DEKOMPOSITIONSMODELLE

UND MEHRSTUFIGE PLANUNG

Mikulás LUPTACIK

Forschungsbericht Nr. 77

November 1973

Viele Modelle der mathematischen Programmierung sind charakterisiert durch ihren grossen Umfang. Etwa in den letzten 10 Jahren wurden mehrere Dekompositionsverfahren entwickelt, die uns nicht nur ermöglichen, die sehr umfangreichen Modelle der mathematischen Programmierung zu lösen, sondern stellen auch ein Instrument für die dezentralisierten Entscheidungen und für die Analyse der Organisationsstruktur dar. Wir könnten die Dekompositionsmodelle nach verschiedenen Kriterien klassifizieren. Wenn wir von ihrer Struktur ausgehen, können wir zwei Gruppen von Modellen unterscheiden:

I. Modelle mit deterministischer Struktur;

II. Modelle mit variabler Struktur oder variablen Zielen.

In der ersten Gruppe können wir zwei Typen von Modellen finden:

I.A. Modelle mit mehrstufiger - meistens zweistufiger - Struktur (oder hierarchischer Struktur).

I.B. Modelle mit polyzentrischer Struktur.

Die Modelle der ersten Gruppe sind dadurch charakterisiert, dass ihre Lösungen von der Organisationsstruktur unabhängig sind und sind die gleichen, egal ob wir das Problem als ganzes oder dezentralisiert lösen.
Die Lösung der Modelle mit variabler Struktur oder variablen Zielen ist von der Organisationsstruktur abhängig und nur unter strikten Annahmen ist die Lösung des Modells, wenn das System als eine Einheit betrachtet wird, einerseits, und wenn das System in einzelne Subsysteme zerlegt wird, andererseits, äquivalent. Die einzelnen Modelltypen werden wir jetzt diskutieren.

I.A. Modelle mit mehrstufiger Struktur

Die Modelle dieser Gruppe kann man als folgendes Problem der linearen Programmierung darstellen:

$$\max \quad c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_mx_m = z \tag{1}$$

$$\text{(A)} \qquad \begin{array}{lllll} A_1x_1 + & A_2x_2 + & \dots + & A_mx_m & \leqq b_o \qquad (2) \\ B_1x_1 & & & & \leqq b_1 \\ & B_2x_2 & & & \leqq b_2 \qquad (3) \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & B_mx_m & \leqq b_m \end{array}$$

$$x_k \geqq 0 \quad \text{für } k = 1,2,\dots,m \tag{4}$$

oder

$$\max \sum_{k=1}^{m} c_kx_k = z$$

$$\sum_{k=1}^{m} A_kx_k \leqq b_o$$

$$B_kx_k \leqq b_k \qquad \text{für } k = 1,2,\dots,m$$

$$x_k \geqq o \qquad \text{für } k = 1,2,\dots,m$$

wobei c_k $(k=1,2,\ldots,m)$ der n_k-dimensionale Zeilenvektor, x_k $(k=1,2,\ldots,m)$ der n_k-dimensionale Spaltenvektor ist; A_k ist die Matrix vom Typ $r \times n_k$, B_k ist die Matrix vom Typ $r_k \times n_k$, b_o ist der r-dimensionale Spaltenvektor und b_k der r_k dimensionale Spaltenvektor. Der Index k bezeichnet die einzelnen Subsysteme oder Firmen. Wir nehmen an, dass es sich um ein Produktionsmodell handelt, sodass wir die Bedingungen (3) als die technologischen Beschränkungen der einzelnen Firmen interpretieren können. Die Bedingung (2) bezeichnen wir als Verbindungsbedingung (z.B. die Beschränkung auf die gemeinsamen Ressourcen, die nur in beschränkter Menge zur Verfügung stehen, die aber von allen Firmen gebraucht werden) und die Bedingung (1) als die Zielfunktion des ganzen Systems.

Für die Lösung der Probleme (I.A.) wurden mehrere Algorithmen entwickelt, die wir folgendermassen klassifizieren könnten:

I.A.1. Dantzig-Wolfe Prinzip

a) Dantzig-Wolfe Algorithmus
b) Abadie Algorithmus
c) Bell Algorithmus
d) Benders Algorithmus
e) Pugacev Algorithmus
f) Dualplex Algorithmus von Gass

Die Grundidee des Dantzig-Wolfe Algorithmus ist folgende:

a) Ein beliebiger Plan bzw. jeder Punkt aus der kompakten Menge der Punkte $\bar{x}_k$ kann als eine konvexe Kombination der Basislösungen (oder Eckpunkte) dargestellt werden. Sei $\bar{x}_k \in E^n$ und $\bar{x}_k = \left\{x_k / B_k x_k = b_k,\ x_k \geqq 0\right\}$ eine nichtleere kompakte Menge und x_{kj}, für $j=1,2\ldots,s$ die Eckpunkte der gegebenen Menge. Dann kann man für ein beliebiges x_k schreiben:

$$x_k = \sum_{j=1}^{s} \lambda_j x_{kj}, \quad \lambda_j \geqq 0, \; j = 1,\ldots,s, \; \sum_{j=1}^{s} \lambda_j = 1$$

b) Diese Idee verwerten wir dann für die Transformation der Spalten:

$$A_k x_{kj} = a_{kj}, \qquad \text{für } k = 1$$

$$(A_1 x_{11})\lambda_1 + (A_1 x_{12})\lambda_2 + \ldots + (A_1 x_{1s})\lambda_s = b_{1s}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_s = 1$$

