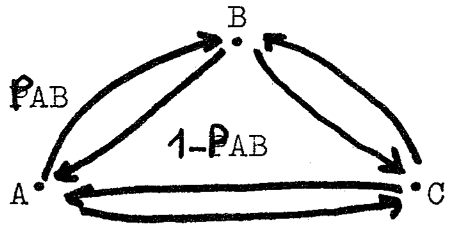
Entsprechend dem Komzept der "unscharfen Menge" kann man zum Konzept der "unscharfen Relation" (fuzzy relation) verallgemeinern:

$$R = \left\{ \left[(X,\ Y),\quad f^R\ (X,\ Y) \right] \right\}$$

Offenbar sind dann unsere Elemente $P_{xy} \in [0,\ 1]$ der Matrix $P = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{6} n_i\ M_i$

als $f^R\ (X,\ Y) = P_{xy}$ auffaßbar.

Die Matrix P kann auch als Adjazenzmatrix eines Graphen aufgefaßt werden.



Die Indizes für die Unschärfe der Rangordnung (die je nach der Struktur von Π Indizes für den Grad der stochastischen Transitivität oder Intransitivität sein können) lauten:

$$I_1\ (P) = 2\ d_1\ (P, \Pi)$$
$$I_2\ (P) = 2\ d_2\ (P, \Pi).$$

Bei festem Π ist also der Index I eine stetige Funktion der drei Variablen ρAB, ρBC und ρAC, die jedoch, damit Π fest bleibt, nur innerhalb gewisser Intervalle variieren dürfen. Jedenfalls lassen sich Grade der stochastischen Transitivität bei zwei Fällen, etwa $\Pi = M_3$ und $\Pi = M_5$ auf diese Art miteinander vergleichen.

Abschließend und am Rande sei vermerkt, daß bei unseren Fragestellungen auch der Durchschnitts- und Vereinigungsbildung bei unscharfen Mengen ein gewisser Sinn zukommen kann: Die Gruppe G aller Abstimmenden zerfalle in zwei Gruppen G' und G" (n = n' und n"). Bei diesen ergeben sich die Matrizen P' und P". Nun seien <u>nur</u> diese beiden Matrizen bekannt und nicht die Umfänge der beiden Untergruppen n' und n".

Was ist über die Matrix P bzw. über ihre Elemente P_{xy} aussagbar, nachdem wir das gewogene Mittel

$$P_{xy} = \frac{n' \, P'_{xy} + n'' \, P''_{xy}}{n' + n''}$$ nicht bilden können?

Für die membership-function von Durchschnitt und Vereinigung von G' und G" gilt bekanntlich definitionsgemäß:

$$P_{AB}^{G' \cap G''} = \min_{G} \left(P'_{AB}, P''_{AB} \right), \qquad P_{AB}^{G' \cup G''} = \max \left(P'_{AB}, P''_{AB} \right).$$

Über die PAB können wir mittels dieser Definition die Aussage~~n~~ machen, daß

$$P_{AB}^{G' \cap G''} \leq P_{AB}^{G} \leq P_{AB}^{G' \cup G''}$$

Auf diese Weise kommen wir zu Abschätzungen für alle P_{xy}^{G}, mittels deren Abschätzungen für den Grad der stochastischen Transitivität bzw. Intransitivität der Rangreihen bei der Fusionierung der Gruppen G' und G" zu G möglich sind. Dieses Abschätzungsproblem entspricht formal dem oben diskutierten Problem, das sich aus der Auffassung der P_{xy} als Punkte innerhalb von Konfidenzintervallen ergibt.

<u>Zusammenfassung</u>

Mittels des Condorcet-Effekts wird gezeigt, inwiefern sich ein Urteil auf Ordinalskalenniveau bezüglich dreier

Objekte - etwa $A > B$, $B > C$, $A > C$ - als Spezialfall für Wahrscheinlichkeiten $p(A > B) = PAB$ von Präferenzen auffassen lassen (wird immer $A > B$ geurteilt, so ist $PAB = 1$ und $PBA = 0$). Ein Index I, der die "Abweichung" von dem Fall mißt, in dem die P_{xy} stets entweder 0 oder 1 sind, wird konstruiert. Ein globaler Abweichungsindex bei (schwacher) stochastischer Transitivität ($PAB > \frac{1}{2}$, $PBC > \frac{1}{2}$, $PAC > \frac{1}{2}$) ebenso wie bei stochastischer Inttransitivität ($PAC < \frac{1}{2}$) ergibt sich durch die bekannten Definitionen der "Distanz" und der "benachbarten Menge" in der Theorie unscharfer Mengen: $I(P) = 2\,d(P, \Pi)$. Dabei ist P die 3×3 - Matrix der P_{xy}, Π die hiezu benachbarte Matrix, deren Elemente nur entweder Null oder Eins sind. Für d kann die Distanz nach Euklid oder die Hamming-Distanz genommen werden.

LITERATUR

BAMBERG, G. - COENENBERG, W.
Betriebswirtschaftliche Entscheidungslehre, München, Vahlen, 1974

BOUDON, R.
Les mathematiques en sociologie, Presses Univers. de France, 1971
Englische Übersetzung:
The Logic of Sociological Explanation, Penguin Books X 993, 1974

GUILBAUD, G. Th.
Les Théories de l'intérêt général et le problème logique de l'agrégation; Economic Appliquée, 1952

KOCHEN, M.
On the precision of adjectives which denote fuzzy sets.

KOCHEN, M.
Applications of fuzzy sets in psychology.

MENGES, G. - SKALA, H.
Statistik, Teil2, Opladen: Westdeutscher Verlag, 1973

RAPOPORT, A.
Mathematical Models of Social Interaction; in:
Luce R.D. u.a.: Handbook of Mathematical Psychology, 2. Band, 1963

REISINGER, L.
Über die Anwendungsmöglichkeiten der Theorie unscharfer Mengen im Recht; in: Datenverarbeitung im Recht, Band 4, Heft 1/2, 1975, J.Schweitzer Verlag, Berlin

RESTLE, F.
Mathematical models in psychology, Penguin Books, 1971

WERNER, U.
Bemerkungen zum Problem der Indexkonstruktion in der Soziologie I. Forschungsmemorandum des Institutes für Höhere Studien (IHS) Nr. 89, Wien, 1975

WERNER, U.
Stochastische Skalierungsmodelle, Institutsarbeit Nr. 3o des IHS, 1972

WERNER, U.
Über ein Aggregationsproblem bei Ordinalskalen. Forschungsmemorandum des IHS Nr. 95, 1975

WERNER, U.
Grundbegriffe der Soziometrie, Institutsarbeit Nr. 67 des IHS, 1975

WERNER, U.
Über einige formale Analogien der charakteristischen Funktion in der Theorie unscharfer Mengen und der Itemcharakteristik in der psycholog. Testtheorie (in Vorbereitung)

WERNER, U.
Das Problem der Indexkonstruktion in der Soziologie (in Vorbereitung)

ZIEGLER, R.
Theorie und Modell, München: Oldenbourg, 1972

ZIMMERMANN, H.-J. - RÖDDER, W.
Analyse, Beschreibung und Optimierung von unscharf formulierten Problemen. Arbeitsbericht 75/o6. Lehrstuhl f. Unternehmensforschung, RWTH Aachen.