FUNKTIONALANALYTISCHE GRUNDLAGEN DER SPEKTRALTHEORIE SCHWACH STATIONÄRER STOCHASTISCHER PROZESSE

Immanuel M. BOMZE

Forschungsbericht/
Research Memorandum No. 187

September 1983

A B S T R A C T

Spectral theory of weakly stationary random processes has become an important part of econometric theory and thus is of central interest for applications in social sciences. This work tries to give a simple but precise presentation of the mathematical methods employed by spectral theorists : while the first part deals with Hilbert space theoretical tools, the second part is devoted to important applications of them like the spectral representation of the process, the Wold-decomposition, linear filtering and ARMA-processes.

Z U S A M M E N F A S S U N G

Die Spektraltheorie schwach stationärer stochastischer Prozesse ist als wichtiger Bestandteil der ökonometrischen Theorie von zentralem Interesse für Anwendungen in sozial- und wirtschaftswissenschaftlicher Forschung. Diese Arbeit versucht eine einfache, doch präzise Darstellung der in der Spektraltheorie verwendeten mathematischen Methoden : nach Bereitstellung der Hilbertraum-theoretischen Hilfsmittel im ersten Teil bringt der zweite Teil wichtige Anwendungen wie die Spektraldarstellung des Prozesses, die Wold-Zerlegung, lineare Filterung und ARMA-Prozesse.

INHALTSVERZEICHNIS

0. EINLEITUNG

Die Spektraltheorie schwach stationärer stochastischer Prozesse ist als wichtiger Bestandteil der ökonometrischen Theorie nicht nur für die Grundlagenforschung, sondern auch für die Anwendungen auf sozial- und wirtschaftswissenschaftliche Problemstellungen von zentraler Bedeutung. Deshalb scheint eine präzise, knappe, jedoche einfache, weil elementar und konsequent aufbauende Darstellung der mathematischen Methoden, die in die Spektraltheorie Eingang gefunden haben, von einiger Bedeutung zu sein. Diese soll an mathematischen Vorkenntnissen nur so viel voraussetzen, wie es etwa dem Stoff eines zwei- bis viersemestrigen Mathematik-Grundkurses sozial- und wirtschaftswissenschaftlicher Studienrichtungen entspricht.

Eine solche Darstellung ist das Ziel dieser Arbeit. Hiebei wird besonders auf Übersichtlichkeit Wert gelegt, da in der ungeheuren Menge an Literatur zu diesem Thema meist entweder hauptsächlich Theorie betrieben wird, also auch Resultate ohne Konnex mit hier interessierenden Anwendungen ausführlich behandelt werden (etwa in [1]), oder aber im Sinne einer möglichst breiten Anwendungspalette, wie in [10], die benötigten Resultate äußerst knapp, manchmal mit nur angedeuteten Beweisen dargestellt werden. Schließlich gibt es auch anwendungsorientierte Werke (etwa [2]), wo zwar auf arithmetische Ausführlichkeit Wert gelegt wird, aber der Zusammenhang mit dem an sich einfachen theoretischen Überbau nicht immer ganz evident zu sein scheint.

Hier soll nun ein Kompromiß versucht werden :

- Nur solche Resultate werden in aufbauender Vorgangsweise angeführt, die im weiteren Zusammenhang nötig sind, wodurch das unter Umständen verwirrende "Lernen auf Vorrat" entfällt;

- diese Resultate aber werden ausführlichst bewiesen, wobei teilweise neuen, elementaren Methoden der Vorzug gegeben wurde.

Als typisches Beispiel für diese Vorgangsweise mag Proposition 1.1.19 gelten, die in dieser komprimierten Form selten in der gängigen Literatur zu finden ist. Im Sinne dieser Überlegungen erscheint es angemessen, sich auf die Untersuchung eindimensionaler Prozesse zu beschränken.

Der erste Teil befaßt sich mit der Theorie des Hilbertraums, insbesondere mit der Spektraldarstellung selbstadjungierter und unitärer Operatoren sowie stochastischen Integralen. Zu dieser Theorie gibt es vielerlei Zugänge, von denen sich die meisten mehr oder weniger subtiler Methoden aus Topologie und Algebra bedienen. Für den an tieferen theoretischen Zusammenhängen interessierten Leser mag bemerkenswert sein, daß anstatt des vielleicht etwas abstrakten modernen Zugangs über Isomorphie-Sätze wie den von Gelfand & Neumark, welche wiederum den Satz von Tychonow verwenden und die die Begriffsbildung der stetigen Operatorfunktion ermöglichen (siehe [7]) oder anstatt des früher öfters verwendeten Zugangs über die Integraldarstellung der Resolvente auf funktionentheoretischer Basis (siehe [1]) ein elementarer Beweis der Spektraldarstellung selbstadjungierter Operatoren gegeben wird, der geometrisch in dem Sinn ist, daß er sich sozusagen konstruktiv auf die Eigenschaften des Hilbertraums und der darauf wirkenden

Operatoren stützt, was sich vor allem in der Reduktion der Anzahl der benötigten Begriffe und Definitionen zugunsten des Überblicks auswirkt. Wo solche anderswo häufig gebraucht werden, sind sie fallweise - ohne sie weiter zu verwenden - in Bemerkungen angeführt, um Querverbindungen mit der gängigen Literatur zu erleichtern.

Ein weiterer Beweis des Spektralsatzes stammt von Lengyel & Stone [8] ; obwohl dieser ebenfalls als elementar bezeichnet wurde, unterscheidet sich jedoch von dem hier verwendeten unter anderem dadurch, daß er die Schwach-Kompaktheit der Einheitskugel benötigt, welche sich wiederum auf den Satz von Tychonow stützt, ein tiefliegendes Resultat, das nicht als konstruktiv anzusehen ist.

Der Aufbau erfolgte derart, daß das einzige benötigte "topologische" Resultat, das über die elementare Analysis auf dem Niveau der Potenzreihenentwicklungen der trigonometrischen Funktionen hinausgeht, der Satz von Stone & Weierstraß ist. In diesem Zusammenhang mag interessant sein, daß - analog zu den Überlegungen in Kapitel 1.1 und den sich daraus ergebenen Resultaten in Kapitel 1.3 - für den Beweis dieses Satzes im wesentlichen nur eine Konstruktion für die Quadratwurzel durchzuführen ist (siehe [4] sowie auch [3], pp. 391 - 394). Auch über den Satz von Fubini, bzw. den Satz von der monotonen Konvergenz oder von der partiellen Integration hinausgehende maßtheoretische Tatsachen werden nicht benötigt, wie etwa der Satz von Bochner oder sein diskretes Analogon, das trigonometrische Momentenproblem in [1] oder [10].

Derjenige Leser, der bereits über Kenntnisse im Umfange einer Einführungsvorlesung in die Funktionalanalysis verfügt, muß frühestens bei Proposition 1.1.14 "einsteigen", falls er den ersten Teil nicht überhaupt überblättern kann. Die Kapitel-Überschriften und -Einleitungen können darüber näheren Aufschluß geben.

Im zweiten Teil werden der Zeitbereich sowie der Lag-Operator eingeführt. Mit den im ersten Teil entwickelten Hilfsmitteln sind ebenso fundamentale wie nichttriviale Resultate wie die Konstruktion des Spektralbereichs sowie dessen Isomorphie zum Zeitbereich und die Wold-Zerlegung ganz einfach zu beweisen. Im letzten Kapitel wird auf die wichtige Methode der linearen Filterung sowie auf AR-, MA- und ARMA-Prozesse näher eingegangen.

An dieser Stelle möchte ich E. RESCHENHOFER, Institut für höhere Studien, Wien und G. SEEBER, Universität Innsbruck für ihre Anregungen herzlich danken, welche zum Entstehen des zweiten Teils maßgeblich beigetragen haben. Mein Dank gilt insbesondere auch B. M. PÖTSCHER, Technische Universität Wien für viele wertvolle Hinweise.

Nun einige Bemerkungen zur Zeichensetzung :
die Menge der natürlichen, ganzen, reellen bzw. komplexen Zahlen wird mit $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ bezeichnet. Für $\lambda \in \mathbb{C}$ ist $\mathrm{Re}\,\lambda$, $\mathrm{Im}\,\lambda$, $|\lambda|$ bzw. $\bar{\lambda}$ der Realteil, Imaginärteil, Betrag von λ bzw. die zu λ konjugiert komplexe Zahl. Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ bedeutet

$$]a,b] := \{\lambda \in \mathbb{R} \mid a < \lambda \leq b\}\ , \qquad [a,b] := \{a\} \cup\ ]a,b]\ .$$

Wie üblich bezeichnet für $k \in \mathbb{N}$ $k! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (k-1) \cdot k$;
weiters deuten die Pfeile $\rightarrow$ bzw. $\Rightarrow$ Abbildung bzw. Folgerung an. $\square$ kennzeichnet das Ende eines Beweises.

1.1 LINEARE OPERATOREN AUF HILBERTRÄUMEN

Neben grundlegenden Definitionen (Hilbertraum, Operator, Orthoprojektor usw.) und vorbereitenden Überlegungen ist hier die Definition der Quadratwurzel eines nichtnegativ definiten selbstadjungierten Operators von zentraler Bedeutung. Nachdem Existenz und Eindeutigkeit der Quadratwurzel gezeigt worden sind, wird der Absolutbetrag eines selbstadjungierten Operators naheliegenderweise als Quadratwurzel seines Quadrats definiert und mit dessen Hilfe der im dritten Kapitel wichtige positive Anteil eines selbstadjungierten Operators.

1.1.1 Definition : Sei $\mathcal{H}$ Vektorraum über $\mathbb{C}$ mit Nullelement o ;

die Abbildung $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$: $(x,y) \mapsto \langle x,y \rangle$ heißt

inneres Produkt auf $\mathcal{H}$, wenn gilt :

(i) $\langle \lambda x + x', y \rangle = \lambda \langle x,y \rangle + \langle x',y \rangle \ \forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\forall x,x',y \in \mathcal{H}$. 1)

(ii) $\langle y,x \rangle = \overline{\langle x,y \rangle} \ \forall x,y \in \mathcal{H}$.

(iii) $\langle x,x \rangle > 0 \quad \forall x \in \mathcal{H} \setminus \{o\}$.

1.1.2 Proposition : Sei für $x \in \mathcal{H}$ $\|x\| := \sqrt{\langle x,x \rangle} \geq 0$;

dann gilt : (i) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\mathcal{R}e\langle x,y \rangle + \|y\|^2$

(ii) $|\langle x,y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$

(iii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

für alle $x, y \in \mathcal{H}$ sowie für alle $\lambda \in \mathbb{C}$.

Beweis : (i) $\langle x+y,x+y \rangle = \langle x,x+y \rangle + \langle y,x+y \rangle = \overline{\langle x+y,x \rangle} + \overline{\langle x+y,y \rangle} =$

$= \overline{\langle x,x \rangle} + \overline{\langle y,x \rangle} + \overline{\langle x,y \rangle} + \overline{\langle y,y \rangle} = \|x\|^2 + \langle x,y \rangle + \overline{\langle x,y \rangle} + \|y\|^2$;

es ist $\lambda + \bar{\lambda} = 2\mathcal{R}e\lambda$ (sowie $\lambda\bar{\lambda} = |\lambda|^2$) für $\lambda \in \mathbb{C}$.

(ii) Wegen (i) ist $\|\lambda x\|^2 + 2\mathcal{R}e\langle \lambda x,y \rangle + \|y\|^2 = \|\lambda x+y\|^2 \geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$;

es gilt $\|\lambda x\|^2 = \langle \lambda x,\lambda x \rangle = \lambda \langle x,\lambda x \rangle = \lambda \overline{\langle \lambda x,x \rangle} = \lambda\bar{\lambda}\overline{\langle x,x \rangle} = |\lambda|^2 \|x\|^2$;

für $x = o$ ist $\langle x,y \rangle = \langle o,y \rangle = 0 \leq \|x\| \|y\|$ trivial; ist aber

$x \neq o \Rightarrow \|x\| > 0$, dann ist wegen obigem für $\lambda = -\overline{\langle x,y \rangle}/\|x\|^2 \in \mathbb{C}$

$$0 \leq \frac{|-\overline{\langle x,y \rangle}|^2}{\|x\|^4} \|x\|^2 + 2\mathcal{R}e\left(-\frac{\overline{\langle x,y \rangle}}{\|x\|^2} \langle x,y \rangle \right) + \|y\|^2 =$$

$$= \frac{|\langle x,y \rangle|^2}{\|x\|^2} + 2\mathcal{R}e\left(-\frac{|\langle x,y \rangle|^2}{\|x\|^2} \right) + \|y\|^2 = -\frac{|\langle x,y \rangle|^2}{\|x\|^2} + \|y\|^2 ,$$

also $|\langle x,y \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$, also $|\langle x,y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$.

1) $\lambda = 1$, $x' = o \Rightarrow \langle x,y \rangle = \langle 1x+o,y \rangle = \langle x,y \rangle + \langle o,y \rangle \Rightarrow \langle o,y \rangle = 0 \ \forall y \in \mathcal{H}$;
$\Rightarrow$: $\langle \lambda x,y \rangle = \langle \lambda x+o,y \rangle = \lambda \langle x,y \rangle + \langle o,y \rangle = \lambda \langle x,y \rangle \ \forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\forall x,y \in \mathcal{H}$.

(iii) $\|\lambda x\|^2 = |\lambda|^2\|x\|^2$ wurde bereits in (ii) gezeigt.

Aus (i) und (ii) folgt $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \leq$

$\leq \|x\|^2 + 2|\mathrm{Re}\langle x,y\rangle| + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|\langle x,y\rangle| + \|y\|^2 \leq$

$\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$. $\square$

<u>1.1.3 Bemerkung</u> : (i) 1.1.2(iii) sind zusammen mit

$\|x\| > 0 \quad \forall \; x \in \mathcal{H}\setminus\{0\}$ (folgt aus 1.1.1(iii))

die definierenden Eigenschaften einer <u>Norm</u> $\|.\|$ auf $\mathcal{H}$.

Diese erzeugt die sog. <u>Normtopologie</u> auf $\mathcal{H}$, welche mittels <u>Konvergenz</u> von Folgen beschrieben werden kann :

Seien $x_n \in \mathcal{H}$, $n \in \mathbb{N}$; man schreibt $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x$ ($x \in \mathcal{H}$) ,

wenn $\|x_n - x\| \to 0$ für $n \to \infty$ (oder auch $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$).

Abbildungen $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ bzw. $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ heißen <u>stetig</u>,

wenn aus $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x$ $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} f(x)$ bzw. $A(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} A(x)$ folgt.

Eine Teilmenge $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$ heißt <u>abgeschlossen</u>, wenn aus $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x$

und $x_n \in \mathcal{M} \; \forall n \in \mathbb{N}$ $x \in \mathcal{M}$ folgt; ein <u>Teilraum</u> $\mathcal{M}$ von $\mathcal{H}$

(das ist ein $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$ mit: $x , y \in \mathcal{M}, \lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow \lambda x + y \in \mathcal{M}, \mathcal{M} \neq \emptyset$),

der als Teilmenge abgeschlossen ist, heißt <u>abgeschlossener Teilraum</u>.

Schließlich nennt man eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{H}$ mit

$\|x_n - x_m\| \underset{n,m\to\infty}{\to} 0$ <u>Cauchyfolge</u>.

1.1.3 Bemerkung : (ii) Aus 1.1.2(iii) folgt $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$:

$x = x-y + y \Rightarrow \|x\| \leq \|x-y\| + \|y\| \Rightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$,

analog $\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| = \|x - y\|$. Daraus ergibt sich

die Stetigkeit der Abbildung $\mathcal{H} \to \mathbb{C} : x \mapsto \|x\|$, woraus mit

1.1.2(ii) gefolgert werden kann : $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x$, $y_n \xrightarrow[n \to \infty]{} y \Rightarrow$

$$|\langle x_n,y_n\rangle - \langle x,y\rangle| \leq |\langle x_n,y_n\rangle - \langle x,y_n\rangle| + |\langle x,y_n\rangle - \langle x,y\rangle| =$$

$$|\langle x_n-x,y_n\rangle| + |\langle x,y_n-y\rangle| \leq \|x_n-x\|\|y_n\| + \|x\|\|y_n-y\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0\|y\| + \|x\|0 = 0$$

$\Rightarrow \langle x_n,y_n\rangle \xrightarrow[n \to \infty]{} \langle x,y\rangle$ (Stetigkeit des inneren Produkts) .

1.1.4 Definition : Sei $\mathcal{H}$ Vektorraum über $\mathbb{C}$ mit innerem Produkt

$\langle .,..\rangle$; $(\mathcal{H}, \langle .,..\rangle)$ heißt Hilbertraum , wenn

$\mathcal{H}$ bezüglich der Norm $\|.\|$ vollständig ist, also jede Cauchyfolge

konvergiert : $x_n \in \mathcal{H}$, $n \in \mathbb{N}$, $\|x_n - x_m\| \xrightarrow[n,m \to \infty]{} 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\ x \in \mathcal{H}$ mit $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x$.

Sei ab nun $(\mathcal{H}, \langle .,..\rangle)$ für die Abschnitte 1.1 , 1.2 , 1.3 , 1.4 , 1.6 ein (fester) Hilbertraum mit der Norm $\|.\|$ wie in 1.1.2 .

1.1.5 Definition und Proposition : Eine Abbildung $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$

heißt (beschränkter linearer) Operator auf $\mathcal{H}$, wenn gilt :

$$A(\lambda x + y) = \lambda A(x) + A(y) \quad \forall x , y \in \mathcal{H} , \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \text{und}$$

$$\|A\| := \sup\{\|A(x)\| \mid \|x\| = 1\} < +\infty \quad .$$

Wir schreiben dann $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ und der Kürze wegen $Ax := A(x)$.

Es gilt $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\| \quad \forall x \in \mathcal{H}$.

Beweis : für $x = o$ wegen $Ax = A(0x) = 0Ax = o$ trivial ;

$x \neq o \Rightarrow \|x\| > 0 \Rightarrow \|\frac{1}{\|x\|}x\| = 1 \Rightarrow \frac{1}{\|x\|}\|Ax\| = \|\frac{1}{\|x\|}Ax\| =$

$= \|A(\frac{1}{\|x\|}x)\| \leq \|A\| \Rightarrow \|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$. $\square$

1.1.6 Satz : (i) $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \Rightarrow A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ist stetig .

(ii) Seien für $A , B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) , \lambda \in \mathbb{C}$

$\lambda A + B : \mathcal{H} \to \mathcal{H} , x \mapsto \lambda(Ax) + Bx$ sowie

$AB : \mathcal{H} \to \mathcal{H} , x \mapsto A(Bx)$; dann gilt :

$\lambda A + B , AB \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$; $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ bildet bezüglich dieser Operationen eine Algebra über $\mathbb{C}$ mit Nullelement $\mathcal{O} : x \mapsto o$ und Einselement $Id_{\mathcal{H}} : x \mapsto x$.

(Das heißt , $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist bezüglich $(A,B) \mapsto A + B := 1.A + B$ und $(\lambda,A) \mapsto \lambda A := \lambda A + \mathcal{O}$ ein Vektorraum über $\mathbb{C}$, bezüglich $(A,B) \mapsto A + B$ und $(A,B) \mapsto AB$ ein Ring mit Einselement $Id_{\mathcal{H}}$ mit der Eigenschaft $(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$.)

(iii) $A \mapsto \|A\|$ ist eine Norm auf $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, bezüglich der $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ vollständig ist ; es gilt $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ und $\|Id_{\mathcal{H}}\| = 1$.

(iv) $A_n \xrightarrow[n \to \infty]{} A$, $B_n \xrightarrow[n \to \infty]{} B \Rightarrow A_nB_n \xrightarrow[n \to \infty]{} AB$.

Beweis : (i) Nach 1.1.5 gilt $\|Ax_n - Ax\| = \|A(x_n - x)\| \leq \|A\|\|x_n - x\|$.

(ii) Klarerweise sind $\mathcal{O}$ und $Id_{\mathcal{H}} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit $\|\mathcal{O}\| = 0$ und $\|Id_{\mathcal{H}}\| = 1$.

Sei nun $x \in \mathcal{H}$ mit $\|x\| = 1$; dann ist $\|(\lambda A+B)x\| = \|\lambda Ax+Bx\| \leq$
$|\lambda|\|Ax\| + \|Bx\| \leq |\lambda|\|A\| + \|B\| < +\infty$, also $\|\lambda A+B\| \leq |\lambda|\|A\| + \|B\|$ sowie nach 1.1.5 $\|(AB)x\| = \|A(Bx)\| \leq \|A\|\|Bx\| \leq \|A\|\|B\|$, also $\|AB\| \leq \|A\|\|B\| < +\infty$, klarerweise gilt $(\lambda A+B)(\mu x+y) = \mu(\lambda A+B)x+(\lambda A+B)y$, $(AB)(\mu x+y) =$
$= \mu(AB)x+(AB)y$, also sind $(\lambda A+B)$ und (AB) Operatoren auf $\mathcal{H}$.

Man überprüft leicht, daß sämtliche Eigenschaften einer Algebra bei $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ erfüllt sind.

(iii) Wegen $\|(\lambda A)x\| = \|\lambda(Ax)\| = |\lambda|\|Ax\|$ gilt $\|\lambda A\| = |\lambda|\|A\|$;

wegen $1.A = A$ gilt nach (ii) $\|A+B\| = \|1.A+B\| \leq 1\|A\| + \|B\|$.

Ist $\|A\| = 0$, so gilt nach 1.1.5 $0 \leq \|Ax\| \leq \|A\|\|x\| = 0$,

also $Ax = o$ $\forall x \in \mathcal{H}$, also $A = \mathcal{O}$, somit ist $A \mapsto \|A\|$

(wegen $\|A\| \geq 0$) eine Norm auf $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Ist nun $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, also $\|A_n - A_m\| \underset{n,m\to\infty}{\to} 0$,

so ist für jedes (feste) $x \in \mathcal{H}$ auch $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ wegen

$$\|A_n x - A_m x\| = \|(A_n - A_m)x\| \leq \|A_n - A_m\|\|x\| \underset{n,m\to\infty}{\to} 0\|x\| \text{ (1.1.5 !)}$$

Cauchyfolge in $\mathcal{H}$, also $\exists\, x' \in \mathcal{H}$ mit $A_n x \underset{n\to\infty}{\to} x'$.

Sei $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $x \mapsto x'$; da wegen $|\|A_n\| - \|A_m\|| \leq \|A_n - A_m\|$

(vgl. 1.1.3(ii) !) auch $(\|A_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge in $\mathbb{C}$ ist,

gilt $\|A_n\| \underset{n\to\infty}{\to} a \in \mathbb{C}$, woraus nach 1.1.3(i) für $\|x\| = 1$

wegen $\|A_n x\| \leq \|A_n\|$ $\forall n \in \mathbb{N}$ folgt : $\|A(x)\| = \|\lim_{n\to\infty} A_n x\| =$

$= \lim_{n\to\infty} \|A_n x\| \leq \lim_{n\to\infty} \|A_n\| = a$, also $\|A\| \leq a < +\infty$.

$A(\lambda x+y) = \lim_{n\to\infty} A_n(\lambda x+y) = \lim_{n\to\infty} (\lambda A_n x + A_n y) = \lambda \lim_{n\to\infty} A_n x +$

$\lim_{n\to\infty} A_n y = \lambda A(x) + A(y)$, also $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig und N sodaß $\|A_n - A_m\| < \varepsilon/2$ $\forall n,m > N$;

wähle für $x \in \mathcal{H}$ mit $\|x\| = 1$ ein $m_x > N$ mit $\|Ax - A_{m_x} x\| < \varepsilon/2$;

dann gilt $\forall n > N$: $\|(A-A_n)x\| \leq \|Ax - A_{m_x} x\| + \|A_{m_x} x - A_n x\| < \varepsilon/2 +$

$\|(A_{m_x} - A_n)x\| \leq \varepsilon/2 + \|A_n - A_{m_x}\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, also $\|A-A_n\| \leq \varepsilon$,

also $A_n \to A$ in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ für $n \to \infty$.