Analog transformieren wir auch die Koeffizienten der Zielfunktion:

$$c_{kj} x_{kj} = d_{kj}$$

Dann erhalten wir ein neues Problem - das sogenannte Hauptprogramm - in folgender Form:

$$\max \; d_{11}\lambda_{11} + d_{12}\lambda_{12} + \ldots + d_{1s}\lambda_{1s} + \ldots + d_{m1}\lambda_{m1} + \ldots + d_{ms}\lambda_{ms} = z$$

$$\text{(B)} \quad a_{11}\lambda_{11} + a_{12}\lambda_{12} + \ldots + a_{1s}\lambda_{1s} + \ldots + a_{m1}\lambda_{m1} + \ldots + a_{ms}\lambda_{ms} \leqq b_o$$

$$\lambda_{11} + \lambda_{12} + \ldots + \lambda_{1s} = 1$$

$$\vdots$$

$$\lambda_{m1} + \lambda_{m2} + \ldots + \lambda_{ms} = 1$$

$$\lambda_{kj} \geqq 0$$

Dieses Hauptprogramm ist vollständig, wenn wir alle Basislösungen in Betracht nehmen und unvollständig, wenn wir nur gewisse Basislösungen betrachten. Die Lösung des vollständigen Problems B ist dann auch gleichzeitig Lösung des Problems A.

Das Optimalitätskriterium für das Problem B, das aus der dualen Form dieses Problems folgt, ist folgendes:

$$ya_{kj} + u_k \geqq d_{kj}$$

$$yA_{kj}x_{kj} + u_k \geqq c_{kj}x_{kj} \qquad (5)$$

$$u_k \geqq (c_{kj} - yA_{kj})x_{kj}$$

wobei y der r-dimensionale Zeilenvektor und u_k ein Skalar ist.

Für ein unvollständiges Hauptprogramm verwenden wir bei der Berechnung der Lösung das Optimalitätskriterium für jedes Subsystem k:

$$\max \quad (c_k - yA_k)x_k \qquad (6)$$

$$B_k x_k \leqq b_k \qquad x_k \geqq 0 \quad \text{für } k = 1,2,\ldots,m$$

Wenn in Subsystem k das Optimalitätskriterium nicht erfüllt ist, wird ein neuer Plan konstruiert und durch diesen das Hauptprogramm ergänzt. Die Berechnungen und der Austausch der Informationen zwischen den Firmen einerseits und dém Zentrum andererseits wird so lang wiederholt bis das Optimalitätskriterium erfüllt ist.

Die ökonomische Interpretation dieses Algorithmus und seine Verwendung für die ökonomische Analyse wurde von Baumol und Fabian [5] vorbildlich ausgearbeitet.

Die Algorithmen von Abadie, Bell, Benders und Gass sind eigentlich duale Algorithmen, aufgebaut auf dem Dantzig-Wolfe Prinzip.

Der Pugacev Algorithmus bildet auf seine Art die Menge der zulässigen Lösungen.

I.A.2. Prinzip der Verteilung der Ressourcen

a) Kornai-Liptak Modell der zweistufigen Planung
b) A ten Kate Algorithmus
c) Arrow-Hurwicz Dezentralisation
d) Charnes-Clower-Kortanek Dezentralisation
e) Bagrinovskij Algorithmus
f) Parametrischer Algorithmus (W.O. Hays, W. Grabowski und andere).

Die Grundidee dieses Prinzips liegt darin, dass wir die gemeinsamen Ressourcen auf die einzelnen Subsysteme oder Firmen verteilen; somit zerlegen wir unser Problem in k Unterprobleme:

$$\max \quad c_k x_k$$

$$(C_k) \qquad \begin{aligned} A_k x_k &\leqq b_{ok} \\ B_k x_k &\leqq b_k \qquad \text{für } k = 1,2,\dots,m \\ x_k &\geqq 0 \end{aligned}$$

wobei gelten muss, dass $\sum_{k=1}^{m} b_{ok} = b_o$. (7)

Dann versuchen wir eine solche Verteilung der gemeinsamen Ressourcen zu finden, sodass das Optimum des Problems C_k für jedes k zum gesamten Optimum führt. (Zum Optimum des Problems A). Das geschieht in einem iterativen Prozess, wobei das Zentrum eine gewisse Verteilung der Ressourcen an die einzelnen Subsysteme angibt, diese lösen das Problem C_k und geben die dualen Preise der gemeinsamen Ressourcen zurück an das Zentrum. Auf Grund dieser dualen Preise gibt das Zentrum eine neue Verteilung der Ressourcen an, die Subsysteme berechnen neue duale Preise und so weiter, bis folgende Bedingung nicht erfüllt wird:

$$y_1 \doteq y_2 \doteq \dots \doteq y_m \tag{8}$$

d.h. bis die dualen Preise für die gemeinsamen Ressourcen in allen Subsystemen gleich sind. Die detailliertere Beschreibung dieses Prozesses findet man im Kornai-Liptak Modell der zweistufigen Planung [24] und bei A.ten Kate [23].

Der Unterschied zwischen dem Dantzig-Wolfe Prinzip und dem Prinzip der Verteilung der Ressourcen - vom Standpunkt der ökonomischen Interpretation - ist folgender. Beim Dantzig-Wolfe Typ erfolgt die Verteilung der gemeinsamen Ressourcen indirekt (das Zentrum gibt die Preise der Ressourcen an und die Nachfrage in den einzelnen Subsystemen nach diesen Ressourcen ist dann eine Funktion dieser Preise. Das Zentrum reagiert auf die Nachfrage, gibt neue Preise an, die Subsysteme ändern die Nachfrage und so weiter, bis das Optimalitätskriterium erfüllt und die optimale Verteilung der gemeinsamen Ressourcen erreicht ist), in den Modellen I.A.2 geschieht das direkt. Im ersten Fall verwendet das Zentrum (z.B. ein zentrales Planungsbüro) als strategische Variable die Preise, in den Modellen der Ressourcenverteilung die Mengen.

