Zur Beziehung zwischen Barwertmodell, Fair Game Modell und Martingalmodell

Eine Übersicht

Raimund ALT

Forschungsbericht/
Research Memorandum No. 339

Jänner 1994

Institut für Höhere Studien
Abteilung Mathematische Methoden
und Computerverfahren
Stumpergasse 56
A-1060 Wien
Tel: 0222/59 9 91-159
Fax: 0222/597 06 35
e-mail: alt@ihssv.wsr.ac.at

1. Einleitung

Diese Arbeit präsentiert eine Übersicht über die Beziehungen zwischen Barwertmodell, Fair Game Modell und Martingalmodell. Den Ausgangspunkt bildet dabei das Barwertmodell (present value model), das nicht zuletzt seit der 'Excess Volatility'-Debatte in den 80er Jahren eine zunehmende Bedeutung im Rahmen der empirischen Kapitalmarktforschung erfahren hat (siehe dazu etwa die Arbeiten von Shiller (1981), LeRoy/Porter (1981) und Gilles/LeRoy (1991)).

Die vorliegende Darstellung soll insbesondere dazu dienen, die Arbeit von LeRoy (1989) in einigen Aspekten zu ergänzen. Dazu gehört u. a. die Berücksichtigung sowohl des Originalbeitrages von Samuelson (1973) als auch die entsprechende Darstellung bei Malliaris (1981) und Malliaris/Brock (1982).

Es folgt eine Übersicht über den Inhalt der Arbeit.

Abschnitt 2 beginnt mit den ökonomischen und mathematischen Annahmen, die für die zu untersuchenden Modelle erforderlich sind. In diesem Abschnitt werden insgesamt vier Implikationen des Barwertmodells beschrieben, die untereinander wiederum äquivalent sind. In Abschnitt 3 werden zwei Bedingungen behandelt, unter denen das Barwertmodell und das Martingalmodell äquivalent sind. Abschnitt 4 gibt dann noch einen Überblick über die wichtigsten Aspekte des Martingalmodells.

2. Implikationen des Barwertmodells

Wir beginnen mit einigen ökonomischen und mathematischen Voraussetzungen, die für die weitere Darstellung erforderlich sind. Zunächst wird die Annahme getroffen, daß die Investoren risikoneutral sind und rationale (identische) Erwartungen haben.

Nun zu den Annahmen über die einzelnen Variablen. Für jeden Zeitpunkt t bezeichnen p_t und d_t den Preis (Kurs) und die Dividende eines bestimmten Aktientitels, wobei $p_t > 0$ und $d_t \geq 0$ gilt. Es wird angenommen, daß die Erwartungswerte von p_t, d_t, p_{t+1}/p_t und d_{t+1}/p_t endlich sind. Der Preis p_t habe außerdem endliches zweites Moment. Die Rendite r_{t+1} wird wie üblich definiert durch

$$r_{t+1} = \frac{p_{t+1} + d_{t+1} - p_t}{p_t}$$

und besitzt auf Grund der genannten Voraussetzungen endlichen Erwartungswert.

Grundlage des Martingalmodells ist der Prozeß

$$v_t = \frac{p_t \cdot h_t}{(1 + c)^t}$$

wobei c der konstante (positive) Zinssatz und h_t (>0) die Stückzahl zum Zeitpunkt t der Aktien eines bestimmten Titels (mit dem Preis p_t) bedeuten. Es wird angenommen, daß die ausgeschütteten Dividenden stets wieder in denselben Aktientitel investiert werden. Daher läßt sich die folgende rekursive Beziehung aufstellen:

$$h_{t+1} = h_t + \frac{d_{t+1} \cdot h_t}{p_{t+1}}.$$

v_t ist somit der auf den Zeitpunkt 0 abdiskontierte Wert eines Portfolios, das aus genau h_t Aktien eines bestimmten Titels (mit dem Preis p_t) besteht. Dabei wird angenommen, daß h_t endliches zweites Moment besitzt. Zusammen mit der entsprechenden Annahme über p_t impliziert dies, daß der Erwartungswert von v_t endlich ist. Schließlich wird noch vorausgesetzt, daß die Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_{t+i}}{(1 + c)^i}$$

in R konvergiert (für jedes t) und endlichen Erwartungswert besitzt.