(iv) $A_nB_n - AB = (A_n - A)B + A(B_n - B) \quad \forall n \in \mathbb{N}$, (iii) $\Rightarrow$

$$\|A_nB_n - AB\| \leq \|A_n - A\|\|B_n\| + \|A\|\|B_n - B\| \underset{n\to\infty}{\to} 0\|B\| + \|A\|0 = 0 \quad . \square$$

<u>1.1.7 Definition und Proposition</u> : Sei $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$ Teilmenge ;

sei $\mathcal{M}^{\perp} := \{x \in \mathcal{H} | \langle x,y\rangle = 0 \quad \forall y \in \mathcal{M}\}$. Dann ist $\mathcal{M}^{\perp}$ ein abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{H}$ und $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}^{\perp} = \mathcal{M} \cap \{o\}$.

Es gilt : $\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}_2 \Rightarrow \mathcal{M}_2^{\perp} \subseteq \mathcal{M}_1^{\perp}$.

<u>Beweis</u> : $\lambda \in \mathbb{C}$, x , $x' \in \mathcal{M}^{\perp} \Rightarrow \langle \lambda x + x', y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle + \langle x',y\rangle = 0$

für alle $y \in \mathcal{M}$; $x_n \in \mathcal{M}^{\perp}, n \in \mathbb{N}$, $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x \Rightarrow$ (1.1.3(ii) !)

$$\langle x,y\rangle = \langle \lim_{n\to\infty} x_n, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_n,y\rangle = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 \quad \forall y \in \mathcal{M} \Rightarrow x \in \mathcal{M}^{\perp} ;$$

Also ist $\mathcal{M}^{\perp}$ ein abgeschlossener Teilraum (vgl. 1.1.3(i) !) , da $o \in \mathcal{M}^{\perp}$ (klar !) ; $x \in \mathcal{M} \cap \mathcal{M}^{\perp} \Rightarrow \|x\|^2 = \langle x,x\rangle = 0 \Rightarrow x = o$, Rest trivial.

<u>1.1.8 Proposition</u> : Sei $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$ abgeschlossener Teilraum ; dann gilt :

(i) $\forall x \in \mathcal{H} \quad \exists! \ x_{\mathcal{M}} \in \mathcal{M}$ mit $\|x - x_{\mathcal{M}}\| < \|x - y\| \quad \forall y \in \mathcal{M} \setminus \{x_{\mathcal{M}}\}$.

(ii) $x - x_{\mathcal{M}} \in \mathcal{M}^{\perp} \quad \forall x \in \mathcal{H}$, und wenn $x = x' + x''$ mit

$x' \in \mathcal{M}$, $x'' \in \mathcal{M}^{\perp}$, so ist $x' = x_{\mathcal{M}}$ und $x'' = x - x_{\mathcal{M}}$.

(iii) $(\lambda x + y)_{\mathcal{M}} = \lambda x_{\mathcal{M}} + y_{\mathcal{M}} \quad \forall x , y \in \mathcal{H}, \ \forall \lambda \in \mathbb{C}$.

(iv) $\mathcal{M} = (\mathcal{M}^{\perp})^{\perp}$.

<u>Beweis</u>(i) Sei $d := \inf\{\|x - y\| \mid y \in \mathcal{M}\} \geq 0$; dann $\exists \ y_n \in \mathcal{M}$, $n \in \mathbb{N}$,

mit $d \leq \|x - y_n\| \leq d + 1/n \quad \forall n \in \mathbb{N}$; wegen 1.1.2(i) gilt $\forall x,y \in \mathcal{H}$:

$$\|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x,-y\rangle + \|y\|^2 + \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + \|y\|^2$$
$$= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad . \qquad (*)$$

Deswegen gilt $\|y_n - y_m\|^2 = \|(x-y_m)-(x-y_n)\|^2 = 2(\|x-y_m\|^2+\|x-y_n\|^2) -$
$- \|(x-y_m)+(x-y_n)\|^2 \leq 2([d+1/m]^2 + [d+1/n]^2) - \|2(x - \frac{1}{2}[y_m+y_n])\|^2$;

Nun ist $\frac{1}{2}(y_m + y_n) \in \mathcal{M}$, weshalb $\|2(x - \frac{1}{2}[y_m+ y_n])\|^2 \geq 4d^2$,

also $\|y_n - y_m\|^2 \leq 2([d+1/m]^2 + [d+1/n]^2) - 4d^2 \underset{n,m \to \infty}{\longrightarrow} 0$.

Daher existiert ein $y \in \mathcal{H}$ mit $y_n \to y$ für $n \to \infty$; weil $\mathcal{M}$ abgeschlossen ist, gilt $y \in \mathcal{M}$..

Wegen $d \leq \|x - y_n\| \leq d + 1/n$ gilt $\|x - y\| = d$.

Sei nun $y' \in \mathcal{M}$ mit $\|x - y'\| = d$; dann ist $\frac{1}{2}(y' + y) \in \mathcal{M}$,
wegen $(*)$ gilt $\|y' - y\|^2 = \|(x-y)-(x-y')\|^2 = 2(\|x-y\|^2 + \|x-y'\|^2) -$
$- \|(x-y)+(x-y')\|^2 = 4d^2 - (2\|x - \frac{1}{2}(y+y')\|)^2 \leq 4d^2 - 4d^2 = 0$,
also $y' = y =: x_{\mathcal{M}}$.

(ii) Sei $f_y(t) := \|x - x_{\mathcal{M}} + ty\|^2$, $y \in \mathcal{M}$, $t \in \mathbb{R}$; dann ist wegen (i) und weil $x_{\mathcal{M}} - ty \in \mathcal{M}\ \forall t \in \mathbb{R}$ $f_y(t) \geq d^2 = \|x - x_{\mathcal{M}}\|^2 = f_y(0)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, also $0 = \frac{d}{dt} f_y(0) = \frac{d}{dt}(\|x-x_{\mathcal{M}}\|^2 + 2t\,\mathrm{Re}\langle x-x_{\mathcal{M}},y\rangle + t^2\|y\|^2)\Big|_{t=0} = 2\,\mathrm{Re}\langle x-x_{\mathcal{M}},y\rangle \Rightarrow \mathrm{Re}\langle x-x_{\mathcal{M}},y\rangle = 0$;

nun ist für $\lambda \in \mathbb{C}$ $\mathrm{Re}(-i\lambda) = \mathrm{Im}\,\lambda$, also

$\mathrm{Im}\langle x-x_{\mathcal{M}},y\rangle = \mathrm{Re}(-i\langle x-x_{\mathcal{M}},y\rangle) = \mathrm{Re}(\overline{i\langle y,x-x_{\mathcal{M}}\rangle}) = \mathrm{Re}\overline{\langle iy,x-x_{\mathcal{M}}\rangle} =$

$= \mathrm{Re}\langle x-x_{\mathcal{M}},iy\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt} f_{y'}(0) = 0$, wobei $y' = iy \in \mathcal{M}\ \forall y \in \mathcal{M}$.

Also gilt $0 = 0 + i0 = \langle x-x_{\mathcal{M}},y\rangle\ \forall y \in \mathcal{M} \Leftrightarrow x - x_{\mathcal{M}} \in \mathcal{M}^\perp$.

Ist $x = x' + x''$, $x' \in \mathcal{M}$, $x'' \in \mathcal{M}^\perp$, so gilt $x' - x_{\mathcal{M}} = x - x'' - x_{\mathcal{M}} =$
$= (x-x_{\mathcal{M}}) - x'' \in \mathcal{M}^\perp$, da ja auch $\mathcal{M}^\perp$ nach 1.1.7 Teilraum ist;
aber $u := x' - x_{\mathcal{M}} \in \mathcal{M}$, da $\mathcal{M}$ Teilraum ist, also $u \in \mathcal{M} \cap \mathcal{M}^\perp = \{0\}$
nach 1.1.7; $\Rightarrow x' = x_{\mathcal{M}}$, $x'' = x - x_{\mathcal{M}}$.

(iii) Sei $z = \lambda x + y$; dann ist $z' = \lambda x_{\mathcal{M}} + y_{\mathcal{M}} \in \mathcal{M}$ sowie $z'' = \lambda(x-x_{\mathcal{M}}) + (y-y_{\mathcal{M}}) \in \mathcal{M}^{\perp}$ und es gilt $z' + z'' = z$; Wegen (ii) muß daher $z_{\mathcal{M}} = z' = \lambda x_{\mathcal{M}} + y_{\mathcal{M}}$ sein.

(iv) $x \in \mathcal{M}$, $y \in \mathcal{M}^{\perp} \Rightarrow \langle y,x\rangle = \overline{\langle x,y\rangle} = \bar{0} = 0 \Rightarrow x \in (\mathcal{M}^{\perp})^{\perp}$, also $\mathcal{M} \subseteq (\mathcal{M}^{\perp})^{\perp}$; $x \in (\mathcal{M}^{\perp})^{\perp}$, (ii) $\Rightarrow \exists x' \in \mathcal{M}$, $x'' \in \mathcal{M}^{\perp}$ mit $x = x' + x''$;

$\|x''\|^2 = \langle x'',x''\rangle + 0 = \langle x'',x''\rangle + \langle x',x''\rangle = \langle x,x''\rangle = 0$,

da ja $x'' \in \mathcal{M}^{\perp}$ und $x \in (\mathcal{M}^{\perp})^{\perp}$, also ist $x'' = o \Rightarrow x = x' \in \mathcal{M}$, also $(\mathcal{M}^{\perp})^{\perp} \subseteq \mathcal{M}$; insgesamt gilt also $\mathcal{M} = (\mathcal{M}^{\perp})^{\perp}$. □

<u>1.1.9 Satz</u> : Sei $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ stetig mit $f(\lambda x+y) = \lambda f(x) + f(y)$ für alle x , $y \in \mathcal{H}, \lambda \in \mathbb{C}$. Dann existiert genau ein $z_f \in \mathcal{H}$ sodaß $f(x) = \langle x,z_f\rangle \quad \forall x \in \mathcal{H}$ ist und es gilt

$$\sup\{|f(x)| \mid \|x\| = 1\} = \|z_f\| .$$

<u>Beweis</u> : Wenn $f(x) = 0 \ \forall x \in \mathcal{H}$, ist $z_f = o$ wählbar ; andernfalls ist $\mathcal{M} := f^{-1}(\{0\}) = \{x \in \mathcal{H} \mid f(x) = 0\} \subsetneq \mathcal{H}$;

$\mathcal{M}$ ist ein abgeschlossener Teilraum, da $f(x) = f(y) = 0$, $\lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow f(\lambda x+y) = \lambda 0 + 0 = 0$ und $f(x_n) = 0$, $n \in \mathbb{N}$, $x_n \to x$ für $n \to \infty \Rightarrow 0 = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ gilt.

Wäre nun $\mathcal{M}^{\perp} = \{o\}$, so gälte nach 1.1.8(iv) $\mathcal{M} = (\mathcal{M}^{\perp})^{\perp} = \{o\}^{\perp}$, aber klarerweise ist $\{o\}^{\perp} = \mathcal{H}$, ein Widerspruch ! Also $\exists\ y \in \mathcal{M}^{\perp}$ mit $\|y\| = 1$ ($y \neq o \Rightarrow \frac{1}{\|y\|} y \in \mathcal{M}^{\perp}$, $\|\frac{1}{\|y\|} y\| = 1$) ; 1.1.7 $\Rightarrow$

$y \in \mathcal{M}^{\perp} \setminus \{o\} \subseteq \mathcal{H} \setminus \mathcal{M} \Rightarrow f(y) \neq 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{f(y)} y \in \mathcal{M}^{\perp} \ \forall x \in \mathcal{H}$.

Weiters ist $f(x - \frac{f(x)}{f(y)} y) = f(x) - \frac{f(x)}{f(y)} f(y) = 0$, also

$x - \frac{f(x)}{f(y)} y \in \mathcal{M}$, sodaß $\langle x,y\rangle = \langle (x - \frac{f(x)}{f(y)} y),y\rangle + \langle \frac{f(x)}{f(y)} y,y\rangle$

$= 0 + \frac{f(x)}{f(y)} \|y\|^2 = \frac{f(x)}{f(y)}$, also $\langle x,\overline{f(y)}y\rangle = f(x) \ \forall x \in \mathcal{H}$,

also $z_f = \overline{f(y)}y$ wählbar ist.

Nach 1.1.2(ii) ist für $\|x\| = 1$ $\quad |f(x)| = |\langle x, z_f\rangle| \leq \|x\| \, \|z_f\| = \|z_f\|$,

also $\sup\{|f(x)| \mid \|x\| = 1\} \leq \|z_f\|$; ist $z_f \neq o$, so gilt für

$z = \frac{1}{\|z_f\|} z_f \in \mathcal{H}$ $\quad (\Rightarrow \|z\| = 1)$ $\; |f(z)| = |\frac{1}{\|z_f\|} \langle z_f, z_f\rangle| =$

$= \frac{1}{\|z_f\|} \|z_f\|^2 = \|z_f\|$, also ist $\sup\{|f(x)| \mid \|x\| = 1\} \geq \|z_f\|$.

Nun zur Eindeutigkeit : $\quad$ Ist $\langle x, z_f\rangle = f(x) = \langle x, z'\rangle \; \forall x \in \mathcal{H}$,

so gilt $\|z_f - z'\|^2 = \langle z_f - z', z_f - z'\rangle = \langle z_f - z', z_f\rangle - \langle z_f - z', z'\rangle = 0$,

also $z_f = z'$. $\square$

<u>1.1.10 Satz</u> : Für $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ gibt es ein eindeutig bestimmtes

$A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit $\quad \langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle \quad \forall x, y \in \mathcal{H}$.

Es gilt $\quad (\lambda A + B)^* = \bar{\lambda} A^* + B^*$, $\quad (AB)^* = B^* A^*$, $\quad (A^*)^* = A$

sowie $\|A^*\| = \|A\|$ für alle $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\lambda \in \mathbb{C}$ und :

$$A_n \to A \quad \text{für } n \to \infty \quad \Rightarrow \quad A_n^* \to A^* \quad \text{für } n \to \infty .$$

<u>Beweis</u> : Sei $f_y(x) := \langle Ax, y\rangle$, $y \in \mathcal{H}$; dann ist $f_y : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ und

$f_y(\lambda x + x') = \langle A(\lambda x + x'), y\rangle = \langle \lambda Ax + Ax', y\rangle = \lambda\langle Ax, y\rangle + \langle Ax', y\rangle =$

$\lambda f_y(x) + f_y(x')$ und $\quad x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x \;\Rightarrow\; f_y(x_n) = \langle Ax_n, y\rangle \xrightarrow[n \to \infty]{} \langle Ax, y\rangle$

(nach 1.1.3(ii) und 1.1.6(i)) $= f_y(x)$; nach 1.1.9 gibt es

genau ein z_{f_y} mit $\langle Ax, y\rangle = \langle x, z_{f_y}\rangle \quad \forall x \in \mathcal{H}$.

Sei nun $A^* : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $\; y \mapsto z_{f_y} =: A^* y$ $\quad$; dann ist wegen

$\langle Ax, \lambda y + y'\rangle = \bar{\lambda}\langle Ax, y\rangle + \langle Ax, y'\rangle = \bar{\lambda}\langle x, A^* y\rangle + \langle x, A^* y'\rangle = \langle x, \lambda A^* y + A^* y'\rangle$

für alle $x \in \mathcal{H}$ $\; A^*(\lambda y + y') = \lambda A^* y + A^* y'$ $\quad$ sowie wegen $\|y\| = 1 \;\Rightarrow$

$\Rightarrow \; |f_y(x)| = |\langle Ax, y\rangle| \leq \|Ax\| \, \|y\| \leq \|A\| \, \|y\| = \|A\| \quad \forall x \in \mathcal{H}$ mit $\|x\| = 1$,

1.1.9 $\Rightarrow \|A^* y\| = \|z_{f_y}\| \leq \|A\|$, also $\|A^*\| \leq \|A\| < +\infty$, also $A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Die Eindeutigkeit von A^* folgt aus der Eindeutigkeit von $z_{f_y} = A^* y$.

Aus $\langle(\lambda A+B)x,y\rangle = \langle\lambda Ax+Bx,y\rangle = \lambda\langle Ax,y\rangle + \langle Bx,y\rangle =$

$= \lambda\langle x,A^*y\rangle + \langle x,B^*y\rangle = \langle x,\bar{\lambda}A^*y+B^*y\rangle = \langle x,(\bar{\lambda}A^*+B^*)y\rangle \quad \forall x\in\mathcal{H}$

folgt $(\lambda A+B)^*y = (\bar{\lambda}A^*+B^*)y \quad \forall y\in\mathcal{H}$, also

$(\lambda A+B)^* = \bar{\lambda}A^*+B^*$; ebenso folgt aus $\langle(AB)x,y\rangle = \langle A(Bx),y\rangle =$

$= \langle Bx,A^*y\rangle = \langle x,B^*(A^*y)\rangle = \langle x,(B^*A^*)y\rangle \quad \forall x ,y \in \mathcal{H}$

$(AB)^* = B^*A^*$ sowie aus $\langle A^*x,y\rangle = \overline{\langle y,A^*x\rangle} = \overline{\langle Ay,x\rangle} =$

$= \langle x,Ay\rangle \quad (A^*)^* = A$.

Bereits gezeigt wurde $\|A^*\|\leq\|A\|$; nun gilt $\|A\| = \|(A^*)^*\| \leq$

$\leq \|A^*\|$, also $\|A\| = \|A^*\|$.

Daraus folgt nun $\|A_n^* - A^*\| = \|(A_n - A)^*\| = \|A_n - A\|$,

also $A_n \to A \Rightarrow A_n^* \to A^*$ für $n\to\infty$. □

<u>1.1.11 Definition</u> : $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ heißt <u>selbstadjungiert</u> , falls

$A = A^*$ ist $(\Leftrightarrow \langle Ax,y\rangle = \langle x,Ay\rangle \ \forall x , y \in \mathcal{H})$

<u>1.1.12 Proposition</u> : Für $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ gilt

(i) $\langle Ax,x\rangle = 0 \ \forall x\in\mathcal{H} \Leftrightarrow A = \mathcal{O}$.

(ii) $\langle Ax,x\rangle \in \mathbb{R} \ \forall x\in\mathcal{H} \Leftrightarrow A = A^*$.

<u>Beweis</u> : (i) "$\Leftarrow$" ist trivial ; "$\Rightarrow$" :

$0 = \langle A(x+y),x+y\rangle = \langle Ax+Ay,x+y\rangle = \langle Ax,x\rangle + \langle Ay,x\rangle + \langle Ax,y\rangle + \langle Ay,y\rangle =$

$= 0 + \langle Ay,x\rangle + \langle Ax,y\rangle + 0 = \langle Ax,y\rangle + \langle Ay,x\rangle \quad \forall x,y\in\mathcal{H}$;

Da mit $x\in\mathcal{H}$ auch $ix\in\mathcal{H}$ ist , gilt nach obigem

$0 = \langle A(ix),y\rangle + \langle Ay,ix\rangle = \langle iAx,y\rangle + \overline{\langle ix,Ay\rangle} = i(\langle Ax,y\rangle - \overline{\langle x,Ay\rangle})$,

also $\langle Ax,y\rangle - \langle Ay,x\rangle = 0 \quad \forall x,y\in\mathcal{H}$. Daraus ergibt sich

$\langle Ax,y\rangle = 0 \quad \forall x,y\in\mathcal{H}$, setze $y = Ax \Rightarrow \|Ax\|^2 = \langle Ax,y\rangle = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow Ax = 0 \quad \forall x\in\mathcal{H} \Rightarrow A = \mathcal{O}$.

(ii, $\Rightarrow$) $\langle Ax,x\rangle = \langle x,A^*x\rangle = \overline{\langle A^*x,x\rangle} = \langle A^*x,x\rangle \;\forall x\in\mathcal{H} \;\Rightarrow$

$\langle (A-A^*)x,x\rangle = 0 \;\forall x\in\mathcal{H}$, (i) $\Rightarrow$ $A - A^* = \mathcal{O}$ $\Rightarrow$ $A = A^*$.

(ii, $\Leftarrow$) $\langle Ax,x\rangle = \langle x,A^*x\rangle = \langle x,Ax\rangle = \overline{\langle Ax,x\rangle}$ $\Rightarrow$ $\langle Ax,x\rangle\in\mathbb{R}$ $\forall x\in\mathcal{H}$. □

<u>1.1.13 Definition und Proposition</u> : Seien A , $B\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit

$A = A^*$, $B = B^*$; man schreibt <u>$A \leq B$</u> , falls

$\langle Ax,x\rangle \leq \langle Bx,x\rangle$ $\forall x\in\mathcal{H}$ gilt .

Es gilt für A , B , $C \in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit $A = A^*$, $B = B^*$, $C = C^*$

(i) $A \leq A$,

(ii) $A \leq B$, $B \leq A$ $\Rightarrow$ $A = B$,

(iii) $A \leq B$, $B \leq C$ $\Rightarrow$ $A \leq C$,

" $\leq$ " ist also eine (teilweise) Ordnung auf $\{A\in\mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid A = A^*\}$.

<u>Beweis</u> : (i) , (iii) sind aus der Definition ersichtlich.

(ii) : $A \leq B$, $B \leq A$ $\Rightarrow$ $\langle Ax,x\rangle = \langle Bx,x\rangle$ $\forall x\in\mathcal{H}$ $\Rightarrow$

$\langle (A-B)x,x\rangle = 0$ $\forall x\in\mathcal{H}$, 1.1.12(i) $\Rightarrow$ $A - B = \mathcal{O}$ $\Rightarrow$ $A = B$. □

<u>1.1.14 Proposition</u> : Sei $A^* = A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$; dann gilt

(i) $\mathcal{O} \leq A$ $\Rightarrow$ $|\langle Ax,y\rangle|^2 \leq \langle Ax,x\rangle\langle Ay,y\rangle$ $\forall x,y\in\mathcal{H}$.

(ii) Sei $\alpha := \inf\left\{\frac{\langle Ax,x\rangle}{\langle x,x\rangle} \;\middle|\; x\in\mathcal{H}\setminus\{o\}\right\}$; dann gilt $\alpha \geq -\|A\|$

sowie : $\frac{\langle Ax,x\rangle}{\langle x,x\rangle} = \alpha \Leftrightarrow Ax = \alpha x$, $x \neq o$.

<u>Beweis</u> : (i) Wegen $\mathcal{O} \leq A$ und $A = A^*$ gilt $\forall x,y\in\mathcal{H}, \forall\lambda\in\mathbb{C}$:

$$\left.\begin{aligned} 0 \leq \langle A(x+\lambda y),x+\lambda y\rangle &= \langle Ax,x\rangle + \lambda\langle Ay,x\rangle + \bar\lambda\langle Ax,y\rangle + \lambda\bar\lambda\langle Ay,y\rangle = \\ &= \langle Ax,x\rangle + \lambda\langle Ay,x\rangle + \bar\lambda\langle x,Ay\rangle + \lambda\bar\lambda\langle Ay,y\rangle = \\ &= \langle Ax,x\rangle + \lambda\langle Ay,x\rangle + \overline{\lambda\langle Ay,x\rangle} + \lambda\bar\lambda\langle Ay,y\rangle \end{aligned}\right\} (*)$$

Ist nun $\langle Ay,y\rangle \neq 0$, so setzt man $\lambda = -\frac{\overline{\langle Ay,x\rangle}}{\langle Ay,y\rangle} \in \mathbb{C}$

und erhält analog zum Beweis von 1.1.2(ii) aus $(*)$ das Resultat.