Vom Standpunkt der Berechnungen zeigt ein Vergleich zwischen Dantzig-Wolfe Algorithmus und z.B. A ten Kate Algorithmus doch gewisse Vorteile der Dantzig-Wolfe Methode.[1)]

I.A.3. Prinzip der Verteilung der Ressourcen verbunden mit dem Relaxationsprinzip

a) Rosen Algorithmus
b) Ritter Algorithmus
c) Ivanikov Algorithmus
d) Golstejn Algorithmus

Diese Algorithmen verbinden das Prinzip der Verteilung der

---

1) "... the Dantzig-Wolfe method remains preferable from a computational point of view. Only if the member of subdivisions K is small and the number of common constraints not too large can our technique be applied in practice". A. ten Kate [23].

Ressourcen mit dem Relaxationsprinzip mit der Betonung des einen oder anderen Prinzips.

Der Ritter-Algorithmus wurde für Probleme mit etwas anderer Struktur ausgearbeitet. Ein typisches Problem für den Ritter Algorithmus ist folgendes:

$$\text{Max } c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_mx_m + c_op = z$$

unter den Nebenbedingungen:

$$\begin{array}{llllll}
A_1x_1 & + A_2x_2 & + \dots & + A_mx_m & + D_op & = b_o \\
B_1x_1 & & & & + D_1p & = b_1 \\
& B_2x_2 & & & + D_2p & = b_2 \\
& & \ddots & & & \vdots \\
& & & B_mx_m & + D_mp & = b_m \\
& & & & x_i, p & \geq 0 \\
& & & & & i = 1,2,\dots,m
\end{array}$$

I.A.4. Dekomposition mit dynamischer Programmierung

Bei diesem Dekompositionsverfahren - das von G.L. Nemhauser entwickelt wurde - zerlegen wir das gesamte Problem in kleine parametrische lineare Unterprogramme und lösen dann mit deren Hilfe rekursiv das ursprümgliche Problem. Dieser Algorithmus zeigt sich effektiv bei Problemen mit wenig Verbindungsbedingungen und einer grösseren Zahl von Subsytemen oder Unterprogrammen. Der Vorteil dieses Verfahrens im Vergleich zu

Dantzig-Wolfe liegt in den Postoptimalisationsberechnungen. Wenn sich das ursprüngliche Problem um ein Unterprogramm ergänzt (A_{m+1}, c_{m+1}, x_{m+1}), haben wir nur um ein weiteres parametrisches Programm mehr. Der Dantzig-Wolfe Algorithmus würde in diesem Fall viel mehr Iterationen erfordern.

In der Literatur kann man noch zwei Arten von Modellen dieser Gruppe finden:

I.A.5. Prinzip der nach oben beschränkten Variablen

a) Dantzig und Van Slyke Algorithmus

b) Die Verallgemeinerung dieses Algorithmus bei Kaul

Dieses Prinzip eignet sich besonders für die Probleme mit folgender Struktur:

Max x_o
unter den Nebenbedingungen:

$$\begin{bmatrix} A_o & A_1 & \cdots & A_h & \cdots & A_m \\ & e_1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & e_h & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & e_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_o \\ x_1 \\ \vdots \\ x_h \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_o \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_o,\ x_i \geqq 0, \qquad e_i = (1,1,\ldots,1)$$

I.A.6. Prinzip der doppelten Zerlegung

a) Pigot Algorithmus

b) Kronse Algorithmus

Dekomposition in der nichtlinearen Programmierung

Bis jetzt haben wir nur Dekompositionsverfahren für Modelle der linearen Programmierung analysiert. Wie schon Baumol und Fabian [5] zeigten, beeinflusst die Nichtlinearität in den Nebenbedingungen der einzelnen Subsysteme nicht den Dantzig-Wolfe Algorithmus, da die Nichtlinearität in diesen Bedingungen das Hauptprogramm (Problem B) nicht betrifft. Inzwischen wurden von J.L. Sanders [31] und Hass [8], [9] Dekompositionsalgorithmen auch für die Probleme der nichtlinearen Programmierung entwickelt.

Betrachten wir folgendes Problem der mathematischen Programmierung:

$$h_1^j(x_1) + h_2^j(x_2) + \dots + h_m^j(x_m) \leq b^j \qquad j = 1,2,\dots, r$$

$$c_1(x_1) + c_2(x_2) + \dots + c_m(x_m) = z \qquad \max. \tag{D}$$

wobei x_k $(k=1,2,\dots,m)$ ein n_k-dimensionaler Vektor ist. Die Separabilität ermöglicht uns das Problem zu zerlegen und als ein Dekompositionsmodell zu analysieren. Wir nehmen an, dass alle Bedingungen für die Anwendung der Kuhn-Tucker Theorie erfüllt sind. Dann können wir die Kuhn-Tucker-Bedingungen für die Existenz des globalen Optimums $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_m)$ des Problems (D) folgendermassen anschreiben:

Es existiert

$$\tilde{y}_j \geqq 0 \qquad j = 1, 2, \ldots m \qquad (9)$$

sodass $$\sum_j \tilde{y}_j (b^j - \sum_{i=1}^{m} h_i^j(\tilde{x}_i)) = 0 \qquad (10)$$

und $$\frac{dc_i}{dx_i}(\tilde{x}_i) = \sum_j \tilde{y}_j \frac{dh_i^j}{dx_i}(\tilde{x}_i) \qquad (11)$$

wobei $\frac{d}{dx_i}$ ein Vektor der partiellen Ableitungen bezüglich aller Komponenten des Vektors x_i ist. Die Bedingungen (9), (10) und (11) sind notwendige Bedingungen für ein globales Optimum des Problems (D). Nur wenn das Problem (D) ein Problem der konvexen Programmierung ist, sind die Bedingungen (9) - (11) auch hinreichend. Das Dekompositionsproblem (D) kann man auf zwei Arten lösen:

a) indirekt (Dantzig-Wolfe Prinzip. Seine Verallgemeinerung für nichtlineare Programmierung siehe bei Hass [8] und [9].)
b) direkt (Prinzip der Verteilung der Ressourcen; für ein Modell der konvexen Programmierung siehe Weitzman (37).)