Die Informationsmenge I_t wird wie folgt definiert: Sei $\sigma(p_s, d_s, h_s, s \leq t)$ die von den Variablen p_s, d_s und h_s, $s \leq t$, erzeugte σ-Algebra. Die Informationsmenge I_t ist dann die Menge aller Zufallsvariablen, welche bezüglich $\sigma(p_s, d_s, h_s, s \leq t)$ meßbar sind. Insbesondere gilt dann

$$p_s, d_s, h_s \in I_t \qquad \text{für alle } s \leq t$$

$$\text{und} \quad I_t \subset I_{t+1}.$$

Diese Definition berücksichtigt u. a., daß auch entsprechende Funktionen der Ausgangsvariablen, wie z. B. $d_t + p_t$ oder p_t^2 zu I_t gehören. Eine Vergrößerung der Informationsmenge ist ohne weiteres möglich, sofern nur beachtet wird, daß p_s, d_s und h_s für alle $s \leq t$ stets zu I_t gehören.

Den Ausgangspunkt unserer Betrachtungen bildet der sogenannte "perfect foresight price" oder "ex post rational price"

$$p_t^* := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_{t+i}}{(1+c)^i} .$$

Mit Hilfe von p_t^* läßt sich nun das Barwertmodell (present value model) formulieren:

$$p_t = E(p_t^* \mid I_t) .$$

Durch Einsetzen erhält man für den rechten Ausdruck

$$E(p_t^* \mid I_t) = E\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_{t+i}}{(1+c)^i} \mid I_t\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E(d_{t+i} \mid I_t)}{(1+c)^i} .$$

Dies liefert die übliche Darstellung des Barwertmodells

$$p_t = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E(d_{t+i} \mid I_t)}{(1+c)^i} \tag{1}$$

Angenommen, man ersetzt nun t durch t+1, so erhält man

$$p_{t+1} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E(d_{t+i+1} \mid I_{t+1})}{(1+c)^i}$$

$$= \sum_{i=2}^{\infty} \frac{E(d_{t+i} \mid I_{t+1})}{(1+c)^{i-1}} .$$

Die bedingte Erwartung von p_{t+1} bezüglich I_t lautet dann

$$E(p_{t+1} \mid I_t) = E\left(\sum_{i=2}^{\infty} \frac{E(d_{t+i} \mid I_{t+1})}{(1+c)^{i-1}} \mid I_t\right)$$

$$= \sum_{i=2}^{\infty} \frac{E(E(d_{t+i} \mid I_{t+1}) \mid I_t)}{(1+c)^{i-1}}$$

$$= \sum_{i=2}^{\infty} \frac{E(d_{t+i} \mid I_t)}{(1+c)^{i-1}}$$

wobei beim Übergang von der zweiten zur dritten Gleichung der Satz über iterierte Erwartungen verwendet wurde. Durch Subtraktion und gleichzeitige Addition von $E(d_{t+1} \mid I_t)$ erhält man

$$E(p_{t+1} \mid I_t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E(d_{t+i} \mid I_t)}{(1+c)^{i-1}} - E(d_{t+1} \mid I_t)$$

$$= (1+c) \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E(d_{t+i} \mid I_t)}{(1+c)^{i}} - E(d_{t+1} \mid I_t)$$

Wegen (1) läßt sich die letzte Gleichung aber auch in der Form

$$E(p_{t+1} \mid I_t) = (1+c) \cdot p_t - E(d_{t+1} \mid I_t) \tag{2}$$

schreiben.

Die Herleitung von (2) aus dem Barwertmodell geht auf Samuelson (1973) zurück. Sie ist aber bereits in Samuelson (1965) enthalten, hier allerdings im Zusammenhang mit der Preisbildung bei Futures.

Worin liegt nun die Bedeutung von (2)? Zunächst einmal läßt sich (2) auf die (äquivalente) Form

$$p_t = \frac{E(p_{t+1} + d_{t+1} \mid I_t)}{1+c} \tag{3}$$

bringen. Vertauscht man dann p_t und $1+c$, so erhält man schließlich wegen $p_t \in I_t$

$$E\left(\frac{p_{t+1} + d_{t+1} - p_t}{p_t} \mid I_t\right) = c$$

$$\text{bzw.} \quad E(r_{t+1} - c \mid I_t) = 0 . \tag{4}$$

Dies ist das sog. Fair Game Modell, das äquivalent zu (2) und (3) ist und daher eine direkte Implikation des Barwertmodells darstellt. Zusammen mit den eingangs gemachten Annahmen besagt (4) nichts anderes, als das der Prozeß $(r_t - c)$ eine Martingaldifferenz bezüglich I_t ist bzw. ein Fair Game (um eine in der Literatur effizienter Märkte übliche Bezeichnung zu verwenden).