Ist $\langle Ax,x\rangle \neq 0$, so vertauscht man x mit y und erhält wie oben wegen $|\langle Ax,y\rangle| = |\langle x,Ay\rangle| = |\overline{\langle Ay,x\rangle}| = |\langle Ay,x\rangle|$ die Behauptung.

Ist $\langle Ax,x\rangle = \langle Ay,y\rangle = 0$, so sei $\lambda = -\overline{\langle Ay,x\rangle}$;
aus $(*)$ folgt dann $0 \leq 0 - |\langle Ay,x\rangle|^2 - |\overline{\langle Ay,x\rangle}|^2 + 0 =$
$= -2|\langle Ax,y\rangle|^2$, also $|\langle Ax,y\rangle|^2 \leq 0 = \langle Ax,x\rangle\langle Ay,y\rangle$.

(ii) Wegen $\langle Ax,x\rangle \geq -|\langle Ax,x\rangle| \geq -\|Ax\|\|x\| \geq -\|A\|\|x\|^2 \quad \forall x \in \mathcal{H}$

gilt für $x \neq o$ $\frac{\langle Ax,x\rangle}{\langle x,x\rangle} \geq -\|A\|$, weswegen $\alpha \geq -\|A\|$ ist.

"$\Leftarrow$" ist trivial; "$\Rightarrow$" : Wegen $\frac{\langle Ax,x\rangle}{\langle x,x\rangle} \geq \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle (A-\alpha Id_{\mathcal{H}})x,x\rangle \geq 0$ (und $(A-\alpha Id_{\mathcal{H}})^* = A-\alpha Id_{\mathcal{H}}$) gilt

$\sigma \leq A - \alpha Id_{\mathcal{H}} =: B$, also nach (i) $|\langle Bx,y\rangle|^2 \leq \langle Bx,x\rangle\langle By,y\rangle$;

Ist nun $x \neq o$ und $\langle Ax,x\rangle = \alpha\langle x,x\rangle \Leftrightarrow \langle Bx,x\rangle = 0$, so gilt für $y := Bx$ nach obigem $\|Bx\|^4 = |\langle Bx,y\rangle|^2 \leq 0\langle By,y\rangle = 0$,
also $Bx = o$ oder $Ax = \alpha x$, was zu zeigen war. $\square$

<u>1.1.15 Satz</u> : Seien $A_n^* = A_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $A_n \leq A_{n+1}$ und $\|A_n\| \leq C$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Dann gilt :

$\exists\, A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit $A^* = A$ und $A_n x \underset{n\to\infty}{\to} Ax$ für alle $x \in \mathcal{H}$

sowie $A_n \leq A$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

<u>Beweis</u> : Da $\left(\langle A_n x,x\rangle\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende und durch $C\|x\|^2$ beschränkte Folge ist (wegen 1.1.2(ii)ist ja $|\langle A_n x,x\rangle| \leq \|A_n x\|\|x\|$!), gilt $\langle A_n x,x\rangle \underset{n\to\infty}{\to} a(x) \in \mathbb{R}$ $\forall x \in \mathcal{H}$. Also gilt $\langle A_n x,y\rangle$ =

$$= \frac{1}{4}\left(\langle A_n(x+y),x+y\rangle - \langle A_n(x-y),x-y\rangle\right) + \frac{i}{4}\left(\langle A_n(x+iy),x+iy\rangle - \right.$$

$$\left. - \langle A_n(x-iy),x-iy\rangle\right) \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{4}\left(a(x+y)-a(x-y)\right) + \frac{i}{4}\left(a(x+iy)-a(x-iy)\right)$$

$=: a(x,y) \in \mathbb{C}$ für alle $x,y \in \mathcal{H}$. Klarerweise ist $f_x :\ \begin{matrix} y \mapsto \overline{a(x,y)} \\ \mathcal{H} \to \mathbb{C}\end{matrix}$ linear[1] und wegen $|f_x(y') - f_x(y)| = \lim_{n\to\infty}|\langle A_n x,y'-y\rangle| \leq C\|x\|\|y'-y\|$ auch stetig. 1.1.9 $\Rightarrow$ $f_x(y) = \langle y,Ax\rangle$, $Ax \in \mathcal{H}$; also $a(x,y) = \langle Ax,y\rangle$.

Da $x \mapsto a(x,y)$ linear ist, muß auch $x \mapsto Ax$ linear sein; wegen $\|Ax\|^2 = \langle Ax,Ax\rangle = a(x,Ax) = \lim_{n\to\infty}\langle A_n x,Ax\rangle \leq C\|x\|\|Ax\|$ ist $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

$$\langle Ax,y\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle A_n x,y\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle x,A_n y\rangle = \lim_{n\to\infty}\overline{\langle A_n y,x\rangle} = \overline{\langle Ay,x\rangle} = \langle x,Ay\rangle$$

$\Rightarrow$ $A^* = A$; klarerweise gilt $a(x) = a(x,x) = \langle Ax,x\rangle$,also $A_n \leq A$.

Seien $A_n' := \frac{1}{2C}(A_n - A_1) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $n \in \mathbb{N}$; dann $\langle A_n' x,y\rangle \underset{n\to\infty}{\to} \langle A'x,y\rangle$ für $A' := \frac{1}{2C}(A - A_1)$ $\forall\, x,y \in \mathcal{H}$, wegen $\|A_n' - A_m'\| \leq \frac{1}{2C}(\|A_n\| + \|A_m\|) \leq 1$ $\forall n,m \in \mathbb{N}$ sowie wegen $0 \leq A_n' - A_m'$ für $n > m$ und 1.1.14(i) ($y = (A_n' - A_m')x$) ist

$$\|A_n'x - A_m'x\|^4 = |\langle (A_n'-A_m')x,(A_n'-A_m')x\rangle|^2 \leq \langle (A_n'-A_m')x,x\rangle\langle (A_n'-A_m')^2 x,(A_n'-A_m')x\rangle \leq$$

$$\leq (\langle A_n'x,x\rangle - \langle A_m'x,x\rangle)\|A_n'-A_m'\|^3\|x\|^2 \leq (\langle A_n'x,x\rangle - \langle A_m'x,x\rangle)\|x\|^2 \underset{n,m\to\infty}{\to} 0 \quad \forall x \in \mathcal{H} ,$$

---

[1] das heißt $f_x(\lambda y + y') = \lambda f_x(y) + f_x(y')$ $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\forall y,y' \in \mathcal{H}$.

Also ist $(A_n'x)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathcal{H}$, sodaß man $A_n'x \underset{n\to\infty}{\to} A''x$, $A''x \in \mathcal{H}$, folgern kann. Wegen $\langle A''x - A'x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} (\langle A_n'x,y\rangle - \langle A_n'x,y\rangle) = 0 \ \forall y \in \mathcal{H}$ ist $A''x = A'x \ \forall x \in \mathcal{H}$, also $A_n'x \underset{n\to\infty}{\to} A'x$ für alle $x \in \mathcal{H}$, also $A_n x \to Ax$ für $n \to \infty$. □

<u>1.1.16 Korollar</u> : Seien $A_n^* = A_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $A_{n+1} \leq A_n$, $\|A_n\| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$; dann $\exists\ A^* = A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit $A_n x \underset{n\to\infty}{\to} Ax \quad \forall x \in \mathcal{H}$ und es gilt $A \leq A_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

<u>Beweis</u> : $B_n := Id_{\mathcal{H}} - A_n$ erfüllen die Voraussetzungen in 1.1.15 . □

<u>1.1.17 Definition und Proposition</u> : Für $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ sei

$A^0 := Id_{\mathcal{H}}$, für $n \in \mathbb{N}$ $A^n := \underbrace{AA\ldots A}_{n \text{ Mal}}$. Dann gilt :

$A^n \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ sowie $\|A^n\| \leq \|A\|^n \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

<u>Beweis</u> : mittels Induktion über n aus 1.1.6(ii),(iii) ($B = A^{n-1}$) . □

<u>1.1.18 Definition und Proposition</u> : Sei $\mathcal{M}$ abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{H}$; die Abbildung $P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $x \mapsto x_{\mathcal{M}}$ (vgl. 1.1.8 !) heißt <u>Orthoprojektor (OP) auf $\mathcal{M}$</u> . Es gilt :

$P^* = P^2 = P \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \iff \exists!$ abgeschlossenen Teilraum $\mathcal{M}$ von $\mathcal{H}$, sodaß P OP auf $\mathcal{M}$ ist
(schreiben dafür kurz : P ist OP) .

Dann gilt $Py = y \ \forall y \in \mathcal{M}$, $P(\mathcal{H}) = \mathcal{M}$ sowie :

$Id_{\mathcal{H}} - P$ ist OP auf $\mathcal{M}^{\perp}$

<u>Beweis</u>: ($\Rightarrow$) Sei $\mathcal{M} := \{x \in \mathcal{H} \mid Px = x\} \supseteq \{o\}$; dann gilt :

$x, y \in \mathcal{M}, \lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow P(\lambda x+y) = \lambda Px+Py = \lambda x+y \Rightarrow \lambda x+y \in \mathcal{M}$,

$x_n \in \mathcal{M}, n \in \mathbb{N}, \; x_n \underset{n\to\infty}{\to} x \Rightarrow Px = P(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} Px_n =$

$= \lim_{n\to\infty} x_n = x \Rightarrow x \in \mathcal{M}$, also ist $\mathcal{M}$ ein abgeschlossener Teilraum in $\mathcal{H}$. Wegen $P(Px) = P^2x = Px$ ist $Px \in \mathcal{M} \; \forall x \in \mathcal{H}$, also $P(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{M}$, andererseits ist $x \in \mathcal{M} \Rightarrow x = Px \Rightarrow x \in P(\mathcal{H})$, also $\mathcal{M} \subseteq P(\mathcal{H})$, also insgesamt $P(\mathcal{H}) = \mathcal{M}$.

Weiters ist wegen $P^* = P^2 = P \quad \forall y \in \mathcal{M}, \; \forall x \in \mathcal{H}$

$\langle x-Px, y\rangle = \langle x-Px, Py\rangle = \langle P^*(x-Px), y\rangle = \langle Px-P^2x, y\rangle = \langle o, y\rangle = 0$,

also $x - Px \in \mathcal{M}^\perp$, sodaß nach 1.1.8(ii) wegen $x = Px + (x-Px)$ und $Px \in \mathcal{M}$ $Px = x_{\mathcal{M}}$ sein muß $\forall x \in \mathcal{H}$, also ist P OP auf $\mathcal{M}$. Die Eindeutigkeit von $\mathcal{M}$ ergibt sich aus $P(\mathcal{H}) = \mathcal{M}$.

($\Leftarrow$) Daß P linear ist, steht in 1.1.8(iii); weiters ist für $x \in \mathcal{M}$ wegen $x = x + o$, $o \in \mathcal{M}^\perp$ und 1.1.8(ii) $x_{\mathcal{M}} = x$, sodaß für $x \in \mathcal{H}$ wegen $Px = x_{\mathcal{M}} \in \mathcal{M}$ $P^2x = (x_{\mathcal{M}})_{\mathcal{M}} = x_{\mathcal{M}} = Px$, also $P^2 = P$; für $\|x\| = 1$ gilt $\|Px\|^2 = \|x_{\mathcal{M}}\|^2 \leq$

$\|x_{\mathcal{M}}\|^2 + 0 + \|x_{\mathcal{M}^\perp}\|^2 = \|x_{\mathcal{M}}\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x_{\mathcal{M}}, x_{\mathcal{M}^\perp}\rangle + \|x_{\mathcal{M}^\perp}\|^2 =$ (1.1.2(i) !)

$= \|x_{\mathcal{M}} + x_{\mathcal{M}^\perp}\|^2 = \|x\|^2 = 1$, also ist $\|P\| \leq 1 < +\infty$,

somit $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Wegen $\langle Px, y\rangle = \langle x_{\mathcal{M}}, y_{\mathcal{M}} + y_{\mathcal{M}^\perp}\rangle = \langle x_{\mathcal{M}}, y_{\mathcal{M}}\rangle + \langle x_{\mathcal{M}}, y_{\mathcal{M}^\perp}\rangle =$

$= \langle x_{\mathcal{M}}, y_{\mathcal{M}}\rangle + 0 = \langle x_{\mathcal{M}}, y_{\mathcal{M}}\rangle + \langle x_{\mathcal{M}^\perp}, y_{\mathcal{M}}\rangle = \langle x_{\mathcal{M}} + x_{\mathcal{M}^\perp}, y_{\mathcal{M}}\rangle = \langle x, Py\rangle \; \forall x, y \in \mathcal{H}$

gilt schließlich $P^* = P$.

$Py = y \; \forall y \in \mathcal{M}$ sowie $P(\mathcal{H}) = \mathcal{M}$ wurde bereits unter ($\Rightarrow$) gezeigt.

Wegen $(\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}-P)^2 = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}-2P+P^2 = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}-2P+P = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}-P = (\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}-P)^*$, ($\Rightarrow$) ist $\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}-P$ OP auf $(\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}-P)(\mathcal{H})$; wegen $x-Px = x-x_{\mathcal{M}} \in \mathcal{M}^\perp \forall x \in \mathcal{H}$ gilt $(\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}-P)(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{M}^\perp$ und wegen $x \in \mathcal{M}^\perp \Rightarrow x = x_{\mathcal{M}^\perp}$ (vgl. ($\Leftarrow$) !)

$\Rightarrow x = x-x_{\mathcal{M}} = x-Px$ gilt $\mathcal{M}^\perp \subseteq (\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}-P)(\mathcal{H})$, also ist $\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}-P$ OP auf $\mathcal{M}^\perp$. $\square$

<u>1.1.19 Proposition</u> : Sei P OP auf $\mathcal{M}$, Q OP auf $\mathcal{N}$, wobei $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ abgeschlossene Teilräume sind.

Dann gilt : (i) $\mathcal{M} \neq \{o\} \Rightarrow \|P\| = 1$.

(ii) $\mathcal{O} \leq P$.

(iii) $P^{-1}(\{o\}) := \{x \in \mathcal{H} \mid Px = o\} = \mathcal{M}^{\perp}$.

(iv) Äquivalent sind : a) $P \leq Q$,
b) $\mathcal{N}^{\perp} \subseteq \mathcal{M}^{\perp}$,
c) $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$,
d) $PQ = QP = P$,
e) $Q - P$ ist OP auf den abgeschlossenen Teilraum $\mathcal{N} \cap \mathcal{M}^{\perp}$.

(v) Äquivalent sind : a) $PQ = \mathcal{O}$,
b) $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}^{\perp}$,
c) $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}^{\perp}$,
d) $QP = \mathcal{O}$.

(vi) Für $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ gilt :
$$AP = PA \iff A(\mathcal{M}) \cup A^*(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M} .$$

<u>Beweis</u> : (i) Nach dem Beweis von 1.1.18, ($\Leftarrow$) gilt $\|P\| \leq 1$;
$\mathcal{M} \neq \{o\} \Rightarrow \exists\, y \in \mathcal{M}$ mit $\|y\| = 1 \Rightarrow \|P\| \geq \|Py\| = \|y\| = 1$, also $\|P\| = 1$.

(ii) $\langle Px,x\rangle = \langle P^2x,x\rangle = \langle Px,Px\rangle = \|Px\|^2 \geq 0$ nach 1.1.18 .

(iii) $Px = o$, $y \in \mathcal{M} \Rightarrow 0 = \langle o,y\rangle = \langle Px,y\rangle = \langle x,Py\rangle = \langle x,y\rangle \Rightarrow x \in \mathcal{M}^{\perp}$
$x \in \mathcal{M}^{\perp} \Rightarrow x = x_{\mathcal{M}^{\perp}} \Rightarrow Px = x - x_{\mathcal{M}^{\perp}} = o$, also $P^{-1}(\{o\}) = \mathcal{M}^{\perp}$.

(iv) zeigen a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ d) $\Rightarrow$ e) $\Rightarrow$ a) :
$P \leq Q \Rightarrow 0 \leq \|Px\|^2 = \langle Px,x\rangle \leq \langle Qx,x\rangle = \|Qx\|^2$, (iii) $\Rightarrow \mathcal{N}^{\perp} = Q^{-1}(\{o\}) \subseteq$
$\subseteq P^{-1}(\{o\}) = \mathcal{M}^{\perp}$; 1.1.7 , 1.1.8(iv) $\Rightarrow \mathcal{M} = (\mathcal{M}^{\perp})^{\perp} \subseteq (\mathcal{N}^{\perp})^{\perp} = \mathcal{N}$; $\Rightarrow$
$QPx = Q(Px) = Px$, da $Px \in \mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$; also $QP = P \Rightarrow PQ = P^*Q^* =$
$= (QP)^* = P^* = P$; $\Rightarrow (Q-P)^2 = Q^2 - PQ - QP + P^2 = Q - P$,
$(Q-P)^* = Q-P$, 1.1.18 $\Rightarrow$ $Q-P$ ist OP ; wegen $P = QP$ ist $P(\mathcal{H}) \subseteq$
$\subseteq Q(\mathcal{H}) = \mathcal{N} \Rightarrow (Q-P)(\mathcal{H}) \subseteq Q(\mathcal{H}) = \mathcal{N}$; wegen $\langle (Q-P)x,Py\rangle =$
$\langle Qx,Py\rangle - \langle Px,Py\rangle = \langle PQx,y\rangle - \langle P^2x,y\rangle = \langle Px,y\rangle - \langle Px,y\rangle = 0$ ist
auch $(Q-P)(\mathcal{H}) \subseteq [P(\mathcal{H})]^{\perp} = \mathcal{M}^{\perp}$, also $(Q-P)(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{N} \cap \mathcal{M}^{\perp}$; umgekehrt gilt für $x \in \mathcal{N} \cap \mathcal{M}^{\perp}$ $Qx = x$ und $Px = o$, also $(Q-P)x = x$, weshalb $(Q-P)(\mathcal{H}) = \mathcal{N} \cap \mathcal{M}^{\perp}$ oder : $(Q-P)$ ist OP auf $\mathcal{N} \cap \mathcal{M}^{\perp}$ folgt; dann gilt
$0 \leq \|(Q-P)x\|^2 = \langle (Q-P)x,x\rangle = \langle Qx,x\rangle - \langle Px,x\rangle \; \forall x \in \mathcal{H} \iff P \leq Q$.

(v) zeigen a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ d) $\Rightarrow$ a) :

$x \in \mathcal{N}$, $y \in \mathcal{M}$ $\Rightarrow$ $\langle x,y\rangle = \langle Qx,Py\rangle = \langle PQx,y\rangle = \langle o,y\rangle = 0$ $\Rightarrow$ $x \in \mathcal{M}^{\perp}$,
also $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}^{\perp}$; $\Rightarrow$ $\mathcal{M} = (\mathcal{M}^{\perp})^{\perp} \subseteq \mathcal{N}^{\perp}$; $\Rightarrow$ $QP(\mathcal{H}) = Q(\mathcal{M}) = \{o\}$ $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ $QP = \Theta$; $\Rightarrow$ $PQ = P^*Q^* = (QP)^* = \Theta^* = \Theta$.

(vi, $\Rightarrow$) $x \in \mathcal{M}$ $\Rightarrow$ $P(Ax) = APx = Ax$ $\Rightarrow$ $Ax \in \mathcal{M}$; $PA^* = P^*A^* =$
$(AP)^* = (PA)^* = A^*P^* = A^*P$ $\Rightarrow$ $P(A^*x) = A^*Px = A^*x$ $\forall x \in \mathcal{M}$,
also $A^*x \in \mathcal{M}$.

(vi, $\Leftarrow$) $x \in \mathcal{H}$ $\Rightarrow$ $Px \in \mathcal{M}$ $\Rightarrow$ $APx \in \mathcal{M}$ $\Rightarrow$ $PAPx = APx$ $\Rightarrow$: $PAP = AP$;
ebenso $PA^*P = A^*P$; $\Rightarrow$ $PA = P^*A^{**} = (A^*P)^* = (PA^*P)^* = P^*A^{**}P^* =$
$= PAP = AP$. $\square$

<u>1.1.20 Proposition</u> : Seien P_i OP , α_i , $\beta_i \in \mathbb{C}$ $\forall i \in \{0,\dots,n\}$
sowie $P_{i-1} \leq P_i$ $\forall i \in \{1,\dots,n\}$; dann gilt :

(i) $$\Big[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(P_i-P_{i-1})\Big]\Big[\sum_{j=1}^{n} \beta_j(P_j-P_{j-1})\Big] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i(P_i-P_{i-1}) .$$

(ii) $$\Big[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(P_i-P_{i-1})\Big]^N = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^N(P_i-P_{i-1}) .$$

(iii) $$\Big\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(P_i-P_{i-1})\Big\| \leq \max_{i \in \{1,\dots,m\}} |\alpha_i| \cdot \|P_n - P_0\| .$$

<u>Beweis</u> : (i) $$\Big[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(P_i-P_{i-1})\Big]\Big[\sum_{j=1}^{n} \beta_j(P_j-P_{j-1})\Big] =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i\beta_j(P_i-P_{i-1})(P_j-P_{j-1})$$; ist nun $i < j$, dann gilt

wegen 1.1.19(iv) $P_iP_j = P_i = P_iP_{j-1}$, $P_{i-1}P_j = P_{i-1} = P_{i-1}P_{j-1}$

$\Rightarrow$ $(P_i-P_{i-1})(P_j-P_{j-1}) = P_i - P_{i-1} - P_i + P_{i-1} = \Theta$; ebenso ist
für $i > j$ $(P_i-P_{i-1})(P_j-P_{j-1}) = \Theta$. Wegen 1.1.19(iv) ,1.1.18
ist $(P_i-P_{i-1})^2 = P_i-P_{i-1}$, woraus schließlich

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i\beta_j(P_i-P_{i-1})(P_j-P_{j-1}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i(P_i-P_{i-1})$$ folgt.

(ii) folgt aus (i) mittels Induktion über N (setze $\beta_j = \alpha_j^{N-1}$).

(iii) Sei $\alpha := \max\limits_{i\in\{1,\dots,n\}} |\alpha_i|$; dann gilt für $x \in \mathcal{H}$ mit $\|x\| = 1$:

$$\Big\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(P_i-P_{i-1})x\Big\|^2 = \Big\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(P_i-P_{i-1})x, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(P_j-P_{j-1})x\Big\rangle =$$

$$= \Big\langle \Big[\sum_{j=1}^{n} \alpha_j(P_j-P_{j-1})\Big]^* \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(P_i-P_{i-1})x,x\Big\rangle = \Big\langle \Big[\sum_{j=1}^{n} \overline{\alpha}_j(P_j-P_{j-1})\Big]\Big[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(P_i-P_{i-1})\Big]x,x\Big\rangle$$

$$= \Big\langle \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha}_i\alpha_i(P_i-P_{i-1})x,x\Big\rangle = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2\langle(P_i-P_{i-1})x,x\rangle \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha^2\langle(P_i-P_{i-1})x,x\rangle = \alpha^2\Big\langle\sum_{i=1}^{n}(P_i-P_{i-1})x,x\Big\rangle =$$

$$= \alpha^2\langle(P_n-P_0)x,x\rangle = \alpha^2\|(P_n-P_0)x\|^2 \leqslant \alpha^2\|P_n-P_0\|^2 \;. \;\square$$

<u>1.1.21 Proposition</u> : Seien P_n OP auf $\mathcal{M}_n$, $P_{n+1} \leq P_n \;\forall n \in \mathbb{N}$; sei P OP auf den abgeschlossenen Teilraum $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_n$.