Das Optimalitätskriterium bei der indirekten Verteilung der gemeinsamen Ressourcen kann man folgendermassen schreiben[1]:

Es existieren die Preise $y_j \geqq 0$, sodass:

a) $$\sum_{i=1}^{m} d_i^j(y_1, \ldots, y_m) \leqq b^j \qquad j = 1,2,\ldots,r \qquad (12)$$

---

1) Siehe A.ten Kate [22].

wobei $d_i^j(y_1, y_2, \ldots, y_m) = h_i^j(x_i(y_1, \ldots, y_m))$ eine Nachfragefunktion des Subsystems i nach Ressource j ist. Diese Bedingung impliziert, dass die gesamte Nachfrage nach Ressource j nicht grösser als die vorhandene Menge sein kann.

b) $$\sum_{j=1}^{r} y_j(b^j - \sum_i d_i^j(y_1, \ldots, y_m)) = 0 \qquad (13)$$

Ein Überschussangebot an gemeinsamen Ressourcen impliziert, dass die Preise dieser Ressourcen gleich Null sind. In der konvexen Programmierung sind die Bedingungen (12) und (13) notwendig und hinreichend für die Existenz eines globalen gesamten Optimums. Jedoch - wie von A. ten Kate [22] gezeigt wurde - sind diese Bedingungen zwar hinreichend, aber nicht notwendig für ein Problem der nichtkonvexen Programmierung.

Bei der direkten Verteilung der gemeinsamen Ressourcen haben die Optimalitätsbedingungen folgende Form:

$$\sum_{i=1}^{m} b_i^j = b^j \qquad (j = 1,2,\ldots,r) \qquad (14)$$

und

$$\tilde{y}_j^1 = \tilde{y}_j^2 = \ldots = \tilde{y}_j^m = \tilde{y}_j \qquad (j = 1,2,\ldots,r) \qquad (15)$$

d.h. die dualen Preise in allen Subsystemen müssen für jede Ressource gleich sein.
Für die konvexe Programmierung sind diese Bedingungen notwendig und hinreichend für die Existenz eines globalen Optimums des Problems (D).

Wie jedoch A. ten Kate [22] gezeigt hat[1], sind diese Bedingungen zwar notwendig, aber nicht hinreichend für die Probleme der nichtkonvexen Programmierung.

Problem der Externalitäten[2].

Die Separabilität der Zielfunktion impliziert, dass die "sozialen" externen Effekte (externe Effekte in der Nutzenfunktion) nicht berücksichtigt werden können. Jedoch die "pekuniären" externen Effekte[3] liegen gerade der ökonomischen Interpretation des Dantzig-Wolfe Algorithmus zugrunde.[4] Die Entscheidung über den Produktionsplan in Subsystem i beeinflusst - über die Verbindungsbedingungen (2) - die Entscheidung in Subsystem 1. Wenn z.B. die Firma i Ressourcen an sich bindet, die effektiver - vom Standpunkt des gesamten Systems - verwendet werden könnten, sprechen wir über "external diseconomies" der Firma i. Andererseits, wenn z.B. die Firma 1 Ressourcen verwendet, die bei einer anderen Firma in relativem Überschuss vorhanden sind, sprechen wir von "external economies" der Firma 1. Externe Effekte, die über den Markt - oder in unserem Fall über einen simulierten Markt - zum Ausdruck kommen, zählt Scitovsky zu den "pekuniären" externen Effekten.

---

1) A.ten Kate [22] analysiert ein Beispiel mit exponentieller Zielfunktion.

2) Für die wertvolle Diskussion zu diesem Punkt bin ich meinem Kollegen, Herrn Dr. Uwe Schubert, sehr dankbar.

3) Die verschiedenen Konzepte der externen Effekte siehe Scitovsky. [32]

4) Siehe Baumol-Fabian [5].

Nun versuchen wir - mit Prämien für Firmen mit "external economies" und mit Penalen für Firmen mit "external diseconomies" - die dezentralisierten Entscheidungen so zu beeinflussen, dass die Optima der einzelnen Firmen ein gesamtes Optimum bilden.

Einen weiteren Typ externer Effekte - die wir als technologische Externalitäten bezeichnen werden - hat Whinston im Dantzig-Wolfe Modell eingeführt. Wir betrachten folgendes Dekompositionsproblem:

$$\max z = c_1x_1 + \dots + c_qx_q + c_{q+1}w_1 + \dots + c_{q+t}w_t$$

unter den Nebenbedingungen

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1q}x_q + a_{1q+1}w_1 + \dots + a_{1q+t}w_t \lesseqqgtr b_{o1}$$

$$\vdots$$

$$a_{r1}x_1 + \dots + a_{rq}x_q + a_{rq+1}w_1 + \dots + a_{rq+t}w_t \lesseqqgtr b_{or}$$

$$f_1(x_1 \dots x_d \dots x_q) \lesseqqgtr b_1$$

$$\vdots$$

$$f_l(x_1 \dots x_d \dots x_q) \lesseqqgtr b_l$$

$$g_1(w_1, \dots w_t, x_d) \lesseqqgtr b_{l+1}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$g_m(w_1, \dots w_t) \lesseqqgtr b_{l+m}$$

Wir sehen, dass eine Variable oder eine Komponente des Produktionsplanes des ersten Subsystems x_d als Variable in einer technologischen Beschränkung des zweiten Subsystems auftritt. Es könnte sich z.B. um ein Produkt handeln, das die erste Firma herstellt und die zweite als Input verwendet. Die Externalität liegt darin, dass die Menge dieses Produkts der direkten Kontrolle des zweiten Subsystems nicht unterliegt. Unser Modell kann man dann folgendermassen modifizieren:

$x_d = \zeta^n$ und die erste Nebenbedingung des zweiten Subsystems:

$$g_1(w_1, \dots, w_t, \zeta^n) = b_{l+1}$$

und eine zusätzliche zentrale oder Verbindungsbedingung:

$$x_d - \zeta^n = 0$$

Auf diese Weise bekommen wir das Dekompositionsmodell in seiner ursprünglichen Form.

