# ÜBER EIN AGGREGATIONSPROBLEM BEI ORDINALSKALEN

von

Ulrich WERNER

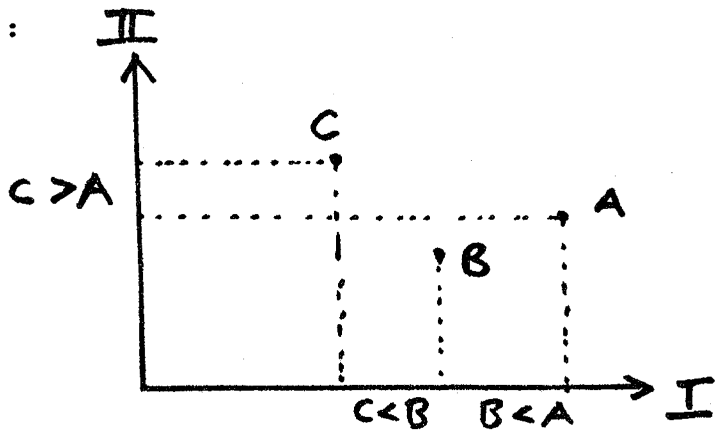
Forschungsbericht Nr.95
November 1975

Drei Objekte A, B, C seien hinsichtlich der Präferenz in eine Rangordnung zu bringen. $R_i$ sei der Rangplatz mit der Nummer i (i = 1, 2, 3).

Wir nehmen an, es werden von den 3! = 6 transitiven Anordnungsmöglichkeiten nur die 3 Strukturen $S_1$ bis $S_3$ gewählt, welche ein Muster eines "lateinischen Quadrates" bilden (die Spalten ergeben die 3 anderen von den 6 transitiven Strukturen):

| | $R_1$ | $R_2$ | $R_3$ |
|---|---|---|---|
| $S_1$ | A | B | C |
| $S_2$ | C | A | B |
| $S_3$ | B | C | A |

Von N = 15 Personen wählen $N_1 = 6$ die Struktur $S_1$ (also $A > B > C$. Diese Doppelungleichung enthält drei Ungleichungen nämlich $A > B$, $B > C$ und $A > C$), $N_2 = 5$ die Struktur $S_2$ und $N_3 = 4$ wählen $S_3$. ($N_1 + N_2 + N_3 = N$). Wollten wir nun die "Wahlergebnisse" der 15 Personen aggregieren, so ergibt sich das Paradoxon von Condorcet. (Das bekannte Arrowsche Paradoxon kann als Spezialfall dieses allgemeineren "Condorcet-Effekts" aufgefaßt werden); siehe G.Th. GUILBAUD, R. BOUDON. Der Widerspruch ergibt sich nach Condorcet dadurch, daß in Beispielen wie dem der obigen Art kein eindeutiger "Wille der Majorität" erschließbar ist, bei dem das transitive Gesetz auf einer eindimensionalen Skala (so wie bei den $S_i$) gilt. Denn $A > B$ wurde elfmal, $B > C$ zehnmal, $A > C$ hingegen nur sechsmal gewählt. Die Majorität (9 Personen) wählt $C > A$, das widerspruchsvolle Ergebnis lautet also: $A > B$, $B > C$, $C > A$. Für jede der drei Ungleichungen hat die Majorität votiert. Bei der Erklärung wird oft auf ein zweidimensionales Modell verwiesen (siehe beispielsweise A.J. AHRENS, G.H. FISCHER, U. WERNER):




Im Vergleich von A und B sowie von C und B ist nur der Faktor I ausschlaggebend, im Vergleich von C und A nur der Faktor II (bei "paarweisen Austragungen" können sich eben die Paare jeweils an verschiedenen Dimensionen "messen"). Natürlich ließe sich die obige "zirkulare Triade" auch in einem System von mehr als 2 Faktoren erklären. Es sei nun auf einfachste Weise gezeigt, daß die auf einer eindimensionalen Skala "widersprüchsvollen" Wahrscheinlichkeiten

$$p_{AB} = P(A > B) = \frac{11}{15} > \frac{1}{2},\quad p_{BC} = P(B > C) = \frac{10}{15} > \frac{1}{2} \text{ und } p_{AC} = P(A > C) = \frac{6}{15} < \frac{1}{2}$$

aber auch durch Aggregation von nur eindimensionalen Skalen $S_i$ gewonnen werden können. (Für ungerades N kann der Wert

$p_{XY} = \frac{1}{2}$ als empirische Schätzung einer Wahrscheinlichkeit durch eine relative Häufigkeit nie auftreten). Wir konstruieren hierzu ein theoretisches formales Modell.