Da der Zinssatz c als konstant vorausgesetzt wurde, folgt aus (4) übrigens, daß die Renditen (r_t) paarweise unkorreliert sind.[1] Mit anderen Worten: die Gültigkeit des Barwertmodells impliziert die Unkorreliertheit der Renditen, eine Aussage, die mit den Ergebnissen zahlreicher empirischer Untersuchungen über Aktienkurse durchaus im Einklang steht (Siehe etwa Fama (1970)).

Da der unbedingte Erwartungswert von $r_{t+1} - c$ ebenfalls den Wert Null hat, ergibt sich

$$E(r_{t+1} \mid I_t) = E(r_{t+1}) = c .$$

Hier kommt eine Art 'Fairness'-Bedingung zum Ausdruck, die besagt, daß die erwartete Rendite $E(r_{t+1})$ eines uninformierten Investors mit der erwarteten Rendite $E(r_{t+1} \mid I_t)$ eines Investors, der die Informationsmenge I_t besitzt, übereinstimmt.

Das Fair Game Modell läßt sich übrigens auch mit Hilfe des Prozesses

$$v_t = \frac{p_t \cdot h_t}{(1 + c)^t}$$

charakterisieren. Es gilt nämlich

$$E(v_{t+1} \mid I_t) = E\left(\frac{p_{t+1} \cdot h_{t+1}}{(1 + c)^{t+1}} \,\middle|\, I_t\right)$$

---

[1] Eigenschaften von Martingalen bzw. Martingaldifferenzen finden sich z. B. in Billingsley (1986), Dhrymes (1989) oder Williams (1991).

$$= E\left(\frac{p_{t+1}}{(1+c)^{t+1}} \cdot \left(h_t + \frac{d_{t+1} \cdot h_t}{p_{t+1}}\right) \middle| I_t\right)$$

$$= E\left(\frac{p_{t+1} \cdot h_t + d_{t+1} \cdot h_t}{(1+c)^{t+1}} \middle| I_t\right)$$

$$= \frac{h_t}{(1+c)^t} \cdot E\left(\frac{p_{t+1} + d_{t+1}}{1+c} \middle| I_t\right)$$

Setzt man die Gültigkeit von (3) voraus (diese Aussage ist äquivalent mit (2) und(4)), so ergibt sich

$$E(v_{t+1} | I_t) = \frac{h_t}{(1+c)^t} \cdot p_t = v_t \tag{5}$$

Wegen $v_t \in I_t$ und $E|v_t|<\infty$, ist (v_t) ein Martingal bezüglich I_t. (5) wird daher auch als Martingalmodell bezeichnet.

Die Umkehrung gilt natürlich auch: Man sieht leicht, daß (2) eine Implikation von (5) ist. Insgesamt erhält man damit das Resultat, daß die Modelle (2), (3), (4) und (5) äquivalent sind und somit eine notwendige Bedingung für die Gültigkeit des Barwertmodells darstellen.

Man beachte, daß das Martingalmodell (5) nicht gleichbedeutend ist mit einer bestimmten Form der Random Walk Hypothese, die besagt, daß die Kurse (p_t) ein Martingal bezüglich I_t bilden, d. h.

$$E(p_{t+1} | I_t) = p_t. \tag{6}$$

(Eine derartige Version der Random Walk Hypothese wird z.B. von Granger (1992) verwendet)

Dies läßt sich nur erreichen, wenn man eine zusätzliche Restriktion einführt und zwar

$$c = \frac{E(d_{t+1} | I_t)}{p_t} \quad \text{für alle t.}$$

Unter dieser Bedingung ist nämlich die rechte Seite von

$$E(p_{t+1} | I_t) = (1+c) \cdot p_t - E(d_{t+1} | I_t)$$

gleich p_t und somit die Martingalbedingung erfüllt (siehe dazu auch Malliaris (1981) and Malliaris und Brock (1982)).

3. Bedingungen, unter denen das Barwertmodell und das Martingalmodell äquivalent sind

Im folgenden werden zwei Bedingungen betrachtet, die jede für sich die Äquivalenz von Barwertmodell und Martingalmodell garantieren. Dies impliziert natürlich auch die Äquivalenz zwischen dem Barwertmodell und den anderen in Abschnitt 2 angeführten Modellen.

Die erste Bedingung ist die Transversalitätsbedingung

$$\frac{E(p_{t+n} | I_t)}{(1+c)^n} \to 0 \quad \text{f. s.}$$

Unter dieser Bedingung läßt sich das Barwertmodell (1) aus dem Martingalmodell herleiten.