I.B. Modelle mit polyzentrischer Struktur

In diese Gruppe würde ich vor allem die Modelle der sogenannten Reflektor-Programmierung eingliedern, die jedoch noch im Stadium der Ausarbeitung sind und noch weitere Forschung erfordern werden. Die Reflektor-Programmierung ist eine Dekompositionsmethode - die von G. Simon [33] entwickelt wurde - für die Lösung umfangreicher Probleme der linearen Programmierung, bei denen die Nebenbedingungen nicht zwischen zentralen und sektorellen unterscheiden. Das würde bedeuten, dass sich dieses Verfahren auf das allgemeine Problem der linearen Programmierung anwenden lässt, da es keine spezielle Struktur erfordert. Folgende drei Prinzipien liegen dieser Methode zugrunde:

a) dynamisches Reflektorprinzip
b) polyzentrisches Prinzip (keine hierarchische Struktur)
c) Prinzip der stereoskopischen Vision, das wir als Prinzip der Kombination des primalen und dualen Lösungen übersetzen könnten.

Die Konvergenz dieses Verfahrens ist noch nicht exakt mathematisch bewiesen und der Autor stützt sich auf die relativ guten Ergebnisse seiner experimentellen Berechnungen. Aus diesem Grund sind noch weitere Studien dieser Modelle notwendig.

Als zweiten Typ von Modellen, die ich in diese Gruppe einbeziehen würde, sind die dynamischen Input-Output Modelle in der Form eines linearen Programmierungsproblems. Diese Modelle in ihrer einfachsten Form haben folgende Struktur:

$$\max \quad z = c.x_T$$

unter den Nebenbedingungen:

$$\begin{array}{llllll}
A_1x_1 & & & & & \leqq b \\
-E_1x_1 & + A_2x_2 & & & & \leqq 0 \\
& - Ex_2 & + A_3x_3 & & & \leqq 0 \\
& & \ddots & & & \vdots \\
& & & -Ex_{T-1} & + Ax_T & \leqq 0 \\
x_1 \geqq 0, & x_2 \geqq 0, \ldots & & & x_T & \geqq 0
\end{array}$$

wobei A_t die n x n Matrix der Inputkoeffizienten in der Periode t ist; b ist der n-dimensionale Vektor der ursprünglichen Ausstattung (oder der Ressourcen), E ist die n x n Einheitsmatrix, x_t ist der n-dimensionale Spaltenvektor der Produktion in Periode t, wobei $t = 1,2,\ldots,T$ und c der n-dimensionale Zeilenvektor der Koeffizienten der Zielfunktion ist. Wir sehen, dass diese Modelle eine typische blockdiagonale Struktur aufweisen. Die Dekompositionsmethoden für die Lösung solcher Probleme wurden von G. Dantzig [13] und von V.V. Malinnikov [26] entwickelt.

II. Modelle mit variabler Struktur

In diese Gruppe würde ich das "Generalized Goal Decomposition Model" von T. Ruefli [35] eingliedern. Für dieses Modell ist charakteristisch, dass die Organisationsstruktur als Variable auftritt und dass wir explizit keine globale Zielfunktion definieren. Betrachten wir ein System mit m Subsystemen oder Firmen. Ein Allokationsproblem der Firma k lässt sich als ein Problem der Zielprogrammierung folgendermassen darstellen:

$$\text{Min} \quad W_k^+ Y_k^+ + W_k^- Y_k^-$$

unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{j=1}^{n_k} A_{jk} x_{jk} - E_{m_k} Y_k^+ + E_{m_k} Y_k^- = G_k$$

$$(\text{II}.1_k) \quad 0 \leqq x_{jk} \leqq 1 \qquad j = 1,2,\dots, n_k$$

$$Y_k^+ \geqq 0 \qquad k = 1,2,\dots,m$$

$$Y_k^- \geqq 0$$

wobei G_k der m_k-dimensionale Spaltenvektor der Ziele (oder der vorhandenen Ressourcen) der Firma k ist, Y_k^+ und Y_k^- sind die m_k-dimensionalen Spaltenvektoren der positiven und negativen Abweichungen von den Zielen, A_{jk} ist der m_k-dimensionale Spaltenvektor, E_{m_k} ist die $m_k \times m_k$ Einheitsmatrix und W_k^+, W_k^- sind m_k-dimensionale Zeilenvektoren.

Die Firma kann wählen zwischen n_k Projekten (oder Technologien), deren Erträge (oder Inputs) mit den Vektoren A_{jk} gegeben sind; x_{jk} ist das Aktivitätsniveau.[1] Die Zielfunktion ist die Minimierung der gewichteten Summe der Abweichungen von den Zielen, wobei die Gewichte W_k^+ und W_k^- exogen gegeben sind.[2] Die Firma k hat n_k Betriebseinheiten (operating units), in denen die einzelnen Projekte durchgeführt werden können. Wir bezeichnen mit $y_k^{(t)}$ den Vektor der dualen Preise des Problems (II.1_k) zum Zeitpunkt t = 1, 2, ..., T. Das Ziel oder der Plan für die j-te Betriebseinheit der Firma k für k = 1,2,...,m (z.B. sie muss eine gegebene Menge von gewissen Produkten herstellen) ist durch Vektor F_{jk} definiert. Sie steht dann vor folgendem Entscheidungsproblem: Sie muss ihr Projekt A_{jk} so wählen, dass sie den Plan mit minimalen Kosten erfüllen kann. Das lässt sich folgendermassen formulieren:

$$\min y_k^{(t)} A_{jk}$$

---

1) "We have permitted fractional projects by allowing x_{jk} to range between 0 and 1. If fractional projects are not permitted, a mixed-integer programming problem results. This latter case not only results in computational difficulties, but may also produce complications with respect to the interpretation of the dual variables". Ruefli [35], p. 506.