Jede <u>einzelne</u> Person mache sich Gedanken über den vorauszusagenden Ausgang $X > Y > Z$ (Das Zeichen $>$ sei hier als Symbol für Dominanz verstanden; für X steht dann beispielsweise die Person oder die Partei, welche den 1. Platz einnehmen wird. In unserem Beispiel mit dem lateinischen Quadrat nimmt jedes Glied des Tripels (A, B, C) jeden Rangplatz genau einmal ein.) Jede einzelne Person betrachtet, aus welchem Grund immer, nur die Dominanzstrukturen $S_1$ bis $S_3$ als realistisch (analoge Beispiele, in denen auch den andern drei Strukturen positive Wahrscheinlichkeiten zukommen, ließen sich leicht konstruieren). Jeder Struktur $S_i$ sind nun Gewichte $p_i$ zugeordnet: Die Wahrscheinlichkeit der Realisation von $S_1$ sei $p_1 = \frac{6}{15}$; $p_2 = \frac{5}{15}$ und $p_3 = \frac{4}{15}$. Es gilt $\sum_{i=1}^{3} p_i = 1$. Gemäß dieser diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilung kann nun angenommen werden, daß für große N der Bruch $\frac{N_i}{N}$ gegen $p_i$ strebt, falls man voraussetzt, daß jede Person dieselbe subjektive Wahrscheinlichkeit $p_i$ für die Realisation der Struktur $S_i$ annimmt. Jede Person kann dann auch als "Wechselwähler" hinsichtlich der drei Alternativen $S_i$ aufgefaßt werden, wobei jeder Wechselwähler hinsichtlich seiner drei verschiedenen Aktionstendenzen in gleicher Weise durch die $p_i$ charakterisierbar ist. Als Beispiel betrachten wir den Fall, daß jemand sich über die Rangplätze von A, B und C bei einer sportlichen Austragung

Gedanken macht und drei Möglichkeiten $S_i$ mit den $p_i$ gewichtet. Will er nun für eine einzige Aussage diese drei gewichteten Möglichkeiten aggregieren, so könnte er dies formal durch $p_1S_1 + p_2S_2 + p_3S_3$ tun. Wir rechnen mit den $S_i$ zugeordneten Dominanzmatrizen (vgl. U. WERNER)

$$M_i = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \end{array}.$$

Wenn $A > B$, stehe in der entsprechenden Zeile eine 1, bei $A < B$ eine 0. In unserem Beispiel wäre also:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es gilt

$$p_1M_1+p_2M_2+p_3M_3 = M = \begin{pmatrix} 0 & (p_1+p_2) & p_1 \\ p_3 & 0 & (p_1+p_3) \\ (p_2+p_3) & p_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Für die Elemente $m_{ij}$ der Matrix M gilt $m_{ij}+m_{ji} = 1$ (für $i \neq j$). Es handelt sich also um eine Paarvergleichsmatrix! (vgl. U.WERNER). Beispielsweise gilt: $m_{1\,2}+m_{2\,1} = (p_1+p_2)+p_3 = 1$. Da in die endgültige Aussage einer Dominanzrelation in Form einer Doppelungleichung die Gewichte $m_{ij}$ nicht eingehen, wird eine Matrix M' konstruiert, und zwar derart, daß $m'_{ij} = 1$ wenn $m_{ij} > m_{ji}$ und $m'_{ij} = 0$ wenn $m_{ij} < m_{ji}$. In unserem Beispiel ergibt sich also aus M die Matrix M' folgendermaßen:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{11}{15} & \frac{6}{15} \\ \frac{4}{15} & 0 & \frac{10}{15} \\ \frac{9}{15} & \frac{5}{15} & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