Dann gilt $P_n x \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} Px \quad \forall x \in \mathcal{H}$.

<u>Beweis</u> : 1.1.16 $\Rightarrow \exists A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit $A^* = A$ und $P_n x \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} Ax \;\forall x \in \mathcal{H}$ (es gilt ja $\|P_n\| \leqslant 1$!) sowie $A \leqslant P_n \;\forall n \in \mathbb{N}$.

$$\langle A^2x,y\rangle = \langle Ax,Ay\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle P_nx,P_ny\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle P_n^2x,y\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle P_nx,y\rangle = \langle Ax,y\rangle$$

$\Rightarrow A^2 = A$, also ist A OP auf einen abgeschlossenen Teilraum $\mathcal{M}$.

Wegen $A \leqslant P_n$ und 1.1.19(iv) ist $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}_n \;\forall n \in \mathbb{N}$, also $\mathcal{M} \subseteq \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_n$, also $A \leqslant P$; da aber $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_n \subseteq \mathcal{M}_n$, gilt $P \leqslant P_n$,

also $\langle Ax,x\rangle = \lim\limits_{n\to\infty}\langle P_nx,x\rangle \geqslant \langle Px,x\rangle$, also $P \leqslant A$, was nach 1.1.13 $A = P$ bedeutet. $\square$

<u>1.1.22 Proposition</u> : Sei $A^* = A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$; dann gilt :

(i) $A^{-1}(\{o\})$ $(:= \{x \in \mathcal{H} \mid Ax = o\}$) ist ein abgeschlossener Teilraum.

(ii) Sei P OP auf $A^{-1}(\{o\})$, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit $AB = BA$; dann ist

$$AB^* = B^*A \quad \text{sowie} \quad BP = PB .$$

<u>Beweis</u> : (i) 1.1.6(i) $\Rightarrow$ A ist stetig $\Rightarrow$ $A^{-1}(\{o\})$ ist abgeschlossen.

$Ax = Ay = o \Rightarrow A(\mu x + y) = \mu Ax + Ay = \mu o + o = o \Rightarrow$
$A^{-1}(\{o\})$ ist ein abgeschlossener Teilraum.

(ii) $B^*A = B^*A^* = (AB)^* = (BA)^* = A^*B^* = AB^*$.

Wegen $Ax = o \Rightarrow A(Bx) = BAx = Bo = o \Rightarrow Bx \in A^{-1}(\{o\})$

sowie $Ax = o \Rightarrow A(B^*x) = B^*Ax = B^*o = o \Rightarrow B^*x \in A^{-1}(\{o\})$

ist $B(A^{-1}(\{o\})) \cup B^*(A^{-1}(\{o\})) \subseteq A^{-1}(\{o\})$, also nach 1.1.19(vi)

$BP = PB$. $\square$

<u>1.1.23 Proposition</u> : Seien A_n , B_n , A , $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $n \in \mathbb{N}$,

mit $\|A_n\| \leq c$ $\forall n \in \mathbb{N}$ sowie $A_n x \xrightarrow[n \to \infty]{} Ax$, $B_n x \xrightarrow[n \to \infty]{} Bx$ $\forall x \in \mathcal{H}$.

Dann gilt $$A_n B_n x \xrightarrow[n \to \infty]{} ABx \quad \forall x \in \mathcal{H} .$$

<u>Beweis</u> : Wegen

$$A_n(B_n - B) + (A_n - A)B = A_n B_n - AB \qquad \text{gilt } \forall x \in \mathcal{H}:$$

$$\|A_n B_n x - ABx\| \leq \|A_n\| \|B_n x - Bx\| + \|A_n(Bx) - A(Bx)\| \leq$$

$$\leq c \|B_n x - Bx\| + \|A_n(Bx) - A(Bx)\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 . \qquad \square$$

<u>1.1.24 Proposition</u> : Sei $A^* = A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit $\mathcal{O} \leq A \leq Id_{\mathcal{H}}$;

dann gilt (i) $\|Ax\| \leq \|x\| \quad \forall x \in \mathcal{H}$ ($\Leftrightarrow \|A\| \leq 1$) ,

(ii) $\mathcal{O} \leq A^2 \leq A$.

<u>Beweis</u> : Wegen $\mathcal{O} \leq A \leq Id_{\mathcal{H}}$ gilt $\forall x , y \in \mathcal{H}$:

$\langle Ax,x\rangle\langle Ay,y\rangle \leq \|x\|^2\|y\|^2$ sowie wegen $\mathcal{O} \leq A$ und 1.1.14 (i) :

$|\langle Ax,y\rangle|^2 \leq \langle Ax,x\rangle\langle Ay,y\rangle \leq \|x\|^2\|y\|^2$; nun sei $y := Ax \Rightarrow$

$\|Ax\|^4 = |\langle Ax,y\rangle|^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2 = \|Ax\|^2\|x\|^2 \Rightarrow \|Ax\|^2 \leq \|x\|^2$,

was (i) zeigt.

(ii) Wegen $0 \leq \|Ax\|^2 = \langle Ax,Ax\rangle = \langle A^2x,x\rangle \quad \forall x \in \mathcal{H}$ ist $\mathcal{O} \leq A^2$;

nach (i) gilt $\langle A^2x,x\rangle^2 = \langle Ax,y\rangle^2 \leq \langle Ax,x\rangle\langle Ay,y\rangle \leq \langle Ax,x\rangle\|Ay\|\|y\| \leq$

$\leq \langle Ax,x\rangle\|y\|^2 = \langle Ax,x\rangle\|Ax\|^2 = \langle Ax,x\rangle\langle Ax,Ax\rangle = \langle Ax,x\rangle\langle A^2x,x\rangle$,

also $\langle A^2x,x\rangle \leq \langle Ax,x\rangle \quad \forall x \in \mathcal{H}$, also $A^2 \leq A$. $\square$

<u>1.1.25 Satz</u> : Seien $\mathcal{O} \leq A^* = A$, $\mathcal{O} \leq B^* = B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit $AB = BA$;

dann gilt ($(AB)^* = AB$ und) $\mathcal{O} \leq AB$.

<u>Beweis</u> : (i) $(AB)^* = B^*A^* = BA = AB$.

(ii) Sei oBdA $A \neq \mathcal{O}$ (sonst ist die Aussage trivial) $\Rightarrow \|A\| > 0$;

sei $A_1 := \frac{1}{\|A\|} A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $A_{n+1} := A_n - A_n^2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $n \in \mathbb{N}$.

Dann gilt zunächst $\mathcal{O} \leq A_n \leq Id_{\mathcal{H}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (Induktion :)

wegen $\langle Ax,x\rangle \leq \|A\|\|x\|^2$, $\mathcal{O} \leq A$ ist $\mathcal{O} \leq A_1 \leq Id_{\mathcal{H}}$;

ist nun $\mathcal{O} \leq A_n \leq Id_{\mathcal{H}}$, so nach 1.1.24(ii) $\mathcal{O} \leq A_n^2 \leq A_n$,

also $\mathcal{O} \leq A_{n+1} \leq A_n - \mathcal{O} \leq Id_{\mathcal{H}}$.

Nach 1.1.24(i) ist daher $\|A_n\| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Wegen $A_{n+1} \leq A_n \; \forall n \in \mathbb{N}$, 1.1.16 existiert daher ein $C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$

mit $C^* = C$ und $A_n x \to Cx$ für $n \to \infty$, $\forall x \in \mathcal{H}$.

(iii) Wegen 1.1.23 gilt auch $A_n^2 x \underset{n\to\infty}{\to} C^2 x \quad \forall x \in \mathcal{H}$,

weshalb $Cx = \lim_{n\to\infty} A_{n+1}x = \lim_{n\to\infty} (A_n x - A_n^2 x) = Cx - C^2 x \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad C^2 x = o \quad \Rightarrow \|Cx\|^2 = \langle C^2 x, x\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad Cx = o \quad \forall x \in \mathcal{H} \iff$

$\iff \quad C = \mathcal{O}$ gilt, also $A_n x \underset{n\to\infty}{\to} o \quad \forall x \in \mathcal{H}$.

(iv) Es gilt $A_1 = \sum_{k<n} A_k^2 + A_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ (Induktion :)

$A_1 = A_1^2 + A_2$ nach Definition von A_2 ;

ist nun $A_1 = \sum_{k<n} A_k^2 + A_n$, so gilt $\sum_{k\leq n} A_k^2 + A_{n+1} =$

$= \sum_{k<n} A_k^2 + A_n - A_n + A_n^2 + A_{n+1} = A_1 + \mathcal{O} = A_1$.

(v) Also gilt $\exists \lim_{n\to\infty} \sum_{k\leq n} A_k^2 x = \lim_{n\to\infty} (-A_{n+1}x + A_1 x) = o + A_1 x$

nach (iii). Weiters ist wegen $AB = BA$ auch $A_k B = BA_k$

für alle $k \in \mathbb{N}$ (Induktion) , also

$$\langle BAx, x\rangle = \|A\| \langle BA_1 x, x\rangle = \|A\| \langle B(\lim_{n\to\infty} \sum_{k\leq n} A_k^2 x), x\rangle =$$

$$\|A\| \lim_{n\to\infty} \langle B(\sum_{k\leq n} A_k^2 x), x\rangle = \|A\| \lim_{n\to\infty} \sum_{k\leq n} \langle BA_k^2 x, x\rangle \geq 0 \quad ,$$

da wegen $A_k^* = A_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$ (Induktion) gilt :

$\langle BA_k^2 x, x\rangle = \langle A_k BA_k x, x\rangle = \langle BA_k x, A_k x\rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{H}$

wegen $\mathcal{O} \leq B$; also ist $\mathcal{O} \leq BA = AB$. □

<u>1.1.26 Satz und Definition</u> : Sei $\mathcal{O} \leq A^* = A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$; dann

existiert ein eindeutig bestimmter Operator $\sqrt{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit

$\mathcal{O} \leq \sqrt{A}^* = \sqrt{A}$, $A\sqrt{A} = \sqrt{A}A$ und $\sqrt{A}^2 = A$.

$\sqrt{A}$ heißt <u>(positive) Quadratwurzel aus A</u> . Es gilt :

$B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $AB = BA \quad \Rightarrow \quad \sqrt{A}B = B\sqrt{A}$.

<u>Beweis</u> : (i) Sei oBdA $A \neq \mathcal{O}$ (sonst $\sqrt{A} := \mathcal{O}$ gesetzt) $\Rightarrow$

$\mathcal{O} \leq A' := \frac{1}{\|A\|} A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \Rightarrow \mathcal{O} \leq A' \leq Id_{\mathcal{H}}$ (und $A'^{*} = A'$).

Sei $A'' := Id_{\mathcal{H}} - A' \Rightarrow \mathcal{O} \leq A'' \leq Id_{\mathcal{H}}$ (und $A''^{*} = A'' \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$).

Seien $Y_0 := \mathcal{O}$, $Y_n := \frac{1}{2}(A'' + Y_{n-1}^2) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $n \in \mathbb{N}$; dann ist

wegen $AB = BA \Rightarrow A'B = BA' \Rightarrow A''B = BA''$, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$:

$AB = BA \Rightarrow Y_nB = BY_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (Induktion :) $\qquad (*)$

$Y_0B = \mathcal{O} = BY_0$; sei nun $BY_{n-1} = Y_{n-1}B \Rightarrow BY_{n-1}^2 = Y_{n-1}^2B \Rightarrow$

$Y_nB = \frac{1}{2}(A''B + Y_{n-1}^2B) = \frac{1}{2}(BA'' + BY_{n-1}^2) = BY_n$.

Aus $(*)$ folgt für $B = A$ speziell $Y_nA = AY_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ und

deswegen für $B = Y_k$, $k \in \mathbb{N}$: $(*) \Rightarrow Y_nY_k = Y_kY_n \quad \forall n,k \in \mathbb{N} \qquad (\overset{*}{*})$

Da $Y_n^{*} = Y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ gilt (Induktion) sowie wegen $\mathcal{O} \leq A''$

$\mathcal{O} \leq \frac{1}{2} A'' \leq \frac{1}{2}(A'' + Y_{n-1}^2) = Y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, gilt $Y_n \leq Y_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(Induktion :) $Y_0 = \mathcal{O} \leq \frac{1}{2} A'' = Y_1$; ist nun $Y_{n-1} \leq Y_n$, dann

ist wegen $\mathcal{O} \leq Y_n - Y_{n-1}$, $\mathcal{O} \leq Y_n \leq Y_n + Y_{n-1}$ und (siehe $(\overset{*}{*})$!)

$(Y_n - Y_{n-1})(Y_n + Y_{n-1}) = (Y_n + Y_{n-1})(Y_n - Y_{n-1})$, 1.1.25 :

$\mathcal{O} \leq (Y_n - Y_{n-1})(Y_n - Y_{n-1}) = Y_n^2 - Y_{n-1}Y_n + Y_nY_{n-1} - Y_{n-1}^2 \quad = \quad ((\overset{*}{*})!)$

$= Y_n^2 - Y_{n-1}^2 \Rightarrow \mathcal{O} \leq \frac{1}{2}(Y_n^2 - Y_{n-1}^2) = Y_{n+1} - Y_n$, was zu zeigen war.

Es gilt sogar $\mathcal{O} \leq Y_n \leq Y_{n+1} \leq Id_{\mathcal{H}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Wir müssen nur noch die letzte der obigen Ungleichungen zeigen
(Induktion :)

$A'' \leq Id_{\mathcal{H}} \Rightarrow Y_1 = \frac{1}{2} A'' \leq Id_{\mathcal{H}}$; ist nun $Y_n \leq Id_{\mathcal{H}}$, so gilt

wegen $\mathcal{O} \leq Y_n$ und 1.1.24(ii) $Y_n^2 \leq Y_n \leq Id_{\mathcal{H}}$, also

$$Y_{n+1} = \frac{1}{2}(A'' + Y_n^2) \leq \frac{1}{2} Id_{\mathcal{H}} + \frac{1}{2} Id_{\mathcal{H}} = Id_{\mathcal{H}} .$$

Nach 1.1.24(i) gilt daher $\|Y_n\| \leq 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$ und somit existiert nach 1.1.15 ein $Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit $Y^* = Y$ und $Y_n x \underset{n \to \infty}{\to} Yx \quad \forall x \in \mathcal{H}$.

Wegen 1.1.23 gilt also $Y_{n-1}^2 x \underset{n \to \infty}{\to} Y^2 x \ \forall x \in \mathcal{H}$, also ist $\forall x \in \mathcal{H}$:

$$Yx = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2} (A''x + Y_{n-1}^2 x) = \frac{1}{2} A''x + \frac{1}{2} \lim_{n \to \infty} Y_{n-1}^2 x = \frac{1}{2} (A''x + Y^2 x)$$

$$\Rightarrow \ 2Y = A'' + Y^2 \quad \Rightarrow \ (Id_{\mathcal{H}} - Y)^2 = Id_{\mathcal{H}} - A'' = A' \ ;$$

Sei $\sqrt{A} := \sqrt{\|A\|}(Id_{\mathcal{H}} - Y) \quad \Rightarrow \ \sqrt{A}^2 = \|A\| A' = A \ , \ \sqrt{A}^* = \sqrt{A}$,

wegen $\langle Yx, x \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle Y_n x, x \rangle \leq \|x\|^2 \ \forall x \in \mathcal{H}$ ist $Y \leq Id_{\mathcal{H}}$,

also $\Theta \leq \sqrt{A}$; außerdem ist wegen $AYx = A(\lim_{n \to \infty} Y_n x) =$

$= \lim_{n \to \infty} AY_n x = \lim_{n \to \infty} Y_n Ax = YAx \quad \forall x \in \mathcal{H} \ \Leftrightarrow \ AY = YA$ auch

$\sqrt{A} A = A \sqrt{A}$ (und klarerweise $\sqrt{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$).

(ii) Sei $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit $BA = AB$; dann gilt wegen (*) :

$$YBx = \lim_{n \to \infty} Y_n(Bx) = \lim_{n \to \infty} BY_n x = B(\lim_{n \to \infty} Y_n x) = BYx \quad \forall x \in \mathcal{H} ,$$

also $YB = BY$ und damit $\sqrt{A} B = B \sqrt{A}$.

(iii) Sei $\Theta \leq C^* = C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit $AC = CA$ und $C^2 = A$;

wegen $\Theta \leq C$, $\Theta \leq \sqrt{A}$ gilt nach (i) : $\exists D , D' \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit

$D^* = D$, $D'^* = D'$ sowie $D^2 = A$, $[D']^2 = C$;

wegen (ii) gilt auch $\sqrt{A} C = C \sqrt{A}$, weswegen für

$y := (\sqrt{A} - C)x$, $x \in \mathcal{H}$, gilt : $\|Dy\|^2 + \|D'y\|^2 =$

$= \langle Dy, Dy \rangle + \langle D'y, D'y \rangle = \langle D^2 y, y \rangle + \langle [D']^2 y, y \rangle = \langle \sqrt{A}(\sqrt{A} - C)x, y \rangle +$

$+ \langle C(\sqrt{A} - C)x, y \rangle = \langle (\sqrt{A}^2 - \sqrt{A} C + C \sqrt{A} - C^2)x, y \rangle = \langle \Theta x, y \rangle = 0$

$\Rightarrow \ Dy = D'y = o \ \Rightarrow \ \sqrt{A} y = D(Dy) = Do = o$, $Cy = D'o = o \ \Rightarrow$

$\Rightarrow \ \|(\sqrt{A} - C)x\|^2 = \langle (\sqrt{A} - C)^2 x, x \rangle = \langle (\sqrt{A} - C)y, x \rangle = \langle o - o, x \rangle = 0$

$\Rightarrow \ \sqrt{A} x = Cx \quad \forall x \in \mathcal{H} \ \Leftrightarrow \ \sqrt{A} = C$. □

<u>1.1.27 Definition und Proposition</u> : Sei $A^* = A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$;

dann seien $|A| := \sqrt{A^2} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ sowie

$$A_+ := \frac{1}{2}(|A| + A) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) ,$$

$$A_- := \frac{1}{2}(|A| - A) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) .$$

Dann gilt : (i) $|A|^* = |A|$, $(A_+)^* = A_+$, $(A_-)^* = A_-$

(ii) $A_+ + A_- = |A|$, $A_+ - A_- = A$.

(iii) $\mathcal{O} \le |A|$ und : $\mathcal{O} \le A \Rightarrow |A| = A_+ = A$, $A_- = \mathcal{O}$.

(iv) Sei P OP auf $A_+^{-1}(\{o\})$; dann gilt :

$AB = BA$, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \Rightarrow BP = PB$.

(v) $\mathcal{O} \le |A|(Id_{\mathcal{H}} - P) = A_+ = A(Id_{\mathcal{H}} - P)$,

$\mathcal{O} \le |A|P = A_- = -AP$.

<u>Beweis</u> : (i) $|A|^* = \sqrt{A^2}^* = \sqrt{A^2} = |A|$ nach 1.1.26 ; der Rest und

(ii) folgt trivialerweise aus den Definitionen.

(iii) $\mathcal{O} \le \sqrt{A^2} = |A|$ nach 1.1.26 ; wegen der Eindeutigkeit in 1.1.26 und $AA^2 = A^3 = A^2A$ folgt $\mathcal{O} \le A \Rightarrow A = \sqrt{A^2} = |A|$, also auch $A_+ = (|A| + A)/2 = (A + A)/2 = A$ und

$A_- = (|A| - A)/2 = (A - A)/2 = \mathcal{O}$.

(iv) $AB = BA \Rightarrow A^2B = BA^2$, 1.1.26 $\Rightarrow |A|B = \sqrt{A^2}B = B\sqrt{A^2} = B|A|$

$\Rightarrow A_+B = \frac{1}{2}(|A|B + AB) = \frac{1}{2}(B|A| + BA) = B\,\frac{1}{2}(|A| + A) = BA_+$;

wegen $A_+ = (A_+)^*$ und 1.1.22 gilt daher $BP = PB$.

(v) Wegen $AA^2 = A^2A$, 1.1.26 gilt $|A|A = A|A|$; deshalb ist

$A_+A_- = \frac{1}{4}(|A|^2 + A|A| - |A|A - A^2) = \mathcal{O}$, also $A_-x \in A_+^{-1}(\{o\})$

für alle $x \in \mathcal{H} \Rightarrow PA_-x = A_-x \;\; \forall x \in \mathcal{H} \Rightarrow PA_- = A_-$.

Daher ist $A_-P = (A_-)^* P^* = (PA_-)^* = (A_-)^* = A_-$; nach Definition gilt aber $A_+P = \mathcal{O}$ (da ja $Px \in A_+^{-1}(\{o\})\ \forall x \in \mathcal{H}$) , weshalb nach (ii)

$|A|P = A_+P + A_-P = \mathcal{O} + A_-$ sowie

$AP = A_+P - A_-P = \mathcal{O} - A_-$, also $|A|P = A_- = -AP$ gilt.

Daraus ergibt sich $|A|(Id_{\mathcal{H}} - P) = |A| - |A|P = A_+ + A_- - A_- = A_+$ sowie $A(Id_{\mathcal{H}} - P) = A - AP = A_+ - A_- + A_- = A_+$.

Weiters gilt wegen $|A|A = A|A|$ und (iv) $|A|P = P|A|$, sodaß aus

$\mathcal{O} \leq |A|$, $\mathcal{O} \leq P$ und 1.1.25 $\mathcal{O} \leq |A|P$ und ebenso aus

$(\langle Px,x\rangle = \|Px\|^2 \leq \|P\|^2 \|x\|^2 \leq 1\|x\|^2$ nach 1.1.19(i) $\Rightarrow)$ $\mathcal{O} \leq Id_{\mathcal{H}} - P$,

$\mathcal{O} \leq |A|$, $|A|(Id_{\mathcal{H}} - P) = |A| - |A|P = |A| - P|A| = (Id_{\mathcal{H}} - P)|A|$

$\mathcal{O} \leq |A|(Id_{\mathcal{H}} - P)$ folgt. □

1.1.28 Korollar : Sei $A^* = A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, P OP auf $A_+^{-1}(\{o\})$;

dann gilt $AP \leq \mathcal{O} \leq A(Id_{\mathcal{H}} - P)$ sowie :

$-|A| \leq A \leq |A|$, $A \leq A_+$, $-A \leq A_-$.

Beweis : 1.1.27(v) $\Rightarrow$ $AP \leq \mathcal{O} \leq A(Id_{\mathcal{H}} - P)$;

$\mathcal{O} \leq A_+ = \frac{1}{2}(|A| + A) \Rightarrow \mathcal{O} \leq |A| + A \Rightarrow -|A| \leq A$ ($\Rightarrow -A \leq |A|$);

$\mathcal{O} \leq A_- = \frac{1}{2}(|A| - A) \Rightarrow \mathcal{O} \leq |A| - A \Rightarrow A \leq |A|$.

Daher ist $A = \frac{1}{2}(A + A) \leq \frac{1}{2}(|A| + A) = A_+$ sowie

$-A = \frac{1}{2}(-A - A) \leq \frac{1}{2}(|A| - A) = A_-$. □

1.1.29 Proposition : Seien $A^* = A$, $B^* = B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit $AB = BA$;

dann gilt : (i) $\mathcal{O} \leq A$, $\mathcal{O} \leq B \Rightarrow \sqrt{AB} = \sqrt{A}\sqrt{B}$.