Sei

$$p_t = \frac{E(p_{t+1} + d_{t+1} | I_t)}{1+c} = \frac{E(d_{t+1} | I_t)}{1+c} + \frac{E(p_{t+1} | I_t)}{1+c}$$

(Dies ist nach Abschnitt 2 äquivalent zum Martingalmodell.)

Ersetzt man t durch t+1, so erhält man

$$p_{t+1} = \frac{E(p_{t+2} + d_{t+2} | I_{t+1})}{1+c}$$

Durch Einsetzen dieses Ausdrucks in die vorherige Gleichung ergibt sich

$$p_t = \frac{E(d_{t+1} | I_t)}{1+c} + \frac{E(E(p_{t+2} + d_{t+2} | I_{t+1}) | I_t)}{(1+c)^2}$$

$$= \frac{E(d_{t+1} | I_t)}{1+c} + \frac{E(p_{t+2} + d_{t+2} | I_t)}{(1+c)^2}$$

$$= \frac{E(d_{t+1}|I_t)}{1+c} + \frac{E(d_{t+2}|I_t)}{(1+c)^2} + \frac{E(p_{t+2}|I_t)}{(1+c)^2} .$$

Analog ersetzt man dann t+1 durch t+2 und setzt den Ausdruck für p_{t+2} in den entsprechenden Term der letzten Gleichung ein, u.s.w. Nach n Schritten erhält man dann die Darstellung

$$p_t = \sum_{i=1}^{n} \frac{E(d_{t+i}|I_t)}{(1+c)^i} + \frac{E(p_{t+n}|I_t)}{(1+c)^n} .$$

Wegen der Transversalitätsbedingung und weil p_t auf der linken Seite nicht von n abhängt, ergibt sich schließlich durch Grenzübergang

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{E(d_{t+i}|I_t)}{(1+c)^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E(d_{t+i}|I_t)}{(1+c)^i} = p_t .$$

Zusammen mit den in Abschnitt 2 angegebenen Implikationen liefert dieses Resultat die Äquivalenz der Modelle (1), (2), (3), (4) und (5).

Eine weitere Äquivalenzbedingung stellt die in Abschnitt 2 zur Herleitung der Martingaleigenschaft verwendete Bedingung

$$c = \frac{E(d_{t+1}|I_t)}{p_t}$$

dar. Es läßt sich zeigen, daß diese Bedingung, zusammen mit der Martingalbedingung (6), bereits das Barwertmodell impliziert (d. h. ohne Verwendung einer zusätzlichen Konvergenzbedingung). Die in Malliaris (1981) und Malliaris and Brock (1982) angegebene Implikation läßt sich also ohne weiteres umkehren. Diese Umkehrung soll jetzt gezeigt werden.

Wegen der obigen Bedingung gilt

$$c \cdot p_t = E(d_{t+1} | I_t)$$

bzw. $$c \cdot p_{t+1} = E(d_{t+2} | I_{t+1})$$

Betrachtet man bei der letzten Gleichung für jede Seite die bedingte Erwartung bezüglich I_t, so erhält man

$$E\,(c \cdot p_{t+1} \mid I_t) = E\,(E\,(d_{t+2} \mid I_{t+1}) \mid I_t)$$

$$= E\,(d_{t+2} \mid I_t)\,.$$

Zusammen mit der Martingaleigenschaft (6) ergibt sich damit

$$c \cdot p_t = E\,(d_{t+2} \mid I_t)\,.$$

Dies läßt sich natürlich verallgemeinern zu

$$c \cdot p_t = E\,(d_{t+i} \mid I_t) \quad \text{für alle } i \in N\,.$$

Dividiert man nun beide Seiten durch $(1+c)^i$, so ergibt sich schließlich der Barwertansatz

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{E(d_{t+i} \mid I_t)}{(1+c)^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c \cdot p_t}{(1+c)^i}$$

$$= c \cdot p_t \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(1+c)^i}$$

$$= p_t$$

wobei in der zweiten Gleichung die Konvergenz der geometrischen Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(1+c)^i} = \frac{1}{c}$ verwendet wurde.

Insgesamt liefert dies die Äquivalenz der Modelle (1), (2), (3), (4), (5) und (6).

4. Einige abschließende Bemerkungen zur Bedeutung des Martingalmodells

Die Unkorreliertheit von Aktienrenditen gehört zweifellos zu den am häufigsten getesteten 'Stylized facts' im Bereich der empirischen Kapitalmarktforschung. Samuelson (1965, 1973) hat bekanntlich darauf hingewiesen, daß die Unkorreliertheit von Renditen durchaus mit einem ökonomischen Modell in Einklang zu bringen ist. Die Bedeutung seiner Arbeit aus dem Jahre 1965 wird von LeRoy (1989) wie folgt hervorgehoben: "Most Analysts now consider

Samuelson's to be the most important paper in the efficient capital market literature because of its role in effecting this shift from the random walk model to the martingale model".