M' entspricht aber die Dominanzstruktur $A > B$, $B > C$, $C > A$. (Ordnet man "Dominanzwahrscheinlichkeiten" zu, so müßte gelten $p_A > p_B, p_B > p_C, p_C > p_A$). Es wurde also gezeigt, daß eine Aggregation der Ordinalskalen durch eine Linearkombination der ihnen zugeordneten Matrizen zu einer nicht eindimensionalen Skala führt. Sieht man die Bildung der Linearkombination als "unbewußtes Zählen und Rechnen" (G.W. LEIBNIZ) an, so kann man obiges Modell auch als ein denkpsychologisches ansehen. Bei diesem wird es aber, um realistisch zu bleiben, nicht auf die genauen Brüche $m_{ij}$ ankommen, sondern nur auf die ordinalen Relationen wie $m_{ij} \gtrless m_{ji}$. Die nichttransitive Struktur ergibt sich ja, wenn bloß das System der drei Ungleichungen

$$p_1 + p_2 > p_3$$
$$p_2 + p_3 > p_1$$
$$p_1 + p_3 > p_2$$

also ein System von Ungleichungen zwischen Elementen $m_{ij}$, erfüllt ist.

Es sei nun gezeigt, daß Beziehungen zwischen Wahrscheinlichkeiten wie $p_{AB} > \frac{1}{2}$ $p_{BC} > \frac{1}{2}$ $p_{AC} = \frac{1}{2}$ auch die Nicht-Eindimensionalität bei der Aggregation von ordinalen Daten bei Rating-Skalen (wie bei der Likert-Skala) erweisen können.

Drei Personen A, B, C haben sich in Bezug auf n Items eines "domain" über den Zustimmungsgrad i = 1 bis 4 zu äußern.
i entspricht der Kategorie $K_i$, wobei

$K_1$ = lehne sehr ab

$K_2$ = lehne ab

$K_3$ = stimme zu

$K_4$ = stimme sehr zu

bedeuten.

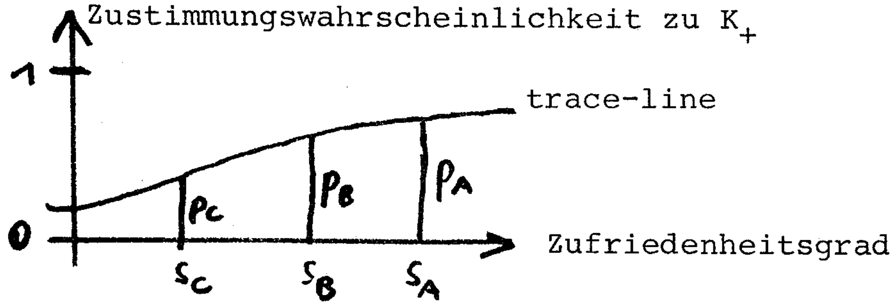
Von der Person A werde $h_{Ai}$ mal die Kategorie $K_i$ angegeben. Dann kann $\frac{h_{Ai}}{n}$ als Schätzung einer Wahrscheinlichkeit $p_{Ai}$ dafür betrachtet werden, daß Person A bei einem zufällig ausgewählten Item die Kategorie $K_i$ angibt, falls das Item der Population der n Items angehört.

Ebenso wie beim Condorcet-Effekt betrachten wir ein besonders relevantes Beispiel

| | $K_1$<br>1 | $K_2$<br>2 | $K_3$<br>3 | $K_4$<br>4 |
|---|---|---|---|---|
| A | $p_{A1} = \frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | 0 |
| B | $\frac{7}{12}$ | 0 | 0 | $\frac{5}{12}$ |
| C | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | 0 |

Wir können uns beispielsweise vorstellen, ein Parteiprogramm bestehe aus n Items, die verschiedene Feststellungen sind (z.B. über Wirtschafts- und Gesellschaftspolitik). Person A stimmt keiner Feststellung sehr zu, am häufigsten ist die Kategorie "lehne ab". Person B möge ein individuelles Antwortverhalten aufweisen, das nur extreme Antwortkategorien $K_1$ und $K_4$ zuläßt. Bei C ist wieder eine sehr starke Zustimmung ausgeschlossen, ansonsten herrscht Gleichverteilung. Dies sind psychologisch durchaus denkbare Fälle, obwohl man im allgemeinen eher unimodale Verteilungen wie bei A erwarten wird, besonders, wenn die Items sehr ähnlich sind. Das braucht aber bei dem Beispiel des Parteiprogramms etwa durchaus nicht der Fall zu sein. Allerdings könnte eine besondere Präferenz für die Partei unabhängig von der Art der Items stets $K_4$ stimmen lassen (insbesondere auch dann, wenn ein sogenannter "Halo-Effekt" vorliegt).