(ii) $|AB| = |A||B|$.

(iii) $|A|B = B|A|$, $A_+B = B(A_+)$, $A_-B = B(A_-)$.

(iv) $x \in \mathcal{H}$, $Ax = o \Rightarrow A_+x = A_-x = |A|x = o$.

<u>Beweis</u> : (i) Wegen $AB = BA$ gilt nach 1.1.26 $A\sqrt{B} = \sqrt{B}A$, also auch $\sqrt{A}\sqrt{B} = \sqrt{B}\sqrt{A}$; nun sind $\sigma \leq \sqrt{A}$, $\sigma \leq \sqrt{B}$, also nach 1.1.25 $\sigma \leq \sqrt{A}\sqrt{B}$. Ferner ist $(\sqrt{A}\sqrt{B})^2 = \sqrt{A}^2\sqrt{B}^2 = AB$, was nach 1.1.26 $\sqrt{AB} = \sqrt{A}\sqrt{B}$ zeigt (1.1.25 $\Rightarrow$ $\sigma \leq AB$!).

(ii) $AB = BA \Rightarrow A^2B^2 = B^2A^2$, also nach (i)

$$|AB| = \sqrt{(AB)^2} = \sqrt{A^2B^2} = \sqrt{A^2}\sqrt{B^2} = |A||B| .$$

(iii) $AB = BA \Rightarrow A^2B = BA^2$, 1.1.26 $\Rightarrow |A|B = B|A| \Rightarrow$

$$A_+B = \frac{1}{2}(|A|B + AB) = \frac{1}{2}(B|A| + BA) = BA_+ \text{ , analog } A_-B = BA_- .$$

(iv) $Ax = o \Rightarrow A^2x = A(Ax) = Ao = o \Rightarrow \| |A|x \|^2 = \langle |A|x, |A|x\rangle =$
$= \langle |A|^2x, x\rangle = \langle A^2x, x\rangle = \langle o, x\rangle = 0 \Rightarrow |A|x = o$, also auch

$$A_+x = \frac{1}{2}(|A|x + Ax) = o \text{ , } A_-x = \frac{1}{2}(|A|x - Ax) = o . \quad \square$$

1.2 SPEKTRALSCHAREN MIT KOMPAKTEM TRÄGER

Eine Spektralschar mit kompaktem Träger ist ein Analogon zur Verteilungsfunktion eines endlichen Maßes: sie ist eine im schwachen Sinn rechtsseitig stetige Abbildung, die reelle Zahlen in Orthoprojektoren monoton wachsend im Sinn der Ordnung auf selbstadjungierten Operatoren überführt, wobei bis zu einer unteren Schranke auf den Nullraum projiziert und ab einer oberen Schranke alles unverändert gelassen wird.

Diese Eigenschaften legen die Definition eines Operator-Integrals bezüglich einer Spektralschar nahe, welche sich in den folgenden Kapiteln als äußerst nützlich erweisen wird.

1.2.1 Definition : Eine Abbildung $\begin{array}{c}\lambda \mapsto P_\lambda \\ \mathbb{R} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})\end{array}$ heißt Spektralschar mit kompaktem Träger in $[a,b]$, wenn gilt :

(i) P_λ ist OP $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

(ii) $P_\lambda = \theta \ \forall \lambda < a$, $P_\lambda = Id_{\mathcal{H}} \ \forall \lambda \geq b$,

(iii) $\lambda \leq \mu \Rightarrow P_\lambda \leq P_\mu$,

(iv) $\varepsilon_n \underset{n\to\infty}{\downarrow} 0 \Rightarrow P_{\lambda+\varepsilon_n} x \underset{n\to\infty}{\to} P_\lambda x \ \forall x \in \mathcal{H}$.

1.2.2 Proposition : Ist $\begin{array}{c}\lambda \mapsto P_\lambda \\ \mathbb{R} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})\end{array}$ wie in 1.2.1 , so definiert

$F_x : \begin{array}{c}\lambda \mapsto \langle P_\lambda x, x\rangle \\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}\end{array}$ eine monoton wachsende, rechtsseitig stetige Funktion mit $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} F_x(\lambda) = 0$ und $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} F_x(\lambda) = \|x\|^2$.

(F_x ist also Verteilungsfunktion eines endlichen Maßes μ_x auf der σ-Algebra $\mathcal{B}$ der Borelmengen in $\mathbb{R}$ mit $\mu_x(]\alpha,\beta]) = F_x(\beta) - F_x(\alpha)$.) [1]

Beweis : Sei $\varepsilon_n \underset{n\to\infty}{\downarrow} 0 \Rightarrow F_x(\lambda+\varepsilon_n) \underset{n\to\infty}{\to} F_x(\lambda)$; $F_x(\lambda+) := \inf\limits_{\mu>\lambda} F_x(\mu) =$

$= \lim\limits_{\varepsilon\to 0+} F_x(\lambda+\varepsilon)$ (da F_x monoton wachsend, vgl. 1.2.1(iii) !) ;

also $F_x(\lambda) \leq F_x(\lambda+) \leq F_x(\lambda+\varepsilon_n) \underset{n\to\infty}{\to} F_x(\lambda) \Rightarrow F_x(\lambda) = F_x(\lambda+)$,

also ist F_x bei λ rechtsseitig stetig ; der Rest ist trivial. $\square$

1.2.3 Bezeichnung : Sei $x \in \mathcal{H}$;

für $\alpha < \beta$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig sei

$$\int\limits_{]\alpha,\beta]} f(\lambda)\, d\langle P_\lambda x, x\rangle := \int\limits_{\mathbb{R}} f \cdot 1_{]\alpha,\beta]}\, d\mu_x$$

---

1) siehe [5] , pp. 53-56

1.2.4 Satz : Sei $\underset{\mathbb{R}\to\mathbb{C}}{f}$ stetig, $\underset{\mathbb{R}\to\mathcal{B}(\mathcal{H})}{\lambda \mapsto P_\lambda}$ wie in 1.2.1 und $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha<\beta$; dann gilt :

(i) $\exists!\, A = A_f^{(\alpha,\beta)} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit $\langle A_f^{(\alpha,\beta)}x,x\rangle = \int\limits_{]\alpha,\beta]} f(\lambda)d\langle P_\lambda x,x\rangle$ für alle $x \in \mathcal{H}$.

(ii) $\| A_f^{(\alpha,\beta)} \| \leq \max\limits_{\lambda\in[\alpha,\beta]} | f(\lambda)| \, \|P_\beta - P_\alpha\|$.

(iii) Sei $\underset{\mathbb{R}\to\mathbb{C}}{\bar{f} : \lambda \mapsto \overline{f(\lambda)}}$; dann gilt $[A_f^{(\alpha,\beta)}]^* = A_{\bar{f}}^{(\alpha,\beta)}$.

Beweis : (i) Weil f stetig ist, ist das Integral Grenzwert von Riemann-Summen :[1] seien $\alpha = \lambda_0^{(n)} < \lambda_1^{(n)} < \ldots < \lambda_{k_n}^{(n)} = \beta$, $\mu_k^{(n)} \in [\lambda_{k-1}^{(n)}, \lambda_k^{(n)}] \;\forall\; k\in\{1,\ldots,k_n\}$, wobei für

$$\mathfrak{Z}_n := \{\lambda_0^{(n)}, \lambda_1^{(n)}, \ldots, \lambda_{k_n}^{(n)}\} \quad \text{mit} \quad \delta_n := \max_{k\in\{1,\ldots,k_n\}} |\lambda_k^{(n)} - \lambda_{k-1}^{(n)}|$$

$\mathfrak{Z}_n \subseteq \mathfrak{Z}_{n+1} \;\forall\, n \in \mathbb{N}$ sowie $\delta_n \to 0$ für $n \to \infty$ gilt;

dann ist $$\int\limits_{]\alpha,\beta]} f(\lambda)d\langle P_\lambda x,x\rangle = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} f(\mu_k^{(n)})[\langle P_{\lambda_k^{(n)}}x,x\rangle - \langle P_{\lambda_{k-1}^{(n)}}x,x\rangle].$$

Sei nun $A_n := \sum\limits_{k=1}^{k_n} f(\mu_k^{(n)}) [P_{\lambda_k^{(n)}} - P_{\lambda_{k-1}^{(n)}}] \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$;

für $n > m$ ist $\mathfrak{Z}_m \subseteq \mathfrak{Z}_n$; seien $\nu_k^{(n)} := \mu_j^{(m)} \Leftrightarrow \mu_k^{(n)} \in [\lambda_{j-1}^{(m)}, \lambda_j^{(m)}]$

$$\Rightarrow \|A_n - A_m\| = \|\sum_{k=1}^{k_n} [f(\mu_k^{(n)}) - f(\nu_k^{(n)})][P_{\lambda_k^{(n)}} - P_{\lambda_{k-1}^{(n)}}]\| \quad (1.1.20(iii)!)$$

$$\leq \max_{k\in\{1,\ldots,k_n\}} |f(\mu_k^{(n)}) - f(\nu_k^{(n)})| \, \|P_\beta - P_\alpha\| \quad .$$

---

[1] siehe [5] , pp. 71-72

Da f auf $[\alpha,\beta]$ gleichmäßig stetig und $|\mu_k^{(n)} - \nu_k^{(n)}| \leq \lambda_j^{(m)} - \lambda_{j-1}^{(m)}$ ist, gilt also $\| A_n - A_m \| \to 0$ für $m \to \infty$ ($\Rightarrow n \to \infty$), weswegen es ein $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ geben muß mit $A_n \to A$ für $n \to \infty$.

Also gilt $\langle Ax,x\rangle = \lim\limits_{n\to\infty} \langle A_n x,x\rangle =$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} f(\mu_k^{(n)})[\langle P_{\lambda_k^{(n)}}x,x\rangle - \langle P_{\lambda_{k-1}^{(n)}}x,x\rangle] = \int\limits_{]\alpha,\beta]} f(\lambda)d\langle P_\lambda x,x\rangle .$$

Ist $A' \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit $\langle A'x,x\rangle = \int\limits_{]\alpha,\beta]} f(\lambda)d\langle P_\lambda x,x\rangle = \langle Ax,x\rangle \;\; \forall x \in \mathcal{H}$, so gilt ($A' - A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ und) $\langle (A'-A)x,x\rangle = 0 \;\; \forall x \in \mathcal{H}$, also nach 1.1.12 $A' - A = \mathcal{O}$ oder $A' = A =: A_f^{(\alpha,\beta)}$.

(ii) Wegen 1.1.20(iii) gilt :

$$\| A_n \| = \| \sum_{k=1}^{k_n} f(\mu_k^{(n)}) [P_{\lambda_k^{(n)}} - P_{\lambda_{k-1}^{(n)}}] \| \leq \max_{k\in\{1,\dots,k_n\}} |f(\mu_k^{(n)})| \, \|P_\beta - P_\alpha\| \leq$$

$$\leq \max_{\lambda\in[\alpha,\beta]} |f(\lambda)| \, \|P_\beta - P_\alpha\| \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \| A_f^{(\alpha,\beta)} \| = \lim_{n\to\infty} \| A_n \| \leq$$
$$\leq \max_{\lambda\in[\alpha,\beta]} |f(\lambda)| \, \|P_\beta - P_\alpha\| .$$

(iii) $A_n^* = \sum\limits_{k=1}^{k_n} \overline{f(\mu_k^{(n)})} [P_{\lambda_k^{(n)}} - P_{\lambda_{k-1}^{(n)}}]$, $\quad [A_f^{(\alpha,\beta)}]^* =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} A_n^*$; da aber mit f natürlich auch $\bar{f}$ stetig ist, gilt klarerweise $\langle A_{\bar{f}}^{(\alpha,\beta)}x,x\rangle = \lim\limits_{n\to\infty} \langle A_n^* x,x\rangle \;\; \forall x \in \mathcal{H}$, woraus leicht $A_{\bar{f}}^{(\alpha,\beta)} = [A_f^{(\alpha,\beta)}]^*$ folgt. $\square$

1.2.5 Bezeichnung : Wir schreiben auch

$$A_f^{(\alpha,\beta)} =: \int_{]\alpha,\beta]} f(\lambda)dP_\lambda$$ und nennen dies Operator-Integral von f (bezüglich der Spektralschar $\lambda \mapsto P_\lambda$)

1.2.6 Satz : Sei $\lambda \mapsto P_\lambda$ $\mathbb{R} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ wie in 1.2.1 , $f,g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig ,

$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < \beta < \gamma$ sowie $\mu \in \mathbb{C}$; dann gilt :

(i) $\left\langle \left[\int_{]\alpha,\beta]} f(\lambda)dP_\lambda\right]x,x\right\rangle = \int_{]\alpha,\beta]} f(\lambda)d\langle P_\lambda x,x\rangle \quad \forall x \in \mathcal{H}.$

(ii) $\int_{]\alpha,\beta]} f(\lambda)dP_\lambda + \int_{]\beta,\gamma]} f(\lambda)dP_\lambda = \int_{]\alpha,\gamma]} f(\lambda)dP_\lambda$

(iii) $\int_{]\alpha,\beta]} [\mu f(\lambda) + g(\lambda)]dP_\lambda = \mu\int_{]\alpha,\beta]} f(\lambda)dP_\lambda + \int_{]\alpha,\beta]} g(\lambda)dP_\lambda$.

(iv) $\int_{]\alpha,\beta]} [f(\lambda)g(\lambda)]\,dP_\lambda = \left[\int_{]\alpha,\beta]} f(\lambda)dP_\lambda\right]\left[\int_{]\alpha,\beta]} g(\lambda)dP_\lambda\right]$.

(v) $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow \left[\int_{]\alpha,\beta]} f(\lambda)dP_\lambda\right]^* = \int_{]\alpha,\beta]} f(\lambda)dP_\lambda$.

(vi) $f(\mathbb{R}) \cup g(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$, $f(\lambda) \leq g(\lambda) \;\forall \lambda \in [\alpha,\beta] \Rightarrow$

$$\int_{]\alpha,\beta]} f(\lambda)dP_\lambda \leq \int_{]\alpha,\beta]} g(\lambda)dP_\lambda \quad .$$

Beweis : (i) ist 1.2.4(i) in der Bezeichnung 1.2.5 ;

(ii) und (iii) gelten, da die entsprechenden Gleichungen für die Integrale bezüglich μ_x richtig sind $\forall x \in \mathcal{H}$ (vgl. 1.2.4(i)!) [1]

(iv) Seien A_n wie im Beweis von 1.2.4 ,

$$B_n := \sum_{k=1}^{k_n} g(\mu_k^{(n)}) \left[P_{\lambda_k^{(n)}} - P_{\lambda_{k-1}^{(n)}}\right] \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ ; daher gilt}$$

$$A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A_f^{(\alpha,\beta)} \text{ und } B_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A_g^{(\alpha,\beta)} \text{, also } A_nB_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A_f^{(\alpha,\beta)}A_g^{(\alpha,\beta)} .$$

---

1) siehe [5] , p. 63

aber nach 1.1.20(i) ist

$$A_nB_n = \sum_{k=1}^{k_n} f(\mu_k^{(n)})g(\mu_k^{(n)})\left[P_{\lambda_k^{(n)}} - P_{\lambda_{k-1}^{(n)}}\right] =: C_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \quad \forall n \in \mathbb{N} ;$$

da mit f , g natürlich auch $fg : \begin{matrix} \lambda \mapsto f(\lambda)g(\lambda) \\ \mathbb{R} \to \mathbb{C} \end{matrix}$ stetig ist, gilt

$$\langle C_n x,x\rangle \underset{n\to\infty}{\to} \int_{]\alpha,\beta]} f(\lambda)g(\lambda)d\langle P_\lambda x,x\rangle \ \forall x\in\mathcal{H} \text{ , woraus } C_n \underset{n\to\infty}{\to} A_{fg}^{(\alpha,\beta)}$$

folgt, da ja $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert .

Also gilt $\left[\int_{]\alpha,\beta]} f(\lambda)dP_\lambda\right]\left[\int_{]\alpha,\beta]} g(\lambda)dP_\lambda\right] = \lim_{n\to\infty} A_nB_n = \lim_{n\to\infty} C_n =$

$$= \int_{]\alpha,\beta]} f(\lambda)g(\lambda)dP_\lambda \quad .$$

(v) folgt aus 1.2.4(iii) .

(vi) $f(\lambda) \le g(\lambda) \ \forall \lambda\in\mathbb{R} \Rightarrow \int_{]\alpha,\beta]} f(\lambda)d\langle P_\lambda x,x\rangle \le \int_{]\alpha,\beta]} g(\lambda)d\langle P_\lambda x,x\rangle \ \forall x\in\mathcal{H}$,

1.1.13 , 1.2.4(i) $\Rightarrow A_f^{(\alpha,\beta)} \le A_g^{(\alpha,\beta)}$. □

<u>1.2.7 Bemerkung</u> : Die Abbildung $\begin{matrix} f \mapsto A_f^{(\alpha,\beta)} \\ C_{\mathbb{C}}([\alpha,\beta]) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}) \end{matrix}$ von der

Algebra $C_{\mathbb{C}}([\alpha,\beta])$ der stetigen Funktionen auf $[\alpha,\beta]$ nach $\mathbb{C}$ mit der Norm $\|f\|_\infty := \max_{\lambda\in[\alpha,\beta]} |f(\lambda)|$ in die Algebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit Norm $\|\cdot\|$ ist also ein stetiger (vgl. 1.2.8 !) Algebra-Homomorphismus.

<u>1.2.8 Korollar</u> : Seien f , $f_N : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig $\forall N\in\mathbb{N}$,

$f_N \underset{N\to\infty}{\to} f$ gleichmäßig auf $[\alpha,\beta]$ ($\Leftrightarrow \max_{\lambda\in[\alpha,\beta]} |f_N(\lambda) - f(\lambda)| \underset{N\to\infty}{\to} 0$);

dann gilt $A_{f_N}^{(\alpha,\beta)} \to A_f^{(\alpha,\beta)}$ für $N \to \infty$.

<u>Beweis</u> : $\| A_{f_N}^{(\alpha,\beta)} - A_f^{(\alpha,\beta)} \| = \| A_{f_N - f}^{(\alpha,\beta)} \| \leq \| f_N - f \|_\infty \| P_\beta - P_\alpha \| \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} 0$.

Hier folgt die Gleichung aus 1.2.6(iii) und die Ungleichung aus 1.2.4(ii) ($\| f_N - f \|_\infty = \max_{\lambda \in [\alpha,\beta]} | f_N(\lambda) - f(\lambda) | \to 0$ für $N \to \infty$). □

<u>1.2.9 Proposition</u> : Sei $\lambda \mapsto P_\lambda$ wie in 1.2.1 , $\lambda \geq a$; dann gilt :
$\mathbb{R} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$

$$P_\lambda = \int_{]a-\varepsilon,\lambda]} 1 \, dP_\mu \qquad \forall\, \varepsilon > 0 .$$

<u>Beweis</u> : Sei $\gamma_n = \{\lambda_0^{(n)}, \lambda_1^{(n)}, \ldots, \lambda_{k_n}^{(n)}\}$, $a-\varepsilon = \lambda_0^{(n)} < \ldots < \lambda_{k_n}^{(n)} = \lambda$,
$\mu_k^{(n)} \in [\lambda_{k-1}^{(n)}, \lambda_k^{(n)}] \quad \forall\, k \in \{1,\ldots,k_n\}$; dann gilt

$$\sum_{k=1}^{k_n} 1(\mu_k^{(n)}) [P_{\lambda_k^{(n)}} - P_{\lambda_{k-1}^{(n)}}] = P_\lambda - P_{a-\varepsilon} = P_\lambda - 0 = P_\lambda . \qquad \square$$

<u>1.2.10 Proposition</u> : Seien $f , g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig, $\lambda \mapsto P_\lambda$ wie in 1.2.1
$\mathbb{R} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$
sowie $\alpha , \beta , \gamma \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < \beta < \gamma$. Dann gilt :

$$\int_{]\alpha,\beta]} f(\lambda) dP_\lambda \int_{]\beta,\gamma]} g(\nu) dP_\nu = \int_{]\beta,\gamma]} g(\nu) dP_\nu \int_{]\alpha,\beta]} f(\lambda) dP_\lambda = 0 .$$

<u>Beweis</u> : Seien $\alpha = \lambda_0^{(n)} < \ldots < \lambda_{k_n}^{(n)} = \beta = \nu_0^{(n)} < \ldots < \nu_{m_n}^{(n)} = \gamma$,
$\mu_k^{(n)} \in [\lambda_{k-1}^{(n)}, \lambda_k^{(n)}] \;\forall\, k \in \{1,\ldots,k_n\}$, $\tau_j^{(n)} \in [\nu_{j-1}^{(n)}, \nu_j^{(n)}] \;\forall\, j \in \{1,\ldots,m_n\}$
sowie $A_n := \sum_{k=1}^{k_n} f(\mu_k^{(n)}) [P_{\lambda_k^{(n)}} - P_{\lambda_{k-1}^{(n)}}]$, $B_n := \sum_{j=1}^{m_n} g(\tau_j^{(n)}) [P_{\nu_j^{(n)}} - P_{\nu_{j-1}^{(n)}}]$.
dann gilt $A_n \to A_f^{(\alpha,\beta)}$, $B_n \to A_g^{(\beta,\gamma)}$ für $n \to \infty$,
also nach 1.1.6(iv) $A_n B_n \to A_f^{(\alpha,\beta)} A_g^{(\beta,\gamma)}$, $B_n A_n \to A_g^{(\beta,\gamma)} A_f^{(\alpha,\beta)}$

Aber $A_n B_n = \sum_{k=1}^{k_n} \sum_{j=1}^{m_n} f(\mu_k^{(n)}) g(\tau_j^{(n)}) (P_{\lambda_k^{(n)}} - P_{\lambda_{k-1}^{(n)}})(P_{\nu_j^{(n)}} - P_{\nu_{j-1}^{(n)}}) = \mathcal{O} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

wegen $P_{\lambda_{k-1}^{(n)}} \leq P_{\lambda_k^{(n)}} \leq P_{\nu_{j-1}^{(n)}} \leq P_{\nu_j^{(n)}}$ (vgl. mit Beweis von 1.1.20(i) !) und

ebenso $B_n A_n = \mathcal{O} \; \forall\, n \in \mathbb{N}$, was $A_f^{(\alpha,\beta)} A_g^{(\beta,\gamma)} = \mathcal{O} = A_g^{(\beta,\gamma)} A_f^{(\alpha,\beta)}$ zeigt. $\square$

<u>1.2.11 Satz</u> : Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig, $\begin{array}{l}\lambda \mapsto P_\lambda \\ \mathbb{R} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})\end{array}$ wie in 1.2.1 ,

$\mathcal{M}$ abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{H}$ mit

$P_\lambda(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M} \; \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$; seien $Q_\lambda := P_\lambda|_{\mathcal{M}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dann gilt :

(i) $\mathcal{M}$ ist Hilbertraum mit innerem Produkt $\langle .,..\rangle|_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}}$.

(ii) $\begin{array}{l}\lambda \mapsto Q_\lambda \\ \mathbb{R} \to \mathcal{B}(\mathcal{M})\end{array}$ ist Spektralschar mit kompaktem Träger in $[a,b]$.

(iii) $\left(\int_{]\alpha,\beta]} f(\lambda)\, dP_\lambda \right)\Big|_{\mathcal{M}} = \int_{]\alpha,\beta]} f(\lambda)\, dQ_\lambda \quad \forall\, \alpha, \beta$ mit $\alpha < \beta$.