2) Zu diesem Problem siehe Ijiri, Y.: "Management Goals and Accounting for Control", Rand-McNally, Chicago, 1965, pp. 45 ff.

unter den Nebenbedingungen: $(II.2_{jk})$

$$B_{jk}A_{jk} \geqq F_{jk}$$

$$A_{jk} \geqq 0 \qquad j = 1,2,\dots, n_k$$

wobei A_{jk} der m_k-dimensionale Spaltenvektor der Variablen ist; B_{jk} ist $N_{jk} \times m_k$ Matrix der technologischen Koeffizienten; F_{jk} ist der N_{jk}-dimensionale Spaltenvektor und $y_k^{(t)}$ ist der m_k dimensionale Zeilenvektor.

Die dualen Preise $y_k^{(t)}$ können wir als Kosten - bezüglich gegebener Ziele der Firma k - zum Zeitpunkt $t = 1,2,\dots,T$ interpretieren. Die Nebenbedingungen des Problems $(II.2_{jk})$ bilden eine konvexe Menge Γ_{jk} (die Nebenbedingungen können auch nichtlinear sein, so lang die Menge Γ_{jk} konvex bleibt), aus denen die Vektoren A_{jk} für das Problem $(II.1_k)$ erzeugt werden.

Aber auch der Vektor der Ziele G_k ist variabel. Diese Ziele sind als Lösung folgenden Problems des Zentrums gegeben:

$$\max \sum_{k=1}^{m} y_k^{(t)} . G_k$$

unter den Nebenbedingungen (II.3)

$$\sum_{k=1}^{m} P_k G_k \leqq G_o$$

$$G_k \geqq 0 \qquad k = 1,2,\dots,m$$

wobei P_k $m_o \times m_k$ Matrizen sind, G_o ist der dimensionale Spaltenvektor, G_k der m_k-dimensionale Spaltenvektor und $y_k^{(t)}$ der m_k-dimensionale Zeilenvektor zum Zeitpunkt $t = 1,2,\ldots,T$. Den Vektor G_o kann man als Vektor der vorhandenen Ressourcen des ganzen Systems interpretieren und die Koeffizienten der Matrizen P_k $(k=1,2,\ldots,m)$ als Input-Koeffizienten. Die Ziele für die einzelnen Firmen G_k können nur so bestimmt werden, dass die Nachfrage nach den Ressourcen die vorhandene Menge nicht überschreitet. Wir sehen, dass diese Bedingungen ähnlich den Verbindungsbedingungen (2) des Modells I.A sind. Die Menge der zulässigen Lösungen des Problems (II.3) bezeichnen wir mit Γ_o, aus denen die Ziele G_k für das Problem (II.1_k) erzeugt werden. Aus der Dualitätstheorie für gegebenes t folgt:

$$\max y_k^{(t)} \cdot G_k = \min W_k^+ Y_k^+ + W_k^- Y_k^- \quad \text{für } k=1,2,\ldots,m$$

Wir sehen, dass das k-te Term der Zielfunktion des Zentrums gerade die Zielfunktion des dualen Problems der Firma k ist. "The difference between the central unit's activity and the k-th management unit's activity is that the latter is concerned only with its own objective function, while the central unit takes the objectives of all of the management units into account."(Ruefli [35], Seite 507).

Das Modell besteht aus $1+m+\sum_{k=1}^{m} n_k$ Problemen. Das Zentrum löst mit Hilfe der Simplex-Methode das Problem (II.3), die Firmen das Problem (II.1_k) und die Betriebseinheiten das Problem (II.2_{jk}). Das Zentrum setzt die Ziele $G_k^{(o)}$ für die m Firmen. Die Firmen lösen ihr Problem (II.1_k) und senden die dualen Preise $y_k^{(o)}$ zurück an das Zentrum und die Betriebseinheiten. Das Zentrum bestimmt jetzt neue Ziele $G_k^{(1)}$ für die Firmen; die Betriebseinheiten wählen die Technologien oder Projekte $A_{jk}^{(1)}$. Auf Grund dieser Informationen berechnen die Firmen neue duale Preise $y_k^{(2)}$ für das Zentrum und für die Betriebseinheiten. Dieser Prozess wird so lang fortgesetzt, bis min $W_k^+Y_k^+ + W_k^-Y_k^-$, für k=1,2,...,m erreicht ist. Der Beweis für die Konvergenz dieses Prozesses in endlicher Anzahl der Schritte folgt aus dem Beweis für "Generalized Programming" von Dantzig [13] und Dantzig, A. Orden and P. Wolfe [14].

Vom Standpunkt der ökonomischen Interpretation kann man eine Analogie zu den Modellen der direkten Verteilung der Ressourcen (I.A.2) beobachten, in denen das Zentrum die Ziele (oder Ressourcen) und die Firmen die Preise angeben. Es wäre möglich, dieses Modell auch für eine n-stufige Organisation zu verallgemeinern.