Um die Daten zu aggregieren, bestünde zunächst die Möglichkeit, die Ordinalskala mit den Platznummern (1 bis 4) als Intervallskala aufzufassen und Mittelwerte zu bilden: $x_A = x_C < x_B$. Oder Mediane: $m_A = m_C > m_B$. Verwendet man nur einen Lageparameter konsistent oder den Lageparameter von transformierten Daten konsistent, so können keine Widersprüche auftreten, bei vermischter Anwendung verschiedener Transformationen oder verschiedener Lageparameter hingegen schon (vgl. Th. HARDER). Die Berechnung der "durchschnittlichen Zufriedenheit" ordnet also jeder Person nur einen (Lage-)Parameter zu. Man kann aber auch mittels eines probabilistischen Modells eine Datenreduktion durchführen: Man aggregiert die vierkategoriale Auffächerung der Zustimmungsgrade auf einer "Zufriedenheitsskala", welche stetig ist und nimmt an, daß die Zufriedenheit $s_A$ von A umso größer ist, desto größer die Wahrscheinlichkeit $p_A$ ist, daß A einem Item zustimmt (Kategorie $K_+$) anstatt abzulehnen (Kategorie $K_-$ mit der Gegenwahrscheinlichkeit $1 - p_A$). Dies entspricht dem latent-trait-Modell von P.F. Lazarsfeld (wobei allerdings die monotone Funktion $p_x = f(S_x)$ zu spezifizieren wäre).




Die Dichotomisierung der Kategorie $K_1$ bis $K_4$ kann durch Zusammenfassung von $K_1$ und $K_2$ in die Kategorie $K_-$ und $K_3$ und $K_4$ in die Kategorie $K_+$ erfolgen (dann wäre $p_A = \frac{3}{12}$, $p_B = \frac{5}{12}$, $p_C = \frac{4}{12}$), es könnte aber beispielsweise auch $K_2$, $K_3$ und $K_4$ zu $K_+$ zusammengefaßt werden.

Die obige Berechnung von $p_A = \frac{3}{12}$ etwa beinhaltet einen wesentlichen Informationsverlust: ob $\frac{1}{4}$ der Kategorie $K_3$ oder $K_4$ zugeordnet ist, spielt keine Rolle. Wir entwickeln ein Verfahren, bei dem die Rangordnung der Kategorien eingeht und bei dem gezeigt wird, daß nicht in allen Fällen (z.B. in unserem obigen

Beispiel) bei Berücksichtigung der Information der vierstufigen Ordinalskala eine widerspruchsfreie Aggregation zu $p_A$, $p_B$ und $p_C$ möglich ist. Das Beispiel hat insofern praktische Bedeutung, als man oft einen allgemeinen "Zufriedenheitsskore" unterstellt: Personen sind z.B. mit ihrer Wohnung unzufrieden, weil sie überhaupt zu Unzufriedenheit neigen. Dann kommt die Größe dieses eindimensionalen Zufriedenheitsskores dadurch zum Ausdruck, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, auf eine Frage aus einem Fragenkomplex "Ja" bzw. "Nein" zu sagen.

Ist diese Vereinfachung widerspruchsfrei gerechtfertigt (die Widerspruchsfreiheit wäre nun eine notwendige, nicht aber hinreichende Bedingung für eine eindimensionale Skalierung)? Um die Rangordnung der Kategorie eingehen zu lassen, berechnen wir die Wahrscheinlichkeit $p^{*}_{AB}$, daß A eine höhere Zahl i als B angibt; $p^{*}_{BA}$ entsprechend.