<u>Beweis</u> : (i) Eine Cauchyfolge in $\mathcal{M}$ ist auch eine in $\mathcal{H}$, konvergiert daher in $\mathcal{H}$, ihr Grenzwert liegt in $\mathcal{M}$, da $\mathcal{M}$ abgeschlossen ist; also ist $(\mathcal{M} , \langle .,..\rangle|_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}})$ ein Hilbertraum.

(ii) ist leicht zu verifizieren.

(iii) Seien $\lambda_k^{(n)}$, $\mu_k^{(n)}$ wie im Beweis von 1.2.4 , $x \in \mathcal{M}$;

dann ist
$$\left(\int_{]\alpha,\beta]} f(\lambda)\, dP_\lambda \right) x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} f(\mu_k^{(n)}) \left[P_{\lambda_k^{(n)}} x - P_{\lambda_{k-1}^{(n)}} x \right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} f(\mu_k^{(n)}) \left[Q_{\lambda_k^{(n)}} x - Q_{\lambda_{k-1}^{(n)}} x \right] = \left(\int_{]\alpha,\beta]} f(\lambda)\, dQ_\lambda \right) x \quad ,$$

was zu zeigen war. $\square$

1.3 DIE SPEKTRALSCHAR EINES SELBSTADJUNGIERTEN OPERATORS

Im folgenden wird gezeigt, daß jeder selbstadjungierte Operator in eindeutiger Weise eine Spektralschar mit kompaktem Träger festlegt, deren Orthoprojektoren auf Teilräume projizieren, die der Operator invariant läßt; dies geht so vor sich, daß die Zahl, welche den Orthoprojektor charakterisiert, eine obere Schranke auf dem zugehörigen Teilraum und eine untere Schranke auf dessen orthogonalem Komplement bildet, wobei die untere Schranke nicht erreicht werden kann.

<u>1.3.1 Satz und Definition</u> : Sei $A^* = A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$;

seien für $\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad \mathcal{M}_\lambda^A := (A-\lambda Id_{\mathcal{H}})_+^{-1}(\{0\})$ sowie

P_λ^A der OP auf $\mathcal{M}_\lambda^A$. Dann gilt :

$\lambda \mapsto P_\lambda^A$ ist eine Spektralschar mit kompaktem Träger in $[-\|A\|, \|A\|]$;
$\mathbb{R} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$

diese heißt <u>Spektralschar von A</u> . Es gilt :

(i) $AB = BA$, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \Rightarrow BP_\lambda^A = P_\lambda^A B \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

(ii) $\lambda \leq \mu \Rightarrow \lambda(P_\mu^A - P_\lambda^A) \leq A(P_\mu^A - P_\lambda^A) \leq \mu(P_\mu^A - P_\lambda^A)$.

<u>Beweis</u> : Wir zeigen zunächst :

(i) $AB = BA \Rightarrow (A-\lambda Id_{\mathcal{H}})B = AB - \lambda B = BA - \lambda B = B(A-\lambda Id_{\mathcal{H}})$,
1.1.27(iv) $\Rightarrow BP_\lambda^A = P_\lambda^A B \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Es gilt : $\lambda \leq \mu \Rightarrow \mathcal{M}_\lambda^A \subseteq \mathcal{M}_\mu^A$, da : $\qquad (*)$

(i) $\Rightarrow (A-\mu Id_{\mathcal{H}})P_\lambda^A = P_\lambda^A(A-\mu Id_{\mathcal{H}})$, 1.1.29(iii) $\Rightarrow (A-\mu Id_{\mathcal{H}})_+ P_\lambda^A =$
$= P_\lambda^A(A-\mu Id_{\mathcal{H}})_+$; weiters folgt $\forall x \in \mathcal{H}$:

$$\langle (A-\mu Id_{\mathcal{H}})P_\lambda^A x, x\rangle = \langle (A-\mu Id_{\mathcal{H}})(P_\lambda^A)^2 x, x\rangle = \langle P_\lambda^A(A-\mu Id_{\mathcal{H}})P_\lambda^A x, x\rangle =$$
$$= \langle (A-\mu Id_{\mathcal{H}})(P_\lambda^A x), P_\lambda^A x\rangle \leq \langle (A-\lambda Id_{\mathcal{H}})(P_\lambda^A x), P_\lambda^A x\rangle \leq \langle (A-\lambda Id_{\mathcal{H}})_+(P_\lambda^A x), P_\lambda^A x\rangle$$
$$= \langle 0, P_\lambda^A x\rangle = 0 \quad \text{wegen} \quad A-\mu Id_{\mathcal{H}} \leq A-\lambda Id_{\mathcal{H}} \leq (A-\lambda Id_{\mathcal{H}})_+ \ (\ 1.1.28\ !),$$

also $\sigma \leq (\mu Id_{\mathcal{H}}-A)P_\lambda^A$; nach 1.1.27(iii) (und $|-B| = |B|$

für alle $B^* = B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, was aus $(-B)^2 = B^2$ folgt) gilt :

$$|(A-\mu Id_{\mathcal{H}})P_\lambda^A| = |(\mu Id_{\mathcal{H}} - A)P_\lambda^A| = (\mu Id_{\mathcal{H}} - A)P_\lambda^A \qquad \forall \lambda \leq \mu \qquad (\ast\ast)$$

Nach 1.1.29 gilt aber nun wegen $(A-\mu Id_{\mathscr{H}})P_\lambda^A = P_\lambda^A(A-\mu Id_{\mathscr{H}})$:

$|A-\mu Id_{\mathscr{H}}||P_\lambda^A| = |(A-\mu Id_{\mathscr{H}})P_\lambda^A|$, also wegen $\mathcal{O} \leq P_\lambda^A$, 1.1.27(iii)

und $(\overset{*}{*})$: $|A-\mu Id_{\mathscr{H}}|P_\lambda^A = |(A-\mu Id_{\mathscr{H}})P^A| = (\mu Id_{\mathscr{H}} - A)P_\lambda^A$,

woraus $(A-\mu Id_{\mathscr{H}})_+ P_\lambda^A = \frac{1}{2}\left[|A-\mu Id_{\mathscr{H}}|P_\lambda^A - (\mu Id_{\mathscr{H}} - A)P_\lambda^A\right] = \mathcal{O}$ folgt.

Wegen $x \in \mathscr{H}_\lambda^A \Rightarrow (A-\mu Id_{\mathscr{H}})_+ x = (A-\mu Id_{\mathscr{H}})_+ P_\lambda^A x = \Theta x = o \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in (A-\mu Id_{\mathscr{H}})_+^{-1}(\{o\}) = \mathscr{H}_\mu^A$ erhält man also $(*)$, was wiederum wegen 1.1.19(iv) zu $\lambda \leq \mu \Rightarrow P_\lambda^A \leq P_\mu^A$ äquivalent ist.

Nun zeigen wir

(ii) Aus 1.1.28 folgt $(A-\nu Id_{\mathscr{H}})P_\nu^A \leq \mathcal{O} \leq (A-\nu Id_{\mathscr{H}})(Id_{\mathscr{H}} - P_\nu^A) \quad \forall \nu \in \mathbb{R}$,

also $AP_\nu^A \leq \nu P_\nu^A$ sowie $\nu(Id_{\mathscr{H}} - P_\nu^A) \leq A(Id_{\mathscr{H}} - P_\nu^A) \quad \forall \nu \in \mathbb{R} \quad (\overset{**}{*})$

Wegen 1.1.19(iv) und $(*)$ gilt : $\lambda \leq \mu \Rightarrow P_\lambda^A \leq P_\mu^A \Rightarrow$

$P_\mu^A(P_\mu^A - P_\lambda^A) = (P_\mu^A - P_\lambda^A) = (P_\mu^A - P_\lambda^A)^2$, woraus mit $(\overset{**}{*})$, $\nu = \mu$

folgt : $\langle A(P_\mu^A - P_\lambda^A)x,x\rangle = \langle A(P_\mu^A - P_\lambda^A)^2x,x\rangle = \langle (P_\mu^A - P_\lambda^A)A(P_\mu^A - P_\lambda^A)x,x\rangle$

$= \langle A(P_\mu^A - P_\lambda^A)x,(P_\mu^A - P_\lambda^A)x\rangle = \langle AP_\mu^A[(P_\mu^A - P_\lambda^A)x],(P_\mu^A - P_\lambda^A)x\rangle \leq$

$\leq \mu\langle P_\mu^A(P_\mu^A - P_\lambda^A)x,(P_\mu^A - P_\lambda^A)x\rangle = \mu\langle (P_\mu^A - P_\lambda^A)^2x,x\rangle = \mu\langle (P_\mu^A - P_\lambda^A)x,x\rangle$

für alle $x \in \mathscr{H}$, also $A(P_\mu^A - P_\lambda^A) \leq \mu(P_\mu^A - P_\lambda^A)$.

Ebenso gilt wegen 1.1.19(iv) und $(*)$: $\lambda \leq \mu \Rightarrow P_\lambda^A \leq P_\mu^A \Rightarrow$

$\Rightarrow (Id_{\mathscr{H}} - P_\lambda^A)(P_\mu^A - P_\lambda^A) = P_\mu^A - P_\lambda^A = (P_\mu^A - P_\lambda^A)^2$, also mit $(\overset{**}{*})$,

$\nu = \lambda$: $\lambda\langle (P_\mu^A - P_\lambda^A)x,x\rangle = \lambda\langle (P_\mu^A - P_\lambda^A)^2x,x\rangle =$

$= \lambda\langle (Id_{\mathscr{H}} - P_\lambda^A)[(P_\mu^A - P_\lambda^A)x],(P_\mu^A - P_\lambda^A)x\rangle \leq \langle A[(P_\mu^A - P_\lambda^A)x],(P_\mu^A - P_\lambda^A)x\rangle$

$= \langle (P_\mu^A - P_\lambda^A)A(P_\mu^A - P_\lambda^A)x,x\rangle = \langle A(P_\mu^A - P_\lambda^A)^2x,x\rangle = \langle A(P_\mu^A - P_\lambda^A)x,x\rangle$

für alle $x \in \mathscr{H}$, also $\lambda(P_\mu^A - P_\lambda^A) \leq A(P_\mu^A - P_\lambda^A)$, womit (ii) gezeigt ist.

Für $\lambda < -\|A\|$ gilt $\sigma \leq A + \|A\| Id_{\mathcal{H}} \leq A - \lambda Id_{\mathcal{H}}$, also nach 1.1.27(iii) $(A-\lambda Id_{\mathcal{H}})_+ = A - \lambda Id_{\mathcal{H}}$; wäre nun $x \in \mathcal{H}^A_\lambda \setminus \{o\}$, so gälte $Ax - \lambda x = (A-\lambda Id_{\mathcal{H}})_+ x = o$, also $Ax = \lambda x$, also $\|A\|\|x\| < |\lambda|\|x\| = \|\lambda x\| = \|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$, ein Widerspruch, der

$$\lambda < -\|A\| \Rightarrow \mathcal{H}^A_\lambda = \{o\} \Leftrightarrow P^A_\lambda = \sigma$$ zeigt.

Für $\lambda \geq \|A\|$ gilt $A - \lambda Id_{\mathcal{H}} \leq A - \|A\| Id_{\mathcal{H}} \leq \sigma$, also nach 1.1.27(iii) $(A-\lambda Id_{\mathcal{H}})_+ = \frac{1}{2}(\lambda Id_{\mathcal{H}} - A + A - \lambda Id_{\mathcal{H}}) = \sigma$, also $\mathcal{H}^A_\lambda = (A-\lambda Id_{\mathcal{H}})_+^{-1}(\{o\}) = \mathcal{H}$, was gleichbedeutend mit

$$\lambda \geq \|A\| \Rightarrow P^A_\lambda = Id_{\mathcal{H}} \text{ ist.} \qquad (1.3.2)$$

Nun bleibt uns wegen (*) von den Eigenschaften einer Spektralschar nur noch

$$\varepsilon_n \underset{n\to\infty}{\downarrow} 0 \Rightarrow P^A_{\lambda+\varepsilon_n} x \underset{n\to\infty}{\to} P^A_\lambda x \qquad \forall x \in \mathcal{H} , \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$$ zu zeigen :

wegen $P^A_{\lambda+\varepsilon_{n+1}} \leq P^A_{\lambda+\varepsilon_n} \ \forall n \in \mathbb{N}$ gilt nach 1.1.21 :

$P^A_{\lambda+\varepsilon_n} x \underset{n\to\infty}{\to} Px \quad \forall x \in \mathcal{H}$, wobei P OP auf $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^A_{\lambda+\varepsilon_n}$ ist .

Wegen (*) gilt $\mathcal{H}^A_\lambda \subseteq \mathcal{H}^A_{\lambda+\varepsilon_n} \ \forall n \in \mathbb{N}$, also $\mathcal{H}^A_\lambda \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^A_{\lambda+\varepsilon_n}$, also ist nach 1.1.19(iv) $P - P^A_\lambda$ OP auf $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^A_{\lambda+\varepsilon_n} \cap (\mathcal{H}^A_\lambda)^\perp$, also $(P - P^A_\lambda)(\mathcal{H}) \subseteq (\mathcal{H}^A_\lambda)^\perp$. $\qquad$ (**)

Nun ist aber wegen (ii) ($\mu = \lambda + \varepsilon_n$) :

$$\lambda \langle P^A_{\lambda+\varepsilon_n} x - P^A_\lambda x, x \rangle \leq \langle A(P^A_{\lambda+\varepsilon_n} x - P^A_\lambda x), x \rangle \leq (\lambda+\varepsilon_n) \langle P^A_{\lambda+\varepsilon_n} x - P^A_\lambda x, x \rangle$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, wofern man mit $n \to \infty$ hat :

$$\lambda\langle Px - P_\lambda^A x, x\rangle \leq \langle A(Px - P_\lambda^A x), x\rangle \leq \lambda\langle Px - P_\lambda^A x, x\rangle \quad \forall x \in \mathcal{H} \quad \text{oder}$$

$$\lambda(P - P_\lambda^A) \leq A(P - P_\lambda^A) \leq \lambda(P - P_\lambda^A) \Rightarrow (A - \lambda Id_{\mathcal{H}})(P - P_\lambda^A) = \sigma,$$

$$1.1.27(v) \Rightarrow (A - \lambda Id_{\mathcal{H}})_+(P - P_\lambda^A) = (Id_{\mathcal{H}} - P_\lambda^A)(A - \lambda Id_{\mathcal{H}})(P - P_\lambda^A) = \sigma \Rightarrow$$

$$(P - P_\lambda^A)(\mathcal{H}) \subseteq (A - \lambda Id_{\mathcal{H}})_+^{-1}(\{o\}) = \mathcal{M}_\lambda^A \text{ , also wegen } (\tfrac{**}{**}) :$$

$$(P - P_\lambda^A)(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{M}_\lambda^A \cap (\mathcal{M}_\lambda^A)^\perp = \{o\} \Rightarrow P - P_\lambda^A = \sigma \Rightarrow P = P_\lambda^A . \square$$

<u>1.3.3 Proposition</u> : Sei $A = A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\mathcal{M}_\lambda^A$, P_λ^A wie in 1.3.1 , $\lambda \in \mathbb{R}$; dann gilt :

(i) $\langle Ax,x\rangle \leq \lambda \|x\|^2 \quad \forall x \in \mathcal{M}_\lambda^A$,

(ii) $\langle Ax,x\rangle > \lambda \|x\|^2 \quad \forall x \in (\mathcal{M}_\lambda^A)^\perp \setminus \{o\}$.

<u>Beweis</u> : (i) Aus $(\tfrac{**}{*})$ in Teil (ii) des Beweises von 1.3.1 $(\nu = \lambda)$ folgt : $x \in \mathcal{M}_\lambda^A \Rightarrow \langle Ax,x\rangle = \langle AP_\lambda^A x,x\rangle \leq \lambda\langle P_\lambda^A x,x\rangle = \lambda\|x\|^2$.

(ii) Wieder aus $(\tfrac{**}{*})$ im Beweis von 1.3.1 erhält man für $x \in (\mathcal{M}_\lambda^A)^\perp$:

$\lambda\langle x,x\rangle = \lambda\langle (Id_{\mathcal{H}} - P_\lambda^A)x,x\rangle \leq \langle A(Id_{\mathcal{H}} - P_\lambda^A)x,x\rangle = \langle Ax,x\rangle$, also für $x \in (\mathcal{M}_\lambda^A)^\perp \setminus \{o\}$: $\lambda \leq \dfrac{\langle Ax,x\rangle}{\langle x,x\rangle}$; sei nun $B := A\Big|_{(\mathcal{M}_\lambda^A)^\perp}$;

Wegen $A(Id_{\mathcal{H}} - P_\lambda^A) = (Id_{\mathcal{H}} - P_\lambda^A)A$ und 1.1.18 , 1.1.19(vi) gilt $B((\mathcal{M}_\lambda^A)^\perp) \subseteq (\mathcal{M}_\lambda^A)^\perp$, also ist $B : (\mathcal{M}_\lambda^A)^\perp \to (\mathcal{M}_\lambda^A)^\perp$ ein selbstadjungierter linearer Operator auf dem Hilbertraum $(\mathcal{M}_\lambda^A)^\perp$.
Wegen obiger Überlegungen gilt für $\alpha := \inf\left\{ \dfrac{\langle Bx,x\rangle}{\langle x,x\rangle} \;\middle|\; x \in (\mathcal{M}_\lambda^A)^\perp \setminus \{o\} \right\}$ nun $\lambda \leq \alpha$; für $\lambda < \alpha$ ist bereits alles gezeigt; ist aber $\lambda = \alpha$, so wäre für $x \in (\mathcal{M}_\lambda^A)^\perp \setminus \{o\}$ mit $\langle Bx,x\rangle = \alpha\langle x,x\rangle$ nach 1.1.14(ii) $Ax = Bx = \alpha x = \lambda x$, also $(A - \lambda Id_{\mathcal{H}})x = o$, also nach 1.1.29(iv) $(A - \lambda Id_{\mathcal{H}})_+ x = o$, also $x \in \mathcal{M}_\lambda^A \cap (\mathcal{M}_\lambda^A)^\perp = \{o\}$, ein Widerspruch !

Daher gilt für alle $x \in (\mathcal{M}_\lambda^A)^\perp \setminus \{o\}$ $\langle Ax,x\rangle = \langle Bx,x\rangle > \alpha\langle x,x\rangle = \lambda\|x\|^2$. $\square$

<u>1.3.4 Proposition</u> : Sei $A^* = A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, P_λ^A wie in 1.3.1 , $\lambda \in \mathbb{R}$;

sei P OP auf den abgeschlossenen Teilraum $\mathcal{M}$ von $\mathcal{H}$, sodaß

(i) $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $AB = BA \Rightarrow PB = BP$,

(ii) $\langle Ax,x\rangle \leq \lambda\|x\|^2 \quad \forall\, x \in \mathcal{M}$,

(iii) $\langle Ax,x\rangle > \lambda\|x\|^2 \quad \forall\, x \in \mathcal{M}^\perp \setminus \{o\}$ gilt.

Dann ist $P = P_\lambda^A$.

<u>Beweis</u> : Wegen $AP_\lambda^A = P_\lambda^A A$ (1.3.1(i)) folgt aus (i)

$(Id_\mathcal{H} - P_\lambda^A)P = P(Id_\mathcal{H} - P_\lambda^A) =: Q$ und daraus $Q^* = Q^2 = Q$, wie man leicht nachrechnet; nach 1.1.18 ist daher Q OP auf $Q(\mathcal{H})$.

Nun ist $Q(\mathcal{H}) = P(Id_\mathcal{H} - P_\lambda^A)(\mathcal{H}) \subseteq P(\mathcal{H}) = \mathcal{M}$ sowie

$Q(\mathcal{H}) = (Id_\mathcal{H} - P_\lambda^A)P(\mathcal{H}) \subseteq (Id_\mathcal{H} - P_\lambda^A)(\mathcal{H}) = (\mathcal{M}_\lambda^A)^\perp$

(siehe 1.1.18 !) , also $Q(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{M} \cap (\mathcal{M}_\lambda^A)^\perp$;

wäre ein $x \in \mathcal{M} \cap (\mathcal{M}_\lambda^A)^\perp \setminus \{o\}$, so erhielte man wegen 1.3.3(ii) aus (ii) den Widerspruch $\lambda\|x\|^2 < \langle Ax,x\rangle \leq \lambda\|x\|^2$, sodaß also $Q(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{M} \cap (\mathcal{M}_\lambda^A)^\perp = \{o\}$ ist, woraus $Q = \mathcal{O}$ folgt, was $P = P_\lambda^A P$ bedeutet.

Weiters gilt auch $(Id_\mathcal{H} - P)P_\lambda^A = P_\lambda^A(Id_\mathcal{H} - P) =: Q'$, wieder ist analog oben Q' OP auf $Q'(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{M}_\lambda^A \cap \mathcal{M}^\perp$; mittels 1.3.3(i) und (iii) erhält man wieder $\mathcal{M}_\lambda^A \cap \mathcal{M}^\perp = \{o\}$, was wiederum $Q' = \mathcal{O}$ bedeutet, woraus $P_\lambda^A = P_\lambda^A P$ folgt, sodaß sich insgesamt $P = P_\lambda^A P = P_\lambda^A$ ergibt. $\square$

<u>1.3.5 Bemerkung</u> : Die OP der Spektralschar von A (und damit die Spektralschar selbst) sind also durch die Eigenschaften 1.3.4(i),(ii),(iii) eindeutig bestimmt !

<u>1.3.6 Satz</u> : Sei $\lambda \mapsto P_\lambda$ eine Spektralschar mit kompaktem Träger in $[a,b]$ (1.2.1) und

$$A := \int_{]a-\varepsilon,b]} \lambda dP_\lambda \quad , \varepsilon > 0 .$$

Dann gilt ($A^* = A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ und) $\quad P_\lambda = P_\lambda^A \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

die Spektralschar ist also die Spektralschar von A .

<u>Beweis</u> : Da A Grenzwert von Linearkombinationen der Gestalt $\sum_{j=0}^{k} \alpha_j (P_{\lambda_j} - P_{\lambda_{j-1}})$ ist (vgl. 1.2.4 !) , welche mit P_λ klarerweise (nach 1.1.19(iv)) kommutieren, gilt $AP_\lambda = P_\lambda A$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, sodaß wegen 1.3.1(i) $P_\lambda^A P_\lambda = P_\lambda P_\lambda^A \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ gilt. Da im Beweis von 1.3.4 nur diese (schwächere) Eigenschaft von P anstatt 1.3.4(i) verwendet wurde, genügt es, 1.3.4(ii),(iii) nachzuweisen. Dazu bemerken wir zunächst :

$$1.2.9 \Rightarrow \quad Id_{\mathcal{H}} = P_b = \int_{]a-\varepsilon,b]} 1\, dP_\mu = \int_{]a-\varepsilon,\lambda]} 1 dP_\mu + \int_{]\lambda,b]} 1 dP_\mu$$

$$(\text{ siehe } 1.2.6(ii) \text{ !}) \Rightarrow \quad Id_{\mathcal{H}} - P_\lambda = \int_{]\lambda,b]} 1\, dP_\mu \qquad (*)$$

für alle $\lambda \in [a,b[$.