Problem der Externalitäten:

In diesem Modell können wir drei Typen von externen Effekten beobachten:

a) Die pekuniären externen Effekte zwischen den Betriebseinheiten innerhalb der Firma k (k=1,2,...,m). Diese Externalitäten kommen über die Nebenbedingungen des Problems ($II.1_k$) zum Ausdruck.

b) Die pekuniären externen Effekte zwischen den Firmen, die sich über die Nebenbedingungen des Problems (II.3) auswirken werden.

c) Die pekuniären externen Effekte zwischen der j-ten Betriebseinheit der Firma k für k = 1,2,...,m und der r-ten Betriebseinheit der Firma q für q = 1,2,...,m, wobei $k \neq q$. Diese Externalitäten würden sich - nach gewisser Erweiterung des Modells, die ähnlich der

Whinston's Methode [38] für das Dantzig-Wolfe Modell ist - über die Nebenbedingungen des Problems (II.3) auswirken. Analog zu Whinston [38] könnten wir auch die technologischen externen Effekte in das Modell einbauen und zwar

a) zwischen den Betriebseinheiten der Firma k
b) zwischen den Betriebseinheiten zweier verschiedener Firmen.

Im ersten Fall müssten wir die Nebenbedingungen des Problems ($II.1_k$) und im zweiten Fall des Problems (II.3) um zusätzliche Bedingungen ergänzen.
Die sozialen externen Effekte würden in diesem Modell bedeuten, dass die Zielfunktion der Firma k, nämlich die Funktion der Abweichungen von den gegebenen Zielen auch eine Funktion der Abweichungen von den Zielen einer anderen Firma ist, z.B. $Z_k(Y_k^+, Y_k^-, Y_p^+, Y_p^-)$. Jedoch würden diese Externalitäten noch weitere Modifikationen des Modells und weitere Studien erfordern. In diesem Modell werden sie auch nicht berücksichtigt.

<u>Organisationsstruktur</u>

Der wesentliche Unterschied zwischen den Modellen mit deterministischer Struktur und dem "Generalized Goal Decomposition Model" (GGD Modell) von T. Ruefli - als Repräsentant der Modelle mit variabler Struktur - liegt darin, dass die optimale Lösung der Modelle der ersten Gruppe von dem Grad und der Art der Dekomposition unabhängig ist. Andererseits ist die optimale Lösung des GGD-Modells durch den Grad der Dezentralisation oder durch die Struktur der Dekomposition determiniert. Das lässt sich an der Zielfunktion, sowie auch an den Nebenbedingungen des GGD-Modells illustrieren. Für die Modelle der ersten Gruppe ist charakteristisch, dass eine globale Zielfunktion immer explizit definiert wird. In dem GGD-Modell wird keine Zielfunktion für das System explizit definiert, sondern nur <u>die Ziele der Betriebseinheiten</u>, und über diese kommt eine Zielfunktion des Systems zum Ausdruck.

Betrachten wir jetzt ein Allokationsproblem in einer zentralisierten Organisation. Die Zielfunktion kann man in folgender Form schreiben:

$$Z_o(Y_o^+, Y_o^-) = W_o^+ Y_o^+ + W_o^- Y_o^- \qquad (16)$$

In einer dezentralisierten Organisation ist die Zielfunktion der Firma k folgende:

$$Z_k(Y_k^+, Y_k^-) = W_k^+ Y_k^+ + W_k^- Y_k^-, \quad k = 1,2,\ldots,m \qquad (17)$$

Wenn wir jetzt versuchten aus den einzelnen Zielfunktionen eine globale Zielfunktion zu formulieren, könnten wir schreiben:

$$Z_o' = \sum_{k=1}^{m} Z_k(Y_k^+, Y_k^-) = \sum_{k=1}^{m} W_k^+ Y_k^+ + \sum_{k=1}^{m} W_k^- Y_k^- \qquad (18)$$

Vergleichen wir jetzt die Funktionen (16) und (18). Die erste stellt die Zielfunktion einer zentralisierten Organisation und die zweite einer dezentralisierten Organisation dar. Unter welchen Annahmen werden die zwei Funktionen äquivalent? Abgesehen vom Problem der Dimension (Y_o ist - im allgemeinen - ein m_o-dimensionaler Vektor und Y_k ist ein m_k - dimensionaler Vektor; die Anzahl der Ziele des Zentrums und der einzelnen Firmen könnte verschieden sein), nur wenn:

$$W_k = W_o \qquad \text{für } k = 1,2,\ldots,m \qquad (19)$$

$$\sum_{k=1}^{m} Y_k^+ = Y_o^+ \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{m} Y_k^- = Y_o^- \qquad (20)$$

gilt: $Z_o = Z_o'$.

Die Bedingung (19) impliziert, dass die Gewichte für einzelne Ziele - die gewisse Präferenzen ausdrücken - in allen Firmen gleich den Gewichten oder Präferenzen des ganzen Systems sein müssten. Die Bedingung (20) entspricht gerade der Additivitätsannahme, die in den Modellen der ersten Gruppe **immer** erfüllt wird. Nur unter diesen - eher restriktiven als plausiblen - Annahmen wären die optimalen Lösungen bei verschiedenem Dekompositionsgrad äquivalent.

Für praktische Applikationen dieses Modells wäre es notwendig, effizientere Lösungsverfahren zu entwickeln, da die Zahl der Iterationen - bis ein Optimum erreicht wird - noch sehr hoch ist. Aus diesem Grund zeigt sich das GGD-Modell mehr als ein Instrument für die dezentralisierten Entscheidungen und die Analyse der Organisationsstruktur und weniger als eine effektive mathematische Dekompositionsmethode.

Literatur

[1] Abadie, L.M., A.C. Williams: "Dual and Parametric Methods in Decomposition" in Recent Advances in Mathematical Programming, Eds. R. Graves and P. Wolfe, McGraw-Hill, New York 1963

[2] Arrow, K.J., L. Hurwicz: "Decentralization and Computation in Resource Allocation," Essays in Economics and Econometrics, University of North Carolina Press, Chapel Hill 1960.

[3] Balas, E.: "An Infeasibility-Pricing Decomposition Method for Linear Program", Operations Research 14/1966.