$p_{AB} = \dfrac{p^{*}_{AB}}{p^{*}_{AB}+p^{*}_{BA}}$ ist dann die bedingte Wahrscheinlichkeit, daß unter der Voraussetzung der Wahl ungleicher Kategorien A eine höhere Kategorie wählt als B. Kennzeichnend für unsere Berechnungen ist, daß nur die Rangordnung der Kategorien und nicht die ihnen zugeordneten Zahlen (die ja monoton transformierbar wären) eingehen und ansonsten nur von den Grundgesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Additions-, Multiplikationssatz; bedingte Wahrscheinlichkeit) Gebrauch gemacht wird. Es gilt

$$p^{*}_{AB} = p_{A2}\, p_{B1} + p_{A3}(p_{B1}+p_{B2}) + p_{A4}\,(p_{B1}+p_{B2}+p_{B3}) =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{7}{12} + \frac{1}{4}\,\frac{7}{12} = \frac{7}{16}\,.$$

$$p^{*}_{BA} = p_{B2}\, p_{A1} + p_{B3}(p_{A1}+p_{A2}) + p_{B4}(p_{A1}+p_{A2}+p_{A3}) = \frac{5}{12}$$

Man rechnet leicht nach:

$$\sum_{i=1}^{4} p_{Ai}(1-p_{Bi}) = p^{*}_{AB} + p^{*}_{BA}\,,$$

ein von vornherein ableitbares Resultat.

Ähnlich ergeben sich:

$$p^{*}_{BC} = \frac{5}{12} \qquad p^{*}_{CB} = \frac{7}{18} \quad p^{*}_{AC} = \frac{1}{3} \qquad p^{*}_{CA} = \frac{1}{3}\,.$$

Wir errechnen

$$p_{AB} = \frac{\frac{7}{12}}{\frac{7}{16} + \frac{5}{12}} = \frac{21}{41} > \frac{1}{2}\,, \qquad p_{BC} = \frac{15}{29} > \frac{1}{2}$$

Jedoch gilt:

$$p_{AC} = \frac{1}{2} \text{ und nicht } p_{AC} > \frac{1}{2}$$

(würde man für C beispielsweise die Werte $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{7}{24}, \frac{1}{24}$ annehmen, so ergäbe sich $p_{AC} < \frac{1}{2}$).

Wir zeigen nun, daß dieses Ergebnis mit dem oben erwähnten zweikategorialen Modell unvereinbar ist. Natürlich gibt es immer mehrere Wege, um nachzuweisen, daß ein Merkmal (welches etwa durch Aggregation bzw. Datenreduktion entsteht) nicht eindimensional ist. (Mit anderen Worten: die Art des Widerspruchs bei indirekten Beweisen ist nicht eindeutig). Der nun gezeigte Weg dürfte jedoch ein spezifischer sein.

Angenommen, es gäbe die oben definierten Wahrscheinlichkeiten $p_A$, $p_B$ und $p_C$ im zweikategorialen Modell. Dann wäre die Wahrscheinlichkeit $P_{AB}$ dafür, daß A Kategorie $K_+$ wählt, B Kategorie $K_-$ unter der Voraussetzung, daß A und B verschiedene Kategorien wählen: (Daß A zufriedener ist als B (bzw. B zufriedener als A) reduziert sich im Gegensatz zum obigen Rangplatzmodell nur mehr auf die Wahl verschiedener Kategorien. An Stelle von $p_{AB}$ tritt $P_{AB}$.)

$$P_{AB} = P\left[A+ \wedge B_- \;\middle|\; (A+ \wedge B_-) \vee (A- \wedge B_+)\right] = \frac{p_A(1-p_B)}{p_A(1-p_B) + p_B(1-p_A)} =$$

$$= \frac{1}{1 + \dfrac{\dfrac{p_B}{1-p_B}}{\dfrac{p_A}{1-p_A}}} = \frac{1}{1+ \dfrac{E(\xi_{\bar{B}})}{E(\xi_{\bar{A}})}} = \frac{1}{1 + E\,(\xi_A)\; E\,(\xi_{\bar{B}})}$$