Weiters gilt wegen 1.2.6(ii),(iv) , 1.2.9 und 1.2.10

$$AP_\lambda = \Big[\int_{]a-\varepsilon,\lambda]} \mu dP_\mu + \int_{]\lambda,b]} \mu dP_\mu \Big] \cdot \int_{]a-\varepsilon,\lambda]} 1\, dP_\mu = \int_{]a-\varepsilon,\lambda]} \mu dP_\mu \int_{]a-\varepsilon,\lambda]} 1\, dP_\mu +$$

$$+ \int_{]\lambda,b]} \mu dP_\mu \int_{]a-\varepsilon,\lambda]} 1 dP_\mu = \int_{]a-\varepsilon,\lambda]} \mu dP_\mu + \theta = \int_{]a-\varepsilon,\lambda]} \mu dP_\mu \quad \text{und}$$

ebenso nach $(*)$ $\quad A(Id_{\mathcal{H}} - P_\lambda) = \int_{]\lambda,b]} \mu dP_\mu \quad , \lambda \in [a,b[.$

Nun ist wegen $\mu \leq \lambda \quad \forall \mu \in]a-\varepsilon,\lambda]$ bzw. $\lambda \leq \mu \quad \forall \mu \in]\lambda,b]$

und wegen 1.2.6(vi) , 1.2.9

$$AP_\lambda = \int\limits_{]a-\varepsilon,\lambda]} \mu \, dP_\mu \leq \int\limits_{]a-\varepsilon,\lambda]} \lambda \, dP_\mu = \lambda P_\lambda \qquad \text{bzw. wegen } (*)$$

$$\lambda(Id_{\mathcal{H}}-P_\lambda) = \int\limits_{]\lambda,b]} \lambda \, dP_\mu \leq \int\limits_{]\lambda,b]} \mu \, dP_\mu = A(Id_{\mathcal{H}}-P_\lambda) \quad \text{, woraus zunächst}$$

$$x \in P_\lambda(\mathcal{H}) \Rightarrow \langle Ax,x\rangle = \langle AP_\lambda x,x\rangle \leq \lambda \langle P_\lambda x,x\rangle = \lambda \|x\|^2 \quad \text{sowie}$$

$$x \in (P_\lambda(\mathcal{H}))^\perp \Rightarrow \langle Ax,x\rangle = \langle A(Id_{\mathcal{H}}-P_\lambda)x,x\rangle \geq \langle \lambda(Id_{\mathcal{H}}-P_\lambda)x,x\rangle = \lambda \|x\|^2$$

(vgl. 1.1.18 !) folgt. Ist nun $x \in \mathcal{H}$ mit

$\langle A(Id_{\mathcal{H}}-P_\lambda)x,x\rangle = \lambda \langle (Id_{\mathcal{H}}-P_\lambda)x,x\rangle$, so gilt wegen $(*)$, 1.2.6(i)

$$0 = \langle \int\limits_{]\lambda,b]} \mu \, dP_\mu x,x\rangle - \langle \int\limits_{]\lambda,b]} \lambda \, dP_\mu x,x\rangle = \int\limits_{]\lambda,b]} \mu \, d\langle P_\mu x,x\rangle - \int\limits_{]\lambda,b]} \lambda \, d\langle P_\mu x,x\rangle =$$

$$= \int\limits_{]\lambda,b]} (\mu-\lambda) \, d\langle P_\mu x,x\rangle = \int\limits_{]\lambda,\nu]} (\mu-\lambda) \, d\langle P_\mu x,x\rangle + \int\limits_{]\nu,b]} (\mu-\lambda) \, d\langle P_\mu x,x\rangle \geq$$

$$\geq 0 + \int\limits_{]\nu,b]} (\nu-\lambda) \, d\langle P_\mu x,x\rangle = (\nu-\lambda) \langle \int\limits_{]\nu,b]} 1 \, dP_\mu x,x\rangle = (\nu-\lambda)\langle (Id_{\mathcal{H}}-P_\nu)x,x\rangle$$

$$= (\nu-\lambda)\|(Id_{\mathcal{H}}-P_\nu)x\|^2 \quad \forall \nu \in]\lambda,b[\;\Rightarrow\; (Id_{\mathcal{H}}-P_\nu)x = o \quad \forall \nu \in]\lambda,b[$$

$\Rightarrow P_\nu x = x \;\; \forall \nu \in]\lambda,b[$, also wegen 1.2.1(iv) $\quad P_\lambda x = x$,

also $x \in P_\lambda(\mathcal{H})$, sodaß für $x \in (P_\lambda(\mathcal{H}))^\perp \setminus \{o\} \subseteq \mathcal{H} \setminus P_\lambda(\mathcal{H})$

immer $\langle Ax,x\rangle > \lambda \|x\|^2$ sein muß , womit auch 1.3.4(iii) gezeigt ist.

Deshalb ist $P_\lambda = F_\lambda^A \;\; \forall \lambda \in [a,b[$.

Sei $\delta > 0$ beliebig ; dann ist $\|A - \int\limits_{]a-\delta,b]} \lambda \, dP_\lambda\| = \|\int\limits_{]a-\delta',a-\varepsilon']} \lambda \, dP_\lambda\| \leq$

$$\leq \max\{|a-\delta'|,|a-\varepsilon'|\}\|P_{a-\varepsilon'}-P_{a-\delta'}\| = c\,\|\theta - \theta\| = 0$$

(hiebei sei $\varepsilon' := \min\{\varepsilon,\delta\}$, $\delta' := \max\{\varepsilon,\delta\}$) , also ist $\quad A = \int_{]a-\delta,b]} \lambda dP_\lambda \qquad \forall\, \delta > 0$, weswegen nach 1.2.6(vi)

$$(a-\delta)\,Id_{\mathcal{H}} = \int_{]a-\delta,b]} (a-\delta)dP_\lambda \leq \int_{]a-\delta,b]} \lambda dP_\lambda = A = \int_{]a-\delta,b]} b dP_\lambda = b\,Id_{\mathcal{H}}$$

ist, sodaß man analog zum Beweis von 1.3.1 (dort war

$a-\delta = -\|A\|$, $b = \|A\|$) $\quad P_\lambda^A = \Theta = P_\lambda \;\; \forall \lambda < a-\delta \;\; (\Rightarrow P_\lambda^A = P_\lambda \; \forall \lambda < a)$

und $P_\lambda^A = Id_{\mathcal{H}} = P_\lambda \;\; \forall \lambda \geq b$ zeigen kann. $\square$

1.4 POTENZREIHEN; DIE SPEKTRALDARSTELLUNG SELBSTADJUNGIERTER OPERATOREN

Nach der Definition von Potenzreihen von Operatoren als Grenzwert von Partialsummen wird gezeigt, daß sich Potenzreihen selbstadjungierter Operatoren als Operator-Integrale bezüglich der im vorigen Kapitel konstruierten Spektralschar des Operators darstellen lassen: die Spektraldarstellung.

1.4.1 Proposition und Definition : Ist $f(\lambda) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^k$,

$a_k \in \mathbb{C}\ \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, für $|\lambda| \leq r$ (absolut und gleichmäßig)[1),2)]

konvergent, so ist für $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit $\|A\| \leq r$

$$f(A) := \lim_{N \to \infty} \sum_{k=0}^{N} a_k A^k \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \text{ wohldefiniert}$$

(schreiben dann $f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$) und es gilt

$$\|f(A)\| \leq f_+(\|A\|) \text{ , wobei } f_+(\lambda) := \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|\, \lambda^k \text{ , } |\lambda| \leq r \text{ ,}$$

$$\text{sowie } [f(A)]^* = \bar{\bar{f}}(A^*) \text{ , wobei } \bar{\bar{f}}(\lambda) := \sum_{k=0}^{\infty} \bar{a}_k \lambda^k \text{ , } |\lambda| \leq r \text{ .}$$

Beweis : $\|\sum_{k=0}^{N} a_k A^k - \sum_{k=0}^{M} a_k A^k\| = \|\sum_{k=M+1}^{N} a_k A^k\| \leq \sum_{k=M+1}^{N} |a_k| \|A\|^k \to 0$

für $N, M \to \infty$ (und $M \leq N$), da ja $f(\|A\|)$ absolut konvergiert.

Wegen 1.1.6(iii) existiert also $\lim_{N \to \infty} \sum_{k=0}^{N} a_k A^k \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$;

$$\|\sum_{k=0}^{N} a_k A^k\| \leq \sum_{k=0}^{N} |a_k| \|A\|^k \leq f_+(\|A\|) \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \|f(A)\| \leq f_+(\|A\|) \text{ .}$$

$$[f(A)]^* = [\lim_{N \to \infty} \sum_{k=0}^{N} a_k A^k]^* = \lim_{N \to \infty} [\sum_{k=0}^{N} a_k A^k]^* = \lim_{N \to \infty} \sum_{k=0}^{N} \bar{a}_k (A^*)^k = \bar{\bar{f}}(A^*)$$

wegen 1.1.8 . □

1.4.2 Korollar : Unter den Voraussetzungen von 1.4.1 gelten

der Umordnungssatz sowie der Multiplikationssatz für Reihen [2)]

sinngemäß analog.

Beweis : „wörtlich" aus der Analysis übertragbar. □

---

1) Im folgenden sei mit „konvergenter Potenzreihe" immer „absolut und gleichmäßig konvergente Potenzreihe" gemeint.

2) siehe [9] , pp. 41-46 und pp. 98-112

1.4.3 Proposition : Seien A_i , $B_i \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit $A_i^* = A_i$, $B_i^* = B_i$ für alle $i \in \{1,\dots,n\}$; dann gilt

$$(\sum_{i=1}^{n} A_i)^* = \sum_{i=1}^{n} A_i \ , \quad (\sum_{i=1}^{n} B_i)^* = \sum_{i=1}^{n} B_i \quad \text{sowie}$$

$$A_i \leq B_i \quad \forall i \in \{1,\dots,n\} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} A_i \leq \sum_{i=1}^{n} B_i \ .$$

Beweis : trivial aus 1.1.10, 1.1.13 . □

1.4.4 Satz (Spektraldarstellung) : Sei $A^* = A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, seien P_λ^A , $\lambda \in \mathbb{R}$, wie in 1.3.1 ; sei $f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^k$ für $|\lambda| \leq r$ konvergent und $\|A\| < r$, Dann gilt :

$$f(A) = \int_{]-r,r]} f(\lambda) dP_\lambda^A \quad \text{(wobei wir } f|_{\mathbb{R}} = f \text{ setzen) und :}$$

die Spektralschar von A ist die einzige Spektralschar mit kompaktem Träger, die diese Eigenschaft hat.

Beweis : (i.) Sei zunächst $f(\lambda) = \lambda = Id_{\mathbb{C}}(\lambda)$; zu zeigen ist $A_{Id_{\mathbb{R}}}^{(-r,r)} = A$ (in der Nomenklatur von 1.2.4/5 ; wegen $Id_{\mathbb{C}}|_{\mathbb{R}} = Id_{\mathbb{R}}$)

Seien $-r = \lambda_0^{(n)} < \lambda_1^{(n)} < \dots < \lambda_{k_n}^{(n)} = r$, $\delta_n := \max_{1 \leq k \leq k_n} |\lambda_k^{(n)} - \lambda_{k-1}^{(n)}|$

und $\delta_n \to 0$ für $n \to \infty$ vorausgesetzt;

seien $P_{k,n} := P_{\lambda_k^{(n)}}^A$, $k \in \{0,\dots,k_n\}$; seien $A_n := \sum_{k=1}^{k_n} \lambda_k^{(n)} (P_{k,n} - P_{k-1,n})$

dann gilt wegen 1.3.1(ii) sowie 1.4.3 :

$$\sum_{k=1}^{k_n} \lambda_{k-1}^{(n)} (P_{k,n} - P_{k-1,n}) \leq \sum_{k=1}^{k_n} A(P_{k,n} - P_{k-1,n}) \leq A_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \ ,$$

also wegen $\sum_{k=1}^{k_n} A(P_{k,n} - P_{k-1,n}) = A(P_r^A - P_{-r}^A) = A(Id_{\mathcal{H}} - 0) = A$:

$$0 \leq \langle A_n x,x \rangle - \langle Ax,x \rangle \leq \langle A_n x,x \rangle - \langle [\sum_{k=1}^{k_n} \lambda_{k-1}^{(n)} (P_{k,n} - P_{k-1,n})] x,x \rangle =$$

$$= \langle \Big[\sum_{k=1}^{k_n} [\lambda_k^{(n)} - \lambda_{k-1}^{(n)}] (P_{k,n} - P_{k-1,n}) \Big] x,x \rangle \leq \| \sum_{k=1}^{k_n} [\lambda_k^{(n)} - \lambda_{k-1}^{(n)}] (P_{k,n} - P_{k-1,n}) \| \|x\|^2 ,$$

also nach 1.1.20(iii)

$$0 \leq \langle A_n x,x\rangle - \langle Ax,x\rangle \leq \delta_n \| P_r^A - P_{-r}^A \| \|x\|^2 \underset{n \to \infty}{\to} 0 \quad \forall x \in \mathcal{H} ;$$

also ist $\langle Ax,x\rangle = \lim\limits_{n\to\infty} \langle A_n x,x\rangle = \int\limits_{]-r,r]} Id_{\mathbb{R}}(\lambda) d\langle P_\lambda^A x,x\rangle$ (vgl. 1.2.4 !)

oder $A = A_{Id_{\mathbb{R}}}^{(-r,r)}$, was zu zeigen war; wegen 1.3.6 folgt daraus die Eindeutigkeit der P_λ^A .

(ii) Nun sei $f_N(\lambda) = \sum\limits_{m=0}^{N} a_m \lambda^m$; dann ist wegen (i) und 1.2.6(ii),(iii),(iv)

$$A_{f_N} = \sum_{m=0}^{N} a_m (A_{Id_R})^m = \sum_{m=0}^{N} a_m A^m \quad (= f_N(A)) \quad \forall N \in \mathbb{N} ;$$

nun gilt aber $f_N \underset{N\to\infty}{\to} f$ gleichmäßig für $|\lambda| \leq r$, also gilt für die

Einschränkungen auf $\mathbb{R}$: $f_N \underset{N\to\infty}{\to} f$ gleichmäßig auf $[-r,r]$;

Nach 1.2.8 gilt daher :

$$A_f = \lim_{N\to\infty} A_{f_N} = \lim_{N\to\infty} \sum_{m=0}^{N} a_m A^m = f(A) . \quad \square$$

<u>1.4.5 Korollar</u> : Seien f , g für $|\lambda| \leq r$ konvergente Potenzreihen, $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit $\|A\| < r$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Dann gilt :

(i) $(\alpha f + g)(A) = \alpha f(A) + g(A)$

(ii) $(fg)(A) = f(A)g(A)$

<u>Beweis</u> : (i) Klarerweise ist auch $\alpha f + g : \lambda \mapsto \alpha f(\lambda) + g(\lambda)$ eine für $|\lambda| \leq r$ konvergente Potenzreihe;[1] wegen 1.4.4, 1.2.6(iii) gilt daher $(\alpha f + g)(A) = A_{\alpha f+g}^{(-r,r)} = \alpha A_f^{(-r,r)} + A_g^{(-r,r)} = \alpha f(A) + g(A)$.

(ii) Wegen 1.4.2, 1.4.4 und 1.2.6(iv) gilt :

$$(fg)(A) = A_{fg}^{(-r,r)} = A_f^{(-r,r)} A_g^{(-r,r)} = f(A)g(A) . \quad \square$$

1) siehe [9] , pp. 98-112

<u>1.4.6 Lemma</u> : Sei f für $|\lambda| \leq r$ konvergente Potenzreihe, seien A sowie $A_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit $\|A_n\| \leq r$ $\forall n \in \mathbb{N}$ und

$A_n \to A$ für $n \to \infty$ ($\Rightarrow$ $\|A\| \leq r$); dann gilt :

$$f(A_n) \to f(A) \quad \text{für } n \to \infty .$$

<u>Beweis</u> : Sei $f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^k$; dann gilt

$$\|f(A_n) - f(A)\| = \Big\|\sum_{k=0}^{\infty} a_k A_n^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k\Big\| = \Big\|\sum_{k=1}^{\infty} a_k (A_n^k - A^k)\Big\| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{N} |a_k| \|A_n^k - A^k\| + \sum_{k>N} \left[|a_k| \|A_n\|^k + |a_k| \|A\|^k \right].$$ Sei $\varepsilon \in]0,1[$ beliebig;

wähle $N \in \mathbb{N}$ so groß, daß $\sum_{k>N} |a_k| r^k < \varepsilon/3$; da mit $A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A$

auch $A_n^k \xrightarrow[n\to\infty]{} A^k$ $\forall k \in \mathbb{N}$ (wegen 1.1.6(iii) , Induktion) gilt,

existiert ein $M \in \mathbb{N}$ mit $\|A_n^k - A^k\| < \frac{\varepsilon^k}{3|a_k|(1-\varepsilon)}$ $\forall k \in \{1,\dots,N\}$

mit $a_k \neq 0$, falls $n > M$ ist; dann gilt also :

$$\|f(A_n) - f(A)\| < 2\varepsilon/3 + \frac{1}{3(1-\varepsilon)} \sum_{k=1}^{N} \varepsilon^k < 2\varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon . \square$$

<u>1.4.7 Satz</u> : Seien f für $|\lambda| \leq r$, g für $|\mu| \leq R$, $(g \circ f)(\lambda) := g(f(\lambda))$ für $|\lambda| \leq r$ konvergente Potenzreihen, es gelte $f_+(r) \leq R$; sei $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit $\|A\| \leq r$, $B := f(A)$ ($\Rightarrow \|B\| \leq R$).

Dann gilt $\quad (g \circ f)(A) = g(B) \quad (= g(f(A)) \;)$.

<u>Beweis</u> : (i) Sei $\|A\| < r$; seien $f^k(\lambda) := [f(\lambda)]^k$, $k \in \mathbb{N}$; dann sind f^k für $|\lambda| \leq r$ konvergente Potenzreihen, 1.4.5(ii) $\Rightarrow$ (mit Induktion): $\quad f^k(A) = [f(A)]^k \quad \forall k \in \mathbb{N}$. $\qquad (*)$

Wegen (*), 1.4.5 (i) gilt daher (mit Induktion) für

$$g_N(\mu) := \sum_{k=0}^{N} b_k\mu^k \quad , \quad N \in \mathbb{N} \text{ , wobei } \quad g(\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k\mu^k \quad :$$

$$g_N(f(A)) = \sum_{k=0}^{N} b_k[f(A)]^k = \sum_{k=0}^{N} b_k f^k(A) = (\sum_{k=0}^{N} b_k f^k)(A) = (g_N \circ f)(A)$$

für alle $N \in \mathbb{N}$. Nun ist einerseits wegen $\|B\| \leq R$ $\quad g_N(B) \underset{N \to \infty}{\to} g(B)$

nach 1.4.1 und andererseits wegen $g_N \circ f \underset{N \to \infty}{\to} g \circ f$ gleichmäßig

auf $[-r,r]$ nach 1.2.8 $\quad A^{(-r,r)}_{(g_N \circ f)} \underset{N \to \infty}{\to} A^{(-r,r)}_{(g \circ f)}$. Insgesamt erhält

man mit 1.4.4 : $\quad g(B) = \lim_{N \to \infty} g_N(B) = \lim_{N \to \infty} (g_N \circ f)(A) = \lim_{N \to \infty} A^{(-r,r)}_{(g_N \circ f)} =$

$= A^{(-r,r)}_{(g \circ f)} = (g \circ f)(A)$, da ja $\|A\| < r$ war.

(ii) Nun sei $\|A\| = r$; dann sind $A_n := (1 - \frac{1}{n})A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $n \in \mathbb{N}$, mit

$\|A_n\| = (1 - \frac{1}{n})\|A\| < r$; seien $B_n := f(A_n)$; dann folgt mit

1.4.6 : $A_n \to A \Rightarrow B_n \to B \Rightarrow g(B_n) \to g(B)$ für $n \to \infty$,

da $\|B_n\| \leq f_+(\|A_n\|) < f_+(r) \leq R \;\; \forall n \in \mathbb{N}$. Wegen (i) gilt

$g(B_n) = (g \circ f)(A_n) \;\; \forall n \in \mathbb{N}$; wieder wegen 1.4.6 gilt

$(g \circ f)(A_n) \underset{n \to \infty}{\to} (g \circ f)(A)$, woraus $g(B) = (g \circ f)(A)$ folgt. □

<u>1.4.8 Proposition</u> : Seien f für $|\lambda| \leq r$, g für $|\mu| \leq R$

konvergente Potenzreihen, $A , B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit $AB = BA$

sowie $\|A\| \leq r$, $\|B\| \leq R$. Dann gilt :

$$f(A)g(B) = g(B)f(A) \quad .$$

Beweis : $AB = BA$, Induktion $\Rightarrow$ $A^kB = BA^k$ $\forall k \in \mathbb{N}$; deshalb gilt für $f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\lambda^k$: $B\sum_{k=0}^{N} a_kA^k = \sum_{k=0}^{N} a_kBA^k =$

$= \sum_{k=0}^{N} a_kA^kB$ $\forall N \in \mathbb{N}$; da aber B stetig ist, gilt

$$Bf(A)x = B(\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} a_kA^kx) = \lim_{N\to\infty} B\sum_{k=0}^{N} a_kA^kx = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} a_kA^k(Bx)$$

$= f(A)(Bx) = f(A)Bx$ $\forall x \in \mathcal{H}$ $\Rightarrow$ $f(A)B = Bf(A)$; jetzt wiederholt man obige Argumentation mit B anstelle von A und $f(A)$ anstelle von B , um schließlich $f(A)g(B) = g(B)f(A)$ zu erhalten. $\square$

1.4.9 Proposition : Sei $A^* = A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, f für $|\lambda| \leq r$ konvergente Potenzreihe, $\|A\| \leq r$ sowie $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ mit $-r < \alpha < \beta \leq r$ und

$\alpha\|x\|^2 < \langle Ax,x\rangle \leq \beta\|x\|^2$ $\forall x \in \mathcal{H}\setminus\{0\}$. Dann gilt :

(i) $P_\alpha^A = \mathcal{O}$, $P_\beta^A = Id_{\mathcal{H}}$ sowie

(ii) $f(A) = \int_{]\alpha,\beta]} f(\lambda)dP_\lambda^A$.

Beweis : (i) $\mathcal{O}$, $Id_{\mathcal{H}}$ kommutieren trivialerweise mit jedem mit A kommutierenden Operator. Wegen

$\alpha\|x\|^2 < \langle Ax,x\rangle$ $\forall x \in \mathcal{H}\setminus\{0\} = \{0\}^\perp\setminus\{0\} = [\mathcal{O}(\mathcal{H})]^\perp\setminus\{0\}$,

$\langle Ax,x\rangle \leq \alpha\|x\|^2$ $\forall x \in \{0\} = \mathcal{O}(\mathcal{H})$ sowie wegen

$\langle Ax,x\rangle \leq \beta\|x\|^2$ $\forall x \in \mathcal{H} = Id_{\mathcal{H}}(\mathcal{H})$,

$\beta\|x\|^2 < \langle Ax,x\rangle$ $\forall x \in \emptyset = \{0\}\setminus\{0\} = \mathcal{H}^\perp\setminus\{0\} = [Id_{\mathcal{H}}(\mathcal{H})]^\perp\setminus\{0\}$

und 1.3.4 gilt (da $\mathcal{O}$, $Id_{\mathcal{H}}$ ja auch OP sind) : $\mathcal{O} = P_\alpha^A$ und $Id_{\mathcal{H}} = P_\beta^A$.