Die Bedeutung des Martingalmodells (bzw. des Fair Game Modells) läßt sich stichwortartig wie folgt beschreiben (siehe dazu auch LeRoy (1989)):[2]

a) Das Martingalmodell bewirkt den Übergang vom klassischen Random Walk Modell zu einem realistischeren Modell. Dies bedeutet insbesondere ein Abgehen von der Annahme unabhängiger, stationärer Inkremente.

b) Das Martingalmodell stellt eine Implikation eines elementaren ökonomischen Modells dar, nämlich des Barwertmodells.

c) Es ist kompatibel mit empirischen "Erkenntnissen", die aus zahlreichen Untersuchungen gewonnen wurden (z. B. unkorrelierte Renditen).

d) Das Martingalmodell stellt einen Angriff auf die Fundamentalanalyse dar: Die Gültigkeit dieses Modells impliziert (unter einer entsprechenden Konvergenzbedingung), daß der Kurs p_t gleich dem erwarteten abdiskontierten cash flow ist. Über- oder Unterbewertungen werden in diesem Modell also nicht zugelassen.

e) Die Anwendung statistischer Tests findet hier eine gewisse Rechtfertigung. Wird das Barwertmodell von Investoren "akzeptiert", so stellt dies eine Form von Qualitätsanforderung dar, die z. B. mit Hilfe statistischer Tests überprüft werden kann (Qualitätskontrolle). In diesem Fall treten die Investoren als Produzenten auf: sie "produzieren" die Kurse. (Siehe dazu auch Roberts (1959))

f) Das Martingalmodell stellt eine Beziehung her zwischen einem ökonomischen Modell und dem Begriff des Martingals, eines der wichtigsten Konzepte in der modernen Wahrscheinlichkeitstheorie. Welche Bedeutung Martingale mittlerweile in der modernen Finanz-

---

[2] Einige historisch interessante Details dazu finden sich im Buch von Bernstein (1992).

theorie haben, läßt sich unschwer an Hand der Bücher von Duffy (1988, 1992) und Dothan (1990) dokumentieren.

Literatur

Bernstein, P.L. (1992) *Capital Ideas*, The Free Press.

Billingsley, P. (1986) *Probability and Measure*, 2nd ed., John Wiley & Sons.

Dhrymes, P.J. (1989) *Topics in Advanced Econometrics: Probability Foundations*, Springer-Verlag.

Dothan, M. (1990) *Prices in Financial Markets*, Oxford University Press.

Duffie, D. (1988) *Security Markets: Stochastic Models*, Academic Press.

Duffie, D. (1992) *Dynamic Asset Pricing Theory*, Princeton University Press.

Fama, E.F. (1970) "Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work", Journal of Finance, 25, 383-416.

Gilles, C./LeRoy, S.F. (1991) "Econometric Aspects of the Variance-Bounds Tests: a Survey", Review of Financial Studies, Vol. 4, 4, 753-791.

Granger, C.W.J. (1992) "Forecasting Stock Market Prices: Lessons for Forecasters", International Journal of Forecasting, 8, 3-13.

LeRoy, S.F./Porter, R.D. (1981) "The Present-Value Relation: Tests Based on Implied Variance Bounds", Econometrica, 49, 555-574.

LeRoy, S.F. (1989) "Efficient Capital Markets and Martingales", Journal of Economic Literature, 27, 1583-1621.

Malliaris, A.G. (1981) "Martingale Methods in Financial Decision-Making", SIAM Review 23, 434-443.

Malliaris, A.G./Brock, W.A. (1982) *Stochastic Methods in Economics and Finance*, North-Holland.

Roberts, H. (1959) "Stock market 'patterns' and financial analysis: methodological suggestions" , Journal of Finance 14 (1), 1-10.

Samuelson, P. (1965) "Proof that Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly", Industrial Management Review, 6, 41-49.

Samuelson, P. (1973) "Proof that Properly Discounted Present Values Vibrate Randomly", Bell Journal of Economics and Management Science 4, 369-374.

Shiller, R. (1981) "Do Stock Prices Move Too Much to be Justified by Subsequent Changes in Dividends?", American Economic Review, 17, 421-436.

Williams, D. (1991) *Probability with Martingales*, Cambridge University Press.