Definieren wir eine geometrisch verteilte Zufallsvariable $\xi_A$ wie folgt: $P\,(\xi_A = n) = (1-p_A)^n p_A$ , $n = 0,1,2 \ldots$ (= Wartezeit) so ist $E(\xi_A) = \frac{1-p_A}{p_A}$ der Erwartungswert der Zufallsvariablen $\xi_A$ (Wartezeit bis zum erstmaligen Eintreffen von A), entsprechend $E(\xi_{\bar{A}}) = \frac{p_A}{1-p_A}$ die durchschnittliche Wartezeit bis zum Eintreffen des Komplementärereignisses $\bar{A}$. Es ist im Zusammenhang mit bekannten Skalierungstechniken interessant, daß $P_{AB}$ eine logistische Funktion $P_{AB} = \frac{1}{1+e^z}$ mit dem Exponenten $z = \ln E(\xi_A) - \ln E(\xi_B)$

$= \ln E(\xi_{\bar{B}}) - \ln E(\xi_{\bar{A}})$

$= \ln E(\xi_A) + \ln E(\xi_{\bar{B}})$ ist.

(Zum "Erwartungswertmodell vgl. U. WERNER).

Der Exponent z kann also als Differenz von sogenannte "Logits" geschrieben werden.
Man erkennt:

$P_{AB} = \frac{1}{2}$ ist identisch mit $p_A = p_B$

$P_{AB} > \frac{1}{2}$ gilt dann und nur dann, wenn $p_B < p_A$.

Wenn also in unserem obigen Beispiel mit 4 Antwortkategorien eine Aggregierbarkeit auf irgendwie bestimmte 2 Kategorien im eindimensionalen Modell bestünde, so müßte gelten

$$P_{AB} = p_{AB} > \frac{1}{2}$$

$$P_{BC} = p_{BC} > \frac{1}{2}$$

$$P_{AC} = p_{AC} = \frac{1}{2}$$

also $p_B < p_A$, $p_C < p_B$. Mithin: $p_C < p_A$ im Widerspruch zur dritten Gleichung $p_A = p_C$.

Wäre die notwendige Bedingung $p_X \quad p_Y \quad p_Z$ erfüllt, so könnte man gemäß der Gleichung

$$p_A = \frac{e^{S_A}}{1 + e^{S_A}}$$

$p_A$ den Skalenwert $S_A = \ln \frac{p_A}{1-p_A} = \ln E(\xi_{\bar{A}})$ zuordnen.

Dann gilt

$$P_{AB} = 1 - \frac{e^z}{1+e^z} = 1 - \frac{e^{S_B-S_A}}{1+e^{S_B-S_A}} = \frac{1}{1+e^{S_B-S_A}}$$

Weiters gilt

$$P_{BA} = \frac{e^{S_B - S_A}}{1 + e^{S_B - S_A}}$$

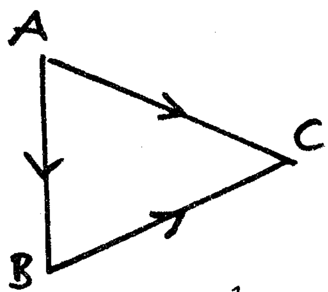
$P_{AB}$ bzw. $P_{BA}$ ist dann also eine Funktion des Abstandes $S_B - S_A$. Die Werte $S_A$, $S_B$, $S_C$ ergeben sich als 3 Unbekannte aus drei Gleichungen für $P_{AB}$, $P_{BC}$ und $P_{AC}$.

Es sei angemerkt, daß allein schon das "BTL-Modell" (vgl. G. FISCHER, S.186), welches die Strukturgleichungen

$$P_{AB} = \frac{X_A}{X_A + X_C} \qquad P_{BC} = \frac{X_B}{X_B + X_C} \qquad P_{AC} = \frac{X_A}{X_A + X_C}$$

annimmt, im Falle der "stochastischen Intransivität" ($P_{AB} > \frac{1}{2}$, $P_{BC} > \frac{1}{2}$, $P_{AC} < \frac{1}{2}$) ebenso die widerspruchsvollen Ungleichungen $X_B < X_A$, $X_C < X_B$ und $X_C > X_A$ ergäbe.

Ich möchte abschließend darauf hinweisen, daß im Falle der stochastischen Transitivität bei einem nichtrekursivem Kausalmodell




die Wahrscheinlichkeiten $P_{XY} > \frac{1}{2}$ eine Deutung durch ein verteilungsunabhängiges statistisches Verfahren finden könnten.