[4] Bagrinovskij, K.A.: Formirovanie lokalnych zadac in raspredelenii resursov, in "Matematiceskie metody resenija ekonomiceskich zadac", Nauka, Novosibirsk 1971.

[5] Baumol, W.J., T. Fabian: "Decomposition, Pricing for Decentralization and External Economics," Management Science 11/1964.

[6] Bell, E.J.: Primal-dual Decomposition Programming", Thesis, University of California, Berkeley 1964.

[7] Benders, J.F.: "Partitioning Procedures for Solving Mixed Variables Programming Problems, Numer. Math. 4/1962.

[8] Hass, J.E.:"Transfer Pricing in a Decentralized Firm: A Decomposition Algorithm for Quadratic Programming", C.I.T. (May 1967), Management Science, Vol. 14, No.6 (Feb.1968), p. B-310.

[9] Hass, J.E.: "A Decomposition Algorithm for Non-Linear Programming", Management Science Research Report No. 101, Carnegie Institute of Technology, Graduate School of Industrial Administration, Pittsburgh, Pa. 1967.

[10] Hays, W.O.: "Advanced Linear Programming Computing Techniques," New York, McGraw-Hill Book Company 1965.

[11] Heymann, M., M. Avriel: "On Decomposition for a Special Class of Geometric Programming Problems, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol,3, No.3, 1969, pp. 392-409.

[12] Charnes, A., R.W. Clower, K.O. Kortanek: "Effective Control Through Coherent Decentralization with Pre-emptive Goals, Econometrica 35/19, 1967.

[13] Dantzig, G.B.: "Linear Programming and Extensions," Princeton University Press, Princeton, 1963.

[14] Dantzig, G.B., A. Orden, P. Wolfe: "The Generalized Simplex Method for Minimizing a Linear Form under Linear Inequality Restraints", Pacific J. of Mathematics, Vol. 5, pp. 183-195.

[15] Dantzig, G.B., P. Wolfe: "Decomposition Principle for Linear Programs", Operations Research, Vol. 8 (1963), pp. 101-111.

[16] Dantzig, G.B.: "The Decomposition Algorithm for Linear Programs", Econometrica, Vol. 29 (1961), pp. 767 - 778.

[17] Dantzig, G.B.: "Optimal Solution of a Dynamic Leontief Model with Substitution", Econometrica, Vol.23, 1955.

[18] Dantzig, G.B.: "Block Triangular Systems in Linear Programming," RAND Report RM-1273, The RAND Corporation, Sta. Monica, California, 1954.

[19] Gass, S.I.: "The Dualplex Method for Large-scale Linear Programs", Operations Research Center, University of California, Berkeley, 1966.

[20] Golstejn, J.: "New Directions in Linear Programming," Moskau 1966.

[21] Grabowski, W.: "Dekompozicija Programu Liniowego, Szkola - Glowna Planowania a Statistiki, Warszawa 1969.

[22] A. ten Kate: "A Comparison Between two Kinds of Decentralized Optimality Conditions in Non-convex Programming."Management Science Vol. 18, No.12, Aug. 1972.

[23] A. ten Kate: "Decomposition of Linear Programs by Direct Distribution," Econometrica, Vol. 40, No 5, Sept. 1972.

[24] Kornai, J., Th. Liptak: "Two-level Planning", Econometrica, Vol.33, No. 1, Jan. 1965.

[25] Kronso, T.O.: "Centralizacija i decentralizacija resenij, obobscenie metody dvojnogo rozlozenija," Ekonomika i matematiceskije metody, 4/1968.

[26] Malinnikov, V.V.: "The Decomposition Method in the Solution of Large-scale Linear Programming Problems With Block Structure", Matekon, Vol. IX, No.3, Spring 73.

[27] Nemhauser, G.L.: "Decomposition of Linear Programming by Dynamic Programming", Naval Research Logistic Quarterly 1964.

[28] Pigot, D.: "Double decomposition d'un programme linéaire", In 4 Actes de la 3-e Internat de Rech. Operationalle, Paris 1964.

[29] Pugacev, V.F.: "Optimalizacija planirovanija," Moskva 1968.

[30] Ritter, K.: "A Decomposition Method for Linear Programming Problems with Coupling Constraints and Variables", Mathematic Research, Center University of Wisc.

[31] Rosen, J.B.: "Primal Partition Programming for Block Diagonal Matrices", Numerische Mathematik, 6/1964.

[32] Sanders, J.L.: "A Non-linear Decomposition Principle", Operations Research 2/1965.

[33] Scitovsky, T.:"Two Concepts of External Economics", Journal of Political Economy, 1954.

[34] Simon, G.: "The Principles and Algorithm of Reflector Programming", European Meeting of the Econometric Society, Budapest, Sept. 1972.

[35] Sojka, J.: "Optimalizácia rozsiahlych lineárnych sústav." (Die Optimierung der umfangreichen linearen Systeme), Ekonomické rozhľady, Hochschule für Ökonomie Bratislava 1971.

[36] Ruefli, T.W.: "A Generalized Goal Decomposition Model", Management Science, Vol. 17, No.8, April 1971.

[37] Van Slyke, R.: "Mathematical Programming and Optimal Control," Thesis, University of California, Berkeley 1964.

[38] Weitzmann, M.: "Iterative Multilevel Planning with Production Targets", Econometrica, Vol. 38, No. 1 (Jan. 1970)

[39] Whinston, A.: "Price Guides in Decentralized Institutions". Ph.D. Thesis, Carnegie Institute of Technology, Pittsburgh, 1962.

[40] Whinston, A.: "Pricing Guides in Decentralized Organization", in New Perspectives in Organizational Research, edited by W.W. Cooper et al. John Wiley & Sons, New York 1964.

[41] Zschau, E.V.W.: "A Theory of Primal Decomposition for Linear Programming", Working Paper No. 120, Stanford University, Feb. 1967.