Angenommen, wir untersuchen das Problem des Statuszuweisungsprozesses und sei A = Beruf des Vaters, B = Schulbildung des Sohnes und C = Beruf des Sohnes (in der "klassischen"

Intergenerationenmobilitätsforschung werden nur stochastische Matrizen untersucht, welche den Zusammenhang zwischen A und C untersuchen). Wenn n Vater-Sohn-Paare untersucht werden, so können wir $\binom{n}{2}$ Paare (i,j) von Vätern bilden und feststellen, ob der Beruf (das Berufsprestige) $A_i > A_j$ oder $A_i < A_j$. Wenn nun ebenfalls $C_i > C_j$ bzw. $C_i < C_j$, so haben wir in Bezug auf die Richtung des Ungleichheitszeichens "konkordante Paare" und dabei nur ordinales Meßniveau vorausgesetzt. Sei $K_{AC}$ die Anzahl konkordanter Paare. Wenn ein "Einfluß" im Sinne des obigen Kausalpfeils besteht, wird $\frac{K_{AC}}{\binom{n}{2}} = P_{AC} > \frac{1}{2}$ gelten. Aus $\frac{K_{AC}}{\binom{n}{2}}$ können wir gemäß dem BTL-Modell einen Quotienten auf Rationalskalenniveau $\frac{X_A}{X_C} > 1$ bilden, der umso größer ist, desto größer der Einfluß von A auf C ist. Ebenso berechnen wir $\frac{X_A}{X_B}$ und $\frac{X_B}{X_C}$. Wenn es sich um eine "geschlossene Kausalkette" handelt, müßte in

$$\frac{X_A}{X_B} \cdot \frac{X_B}{X_C} = \frac{X_A}{X_C} \cdot e_{ABC}$$

$e_{ABC} = 1$ sein. Die Abweichung $1 - e_{ABC}$ kann verschieden interpretiert werden: indirekte Effekte, exogene Variable, Nicht-Voraussetzbarkeit des eindimensionalen Meßniveaus für A, B, C. Um diese Fragen näher zu spezifizieren, müßte das Modell in einer gewissen Analogie zur Pfadenanalyse weiter ausgebaut werden.

## Zusammenfassung

Beim Condorcet-Effekt wird gezeigt, daß sich Dominanzwahrscheinlichkeiten $p_{AB} > \frac{1}{2}$, $p_{BC} > \frac{1}{2}$, $p_{AC} < \frac{1}{2}$ aus eindimensionalen Modellannahmen aggregieren lassen. Weiters wird ein Beispiel gegeben, wo $p_{AB} > \frac{1}{2}$ und $p_{BC} > \frac{1}{2}$ bedeuten, daß bei einer Likert-Skalierung mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als $\frac{1}{2}$ Person A eine höhere Punktezahl angibt als Person B, ebenso für B und C. Es wird dann gezeigt, inwiefern $p_{AC} = \frac{1}{2}$ im Widerspruch zu einem eindimensionalen Modell steht.

## Literatur

AHRENS, A.J.: Multidimensionale Skalierung, Weinheim: Beltz-Verlag, 1974, S.96

BOUDON, R.: Les Mathematiques en Sociologie, S.9

FISCHER, G.H.: Einführung in die Theorie psych. Tests 1975, S.125 (Huber-Verlag, Bern)

GUILBAUD, G.Th.: Theories of The General Interest, and the Logical Problem of Aggregation. In: P.F. LAZARSFELD - N.W. HENRY, Readings in Mathematical Social Science, The M.I.T. Press, 1968

HARDER, Th.: Werkzeug der Sozialforschung, UTB - Band 304, 1974, S.39

WERNER, U.: Grundbegriffe der Soziometrie, Institutsarbeit Nr. 67 des Instituts für Höhere Studien, Wien 1975, S.22 (Zweidimensionales Modell), S.5 (Dominanzmatrix)

WERNER U.: Stochastische Skalierungsmodelle, Institutsarbeit Nr. 30 des Instituts für Höhere Studien, Wien 1972, S.9 (zur Paarvergleichsmatrix)

• WERNER, U.: Bemerkungen zum Problem der Indexkonstruktion in der Soziologie I. Forschungsmemorandum des Instituts für Höhere Studien Nr. 89, Wien 1975, S.23 (zum Erwartungswertmodell)