(ii) Wegen 1.2.6(ii) und $\left\| \int\limits_{]-r,\alpha]} f(\lambda)dP_\lambda^A \right\| \leq \max\limits_{-r\leq\lambda\leq\alpha} |f(\lambda)| \, \| P_\alpha^A - P_{-r}^A \| = 0$

(wegen $P_{-r}^A = P_\alpha^A = \theta$) sowie $\int\limits_{]\beta,r]} f(\lambda)dP_\lambda^A = \theta$

(analog oben , wegen $P_\beta^A = P_r^A = Id_{\mathcal{H}}$) gilt

$$\int\limits_{]\alpha,\beta]} f(\lambda)dP_\lambda^A = \theta + \int\limits_{]\alpha,\beta]} f(\lambda)dP_\lambda^A + \theta = \int\limits_{]-r,\alpha]} f(\lambda)dP_\lambda^A +$$

$$+ \int\limits_{]\alpha,\beta]} f(\lambda)dP_\lambda^A + \int\limits_{]\beta,r]} f(\lambda)dP_\lambda^A = \int\limits_{]-r,r]} f(\lambda)dP_\lambda^A = f(A) \quad \text{nach 1.4.4 .} \ \square$$

1.5 ISOMETRISCHE UND UNITÄRE OPERATOREN

Isometrische Operatoren sind lineare Abbildungen zwischen (Teilmengen von) Hilberträumen, die das innere Produkt invariant lassen; ein isometrischer Operator, der einen Hilbertraum bijektiv in sich überführt, heißt unitär. Gezeigt wird, daß zu jedem unitären Operator in eindeutiger Weise ein selbstadjungierter Operator existiert, sodaß sich jener als spezielle Potenzreihe von diesm darstellen läßt; daraus wird die Spektraldarstellung unitärer Operatoren abgeleitet.

<u>1.5.1 Definition</u> : Seien $(\mathcal{H}_1, \langle .,..\rangle_1)$, $(\mathcal{H}_2, \langle .,..\rangle_2)$ Hilberträume sowie $\mathcal{M}$ Teilmenge von $\mathcal{H}_1$.

Die Abbildung $U : \mathcal{M} \to \mathcal{H}_2$ heißt <u>isometrisch</u> , wenn

$$\langle U(x), U(y)\rangle_2 = \langle x,y\rangle_1 \qquad \forall\, x , y \in \mathcal{M} \quad \text{gilt.}$$

<u>1.5.2 Proposition</u> : Mit den Bezeichnungen von 1.5.1 gilt :

(i) $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $x_i \in \mathcal{M}$, $i \in \{1,\dots,n\}$, U isometrisch $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i U(x_i) \|_2 = \| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \|_1 \, ,$$

wobei $\|x\|_1 := \sqrt{\langle x,x\rangle_1}$, $\|y\|_2 := \sqrt{\langle y,y\rangle_2}$ sind.

(ii) Ist $\mathcal{M} = \mathcal{H}_1$ und U isometrisch, dann ist U linear

und es gilt $\|U\| := \sup\limits_{\|x\|_1 = 1} \|Ux\|_2 = 1$

(also ist U stetig bezüglich beider Normtopologien, vgl. 1.1.3 sowie 1.1.6(i) !)

<u>Beweis</u> : Induktion über n : $n = 1$: $\|\lambda U(x)\|_2^2 = \langle \lambda U(x), \lambda U(x)\rangle_2$

$= |\lambda|^2 \langle U(x), U(x)\rangle_2 = |\lambda|^2 \langle x,x\rangle_1 = \|\lambda x\|_1^2$;

Angenommen, es gilt für $x := \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i$, $u := \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i U(x_i)$:

$\|x\|_1 = \|u\|_2$; dann folgt wegen 1.1.2(i) :

$$\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i U(x_i) \|_2^2 = \| u + \lambda_n U(x_n) \|_2^2 = \|u\|_2^2 + 2\operatorname{Re}\langle u, \lambda_n U(x_n)\rangle_2 + \|\lambda_n U(x_n)\|_2^2$$

$$= \|x\|_1^2 + 2\operatorname{Re}\langle \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i U(x_i), \lambda_n U(x_n)\rangle_2 + \|\lambda_n x_n\|_1^2 =$$

$$= \|x\|_1^2 + 2\operatorname{Re}\Big[\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \overline{\lambda}_n \langle U(x_i), U(x_n)\rangle_2\Big] + \|\lambda_n x_n\|_1^2 =$$

$$= \|x\|_1^2 + 2\operatorname{Re}\Big[\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \overline{\lambda}_n \langle x_i, x_n\rangle_1\Big] + \|\lambda_n x_n\|_1^2 =$$

$$= \|x\|_1^2 + 2\operatorname{Re}\langle \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i, \lambda_n x_n\rangle_1 + \|\lambda_n x_n\|_1^2 = \|x\|_1^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, \lambda_n x_n\rangle_1 + \|\lambda_n x_n\|_1^2$$

$$= \|x + \lambda_n x_n\|_1^2 = \|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\|_1^2 .$$

(ii) Sei $z := \lambda x + y \in \mathcal{H} = \mathcal{M}$; dann ist nach (i)

$$\| U(z) - \lambda U(x) - U(y) \|_2 = \|z - \lambda x - y\|_1 = \|0\|_1 = 0 \text{ , also}$$

$U(z) = \lambda U(x) + U(y)$, also U linear; wegen $\|x\|_1 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \|Ux\|_2 = \|x\|_1 = 1$ nach (i) gilt $\|U\| = 1$. □

<u>1.5.3 Bezeichnung</u> : Sei $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}_1$; dann sei

$$[\mathcal{M}] := \{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i m_i \mid \lambda_i \in \mathbb{C} , m_i \in \mathcal{M}, i \in \{1,\dots,n\} ; n \in \mathbb{N} \} \subseteq \mathcal{H}_1 .$$

<u>1.5.4 Proposition</u> : Mit den Bezeichnungen von 1.5.1 gilt :

Ist U isometrisch und $[\mathcal{M}]$ dicht in $\mathcal{H}_1$ (dh. $\forall x \in \mathcal{H}_1$ $\exists x_n \in [\mathcal{M}]$, $n \in \mathbb{N}$, mit $x_n \to x$ für $n \to \infty$), so existiert genau eine isometrische Abbildung $\overline{U} : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ mit

$$\overline{U}\big|_{\mathcal{M}} = U .$$

<u>Beweis</u> : Sei $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in [\mathcal{M}]$; dann sei $\tilde{U}(x) := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i U(x_i)$

$\Rightarrow$ $\tilde{U} : [\mathcal{M}] \to \mathcal{H}_2$ ist wohldefiniert, da :

$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \sum_{j=1}^{n'} \lambda_j' x_j'$, x_i , $x_j' \in \mathcal{M}$ $\Rightarrow$ (1.5.2(i))

$$\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i U(x_i) - \sum_{j=1}^{n'} \lambda_j' U(x_j') \|_2 = \| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i - \sum_{j=1}^{n'} \lambda_j' x_j' \|_1 = 0 .$$

Wegen $\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i U(x_i), \sum_{j=1}^{n'} \lambda_j' U(x_j') \rangle_2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n'} \lambda_i \bar{\lambda}_j' \langle U(x_i), U(x_j') \rangle_2 =$

$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n'} \lambda_i \bar{\lambda}_j' \langle x_i, x_j' \rangle_1 = \langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, \sum_{j=1}^{n'} \lambda_j' x_j' \rangle_1$ ist $\tilde{U}$ isometrisch.

Sei $x \in \mathcal{H}_1$ $\Rightarrow \exists\, x_n \in [\mathcal{M}]$, $n \in \mathbb{N}$ mit $x_n \to x$ für $n \to \infty$;

sei $\bar{U}(x) := \lim_{n \to \infty} \tilde{U}(x_n) \in \mathcal{H}_2$ (wegen $\| \tilde{U}(x_n) - \tilde{U}(x_m) \|_2 =$

(1.5.2(i)) $= \| x_n - x_m \|_1 \underset{n,m \to \infty}{\to} 0$ ist $(\tilde{U}(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchyfolge,

also konvergent !); $\bar{U} : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ ist wohldefiniert, da :

$y_n \in [\mathcal{M}]$, $n \in \mathbb{N}$, $y_n \to x$ für $n \to \infty$ $\Rightarrow \exists \lim_{n \to \infty} \tilde{U}(y_n) =: u \in \mathcal{H}_2$;

aber $\| u - \bar{U}(x) \|_2 = \lim_{n \to \infty} \| \tilde{U}(x_n) - \tilde{U}(y_n) \|_2 = \lim_{n \to \infty} \| x_n - y_n \|_1 =$

$= \| x - x \|_1 = 0$ $\Rightarrow$ $u = \bar{U}(x)$. $\bar{U}$ ist isometrisch, da

$\langle \bar{U}(x), \bar{U}(y) \rangle_2 = \lim_{n \to \infty} \langle \tilde{U}(x_n), \tilde{U}(y_n) \rangle_2 = \lim_{n \to \infty} \langle x_n, y_n \rangle_1 = \langle x, y \rangle_1$

(wobei x_n , $y_n \in [\mathcal{M}]$, $n \in \mathbb{N}$, mit $x_n \to x$, $y_n \to y$ für $n \to \infty$).

Klarerweise gilt $\bar{U}(x) = \lim_{n \to \infty} \tilde{U}(x) = \lim_{n \to \infty} U(1.x) = U(x)$ $\forall\, x \in \mathcal{M}$.

Nun sei $\bar{\bar{U}} : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ isometrisch mit $\bar{\bar{U}}|_{\mathcal{M}} = U$; dann ist $\tilde{U}$ nach 1.5.2(ii) linear und stetig; sei $x \in \mathcal{H}$ beliebig $\Rightarrow$

$$\exists\, \lambda_i^{(n)} \in \mathbb{C} \,,\quad x_i^{(n)} \in \mathcal{M} \quad \text{mit} \quad \sum_{i=1}^{N_n} \lambda_i^{(n)} x_i^{(n)} \underset{n\to\infty}{\to} x \;;$$

also gilt nach obigem $\bar{\bar{U}}x = \bar{\bar{U}}\left(\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{N_n} \lambda_i^{(n)} x_i^{(n)}\right) =$

$$= \lim_{n\to\infty} \bar{\bar{U}}\left(\sum_{i=1}^{N_n} \lambda_i^{(n)} x_i^{(n)}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{N_n} \lambda_i^{(n)} \bar{\bar{U}}(x_i^{(n)}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{N_n} \lambda_i^{(n)} U(x_i^{(n)}) = \bar{U}x \,,$$

also $\bar{\bar{U}} = \bar{U}$. $\square$

<u>1.5.5 Proposition</u> : Sei nun in der Bezeichnung von 1.5.1

$\mathcal{H}_1 = \mathcal{M} = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$, $\langle .,..\rangle_1 = \langle .,..\rangle_2 = \langle .,..\rangle$; dann gilt :

$$U \text{ ist isometrisch} \iff U \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \text{ und } U^*U = Id_{\mathcal{H}} \,.$$

<u>Beweis</u> : Nach 1.5.2(ii) bleibt nur noch zu zeigen :

$$\langle (U^*U - Id_{\mathcal{H}})x,y\rangle = \langle U^*Ux,y\rangle - \langle x,y\rangle = \langle Ux,Uy\rangle - \langle x,y\rangle = 0 \quad \forall x\,,\ y \in \mathcal{H} \iff$$
$$\iff U^*U = Id_{\mathcal{H}} \,. \ \square$$

<u>1.5.6 Proposition und Definition</u> : Sei $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ isometrisch ;

dann sind äquivalent : (i) U^* ist isometrisch ,

(ii) $UU^* = Id_{\mathcal{H}}$,

(iii) $U^{-1} = U^*$,

(iv) U ist bijektiv ,

(v) U ist surjektiv .

Wenn U eine (und damit alle) dieser Bedingungen erfüllt, heißt U <u>unitär(er Operator)</u> .

<u>Beweis</u> : $U^{**} = U$, 1.5.5 $\Rightarrow$: (i) $\Rightarrow$ (ii) ; 1.5.5 $\Rightarrow$: (ii) $\Rightarrow$ (iii) ;

(v) $\Rightarrow$ (i) : $\langle U^*x,U^*y\rangle = \langle x,UU^*y\rangle = \langle Uz,UU^*y\rangle = \langle z,U^*y\rangle = \langle Uz,y\rangle = \langle x,y\rangle$.
Der Rest, (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v) , ist trivial. $\square$

1.5.7 Bemerkung : Sei $\exp(\lambda) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\lambda^k$ $\Rightarrow$ exp ist eine $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ konvergente Potenzreihe,

nach 1.4.1 ist daher für $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ $\exp(A) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ wohldefiniert.

1.5.8 Satz : Äquivalent sind :

(i) $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ist unitär ,

(ii) $\exists\ A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit $A^* = A$, $\|A\| \leq \pi$, $-\pi\|x\|^2 < \langle Ax,x\rangle \leq \pi\|x\|^2$ $\forall x \in \mathcal{H}\setminus\{o\}$ und $U = \exp(iA)$.

Beweis : (ii) $\Rightarrow$ (i) : Sei $U = \exp(iA)$, $A^* = A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$;

wegen $\overline{(1/k!)} = 1/k!$ $\forall k \in \mathbb{N}$ ist $\overline{\overline{\exp}}(\lambda) = \exp(\lambda)$,

sodaß wegen 1.4.1 und $(iA)^* = \bar{i}A^* = -iA$ gilt :

$U^* = [\exp(iA)]^* = \overline{\overline{\exp}}([iA]^*) = \exp(-iA)$; nun sei

$e(\lambda) := \exp(\lambda)\exp(-\lambda) = \exp(-\lambda)\exp(\lambda) = 1 = \lambda^0$, $\lambda \in \mathbb{C}$;

wegen 1.4.5(ii), 1.4.7 gilt nun daher

$UU^* = \exp(iA)\exp(-iA) = e(A) = A^0 = Id_{\mathcal{H}} = e(A) = \exp(-iA)\exp(iA) = U^*U$,

was nach 1.5.5 , 1.5.6 alles zeigt.

Um die Umkehrung zu zeigen, benötigen wir zunächst folgendes

1.5.9 Lemma : Seien T , $W \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit $W^* = W$, $T^* = T$, $W^2 = T^2$ sowie $TW = WT$; sei ferner P OP auf $(W-T)^{-1}(\{o\})$.

Dann gilt $W = (2P - Id_{\mathcal{H}})T$ und : $Wx = o \Rightarrow Px = x$.

Beweis : Sei $B := W - T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ $\Rightarrow$ $B^* = B$; dann gilt

$WB = W^2 - WT = W^2 - TW = BW$ und analog $TB = BT$, also

nach 1.1.22 $PW = WP$ und $PT = TP$; nun ist $B(W + T) = W^2 - T^2 = \sigma$,

also $(W + T)x \in B^{-1}(\{o\})$ $\forall x \in \mathcal{H}$ $\Rightarrow$ $P(W + T)x = (W + T)x$ $\forall x \in \mathcal{H} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $P(W + T) = W + T$; per definitionem ist $WP - TP = BP = \sigma$,

also $WP = TP$, also $W + T = PW + PT = WP + TP = 2TP = 2PT$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $W = 2PT - T = (2P - Id_{\mathcal{H}})T$. Ist $Wx = o$, so gilt $0 = \|Wx\|^2 =$

$= \langle Wx,Wx\rangle = \langle W^2x,x\rangle = \langle T^2x,x\rangle = \|Tx\|^2$ $\Rightarrow$ $Tx = o$ $\Rightarrow$ $Bx = o - o = o$

$\Rightarrow$ $Px = x$. $\square$

<u>Beweis</u> von 1.5.8 , (i) $\Rightarrow$ (ii) : Zunächst einige Fakten aus Analysis: [1)]

seien $f(\lambda) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\lambda^k$, $g(\lambda) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\lambda^k$ sowie

$$h(\lambda) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k\lambda^{2k+1}, \text{ wobei } a_k := \frac{1.3.5\ldots(2k-1)}{2^k k!(2k+1)} > 0 \ \forall k\in\mathbb{N} ;$$

f , g sind $\forall\lambda\in\mathbb{C}$ und h für $|\lambda|\leq 1$ konvergente Potenzreihen,

es gilt klarerweise $f = \bar{\bar{f}}$, $g = \bar{\bar{g}}$ und $h = \bar{\bar{h}} = h_+$; weiters sind

$r(\lambda) := [f(\lambda^2)]^2 + [g(\lambda^2)]^2 = 1 = \lambda^0$,

$s(\lambda) := f(\lambda^2) + i\lambda g(\lambda^2) = \exp(i\lambda) \quad \forall\lambda\in\mathbb{C}$ sowie

$t(\lambda) := f([\frac{\pi}{2} - h(\lambda)]^2) = \lambda \quad \forall\lambda\in\mathbb{C}$ mit $|\lambda|\leq 1$ und

$h_+(1) = \frac{\pi}{2}$.

Sei nun $U^*U = UU^* = Id_{\mathcal{H}}$; dann seien $V := \frac{1}{2}(U + U^*) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$,

$W := \frac{1}{2i}(U - U^*) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Dann folgt $V^* = (U^*+U^{**})/2 = (U^*+U)/2 = V$,

$W^* = (U^*-U^{**})/(-2i) = (-U^*+U)/2i = W$,

$VW = (U+U^*)(U-U^*)/4i = (U^2+U^*U-UU^*-U^{*2})/4i = (U^2-U^{*2})/4i$ und ebenso

$WV = (U^2-U^{*2})/4i$, also $VW = WV$,

$V^2 + W^2 = (U^2+UU^*+U^*U+U^{*2})/4 + (U^2-UU^*-U^*U+U^{*2})/(-4) = Id_{\mathcal{H}}$,

$\|V\|\leq(\|U\| + \|U^*\|)/2 = \|U\| = 1$, ebenso $\|W\|\leq 1$.

Sei $B := \frac{\pi}{2}Id_{\mathcal{H}} - h(V) \in\mathcal{B}(\mathcal{H}) \Rightarrow B^* = \frac{\bar{\pi}}{2}Id_{\mathcal{H}}^* - \bar{h}(V^*) = \frac{\pi}{2}Id_{\mathcal{H}} - h(V) = B$;

sei $T := Bg(B^2)\in\mathcal{B}(\mathcal{H}) \Rightarrow T^* = [g(B^2)]^*B^* = \bar{g}([B^2]^*)B = g(B^2)B =$

$= Bg(B^2) = T$ (wegen $BB^2 = B^3 = B^2B$, 1.4.8) .

Wegen $VW = WV$, 1.4.8 gilt $BW = WB$, 1.4.8 $\Rightarrow$ $TW = WT$;

$T^2 + V^2 = T^2 + [t(V)]^2 = [Bg(B^2)]^2 + [f([\frac{\pi}{2}Id_{\mathcal{H}} - h(V)]^2)]^2 =$

$= [Bg(B^2)]^2 + [f(B^2)]^2 = r(B) = B^0 = Id_{\mathcal{H}} \Rightarrow T^2 = Id_{\mathcal{H}} - V^2 = W^2$.

(Bei obigen Gleichungen wurde wiederholt 1.4.7 angewandt.)

---

1) siehe [9] , pp. 67-68/103-104 sowie [6] , pp. 108-109

Sei nun P OP auf $(W-T)^{-1}(\{o\})$; mit 1.5.9 erhält man daher :

$$W = (2P - Id_{\mathcal{H}})T \qquad (*)$$

Sei $A := (2P - Id_{\mathcal{H}})B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$; da nach 1.1.22 aus

$B(W-T) = BW - BBg(B^2) = WB - Bg(B^2)B = WB - TB = (W-T)B$

$BP = PB$ folgt, gilt : $A^* = B^*(2P - Id_{\mathcal{H}})^* = B(2P - Id_{\mathcal{H}}) =$

$= 2BP - B = 2PB - B = (2P - Id_{\mathcal{H}})B = A$; ferner ist

$A^2 = (2P - Id_{\mathcal{H}})^2B^2 = (4P^2 - 4P + Id_{\mathcal{H}})B^2 = Id_{\mathcal{H}}B^2 = B^2$, woraus

wegen $\|Ax\|^2 = \langle Ax,Ax\rangle = \langle A^2x,x\rangle = \langle B^2x,x\rangle = \langle Bx,Bx\rangle = \|Bx\|^2$

$\|A\| = \|B\| = \|\frac{\pi}{2}Id_{\mathcal{H}} - h(V)\| \leq \frac{\pi}{2} + \|h(V)\| \leq \frac{\pi}{2} + h_+(\|V\|) \leq$

$\leq \frac{\pi}{2} + h_+(1) = \pi$ (wegen 1.4.1 , $\|V\| \leq 1$ und der Monotonie von h_+)

folgt. Indem man wiederum öfters 1.4.7 verwendet, erhält man aus

$A^2 = B^2$: $f(A^2) = f(B^2) = f([\frac{\pi}{2} Id - h(V)]^2) = t(V) = V$ sowie

wegen $(*)$: $Ag(A^2) = (2P - Id_{\mathcal{H}})Bg(B^2) = (2P - Id_{\mathcal{H}})T = W$, also

wegen 1.4.7 $\exp(iA) = s(A) = f(A^2) + iAg(A^2) = V + iW =$

$= (U+U^*)/2 + i(U-U^*)/2i = U$.

Wegen $\|A\| \leq \pi$ gilt klarerweise $-\pi\|x\|^2 \leq \langle Ax,x\rangle \leq \pi\|x\|^2 \quad \forall x \in \mathcal{H}$.

Wäre nun $x \in \mathcal{H}\setminus\{o\}$ mit $\langle Ax,x\rangle = -\pi\|x\|^2$, so gälte nach 1.1.14(ii)

$Ax = -\pi x$, also $A^kx = (-\pi)^kx \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \Rightarrow$

$$Ux = \exp(iA)x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} A^kx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} (-\pi)^kx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i\pi)^k}{k!} x = \exp(-i\pi)x ,$$

also wegen $\exp(-i\pi) = -1$ $\quad Ux = -x \Rightarrow U^*x = U^{-1}x = -U^{-1}(-x) = -x$

(da $U^* = U^{-1}$ wegen 1.5.6(iii) !) $\Rightarrow Vx = \frac{1}{2}(Ux + U^*x) = -x \Rightarrow$

$$V^{2k+1}x = -x \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \Rightarrow h(V)x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k V^{2k+1}x = -\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x =$$

$= -h_+(1)x = -\frac{\pi}{2}x \Rightarrow Bx = \frac{\pi}{2}x - h(V)x = \pi x$.

Wegen $W = \frac{1}{i}(U - V)$ gilt $Wx = o$, 1.5.9 $\Rightarrow Px = x \Rightarrow$

$\Rightarrow (2P - Id_{\mathcal{H}})x = 2x - x = x \Rightarrow Ax = (2P - Id_{\mathcal{H}})Bx = \pi(2P - Id_{\mathcal{H}})x =$

$= \pi x$, ein Widerspruch zur Annahme $Ax = -\pi x$, $x \neq o$!

Also muß $-\pi\|x\|^2 < \langle Ax,x\rangle \quad \forall x \in \mathcal{H}\setminus\{o\}$ gelten. $\square$

<u>1.5.10 Lemma</u> : Sei $\lambda \mapsto P_\lambda$ Spektralschar mit kompaktem Träger, sodaß $P_{-\pi} = \mathcal{O}$ und $P_\pi = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$ gilt. Dann existieren Funktionen $p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\lambda \mapsto \sum_{|k| \leq k_n} a_k^{(n)} \exp(ik\lambda)$, $n \in \mathbb{N}$, mit

$$\int_{]-\pi,\pi]} |\lambda - p_n(\lambda)|^2 d\langle P_\lambda x,x\rangle \to 0 \quad \text{für } n \to \infty .$$

<u>Beweis</u> :

Seien für $n \in \mathbb{N}$ $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\lambda \mapsto \begin{cases} \lambda , & \lambda \geq -\pi + \frac{1}{n} , \\ (1-2n\pi)\lambda + 2\pi - 2n\pi^2 , & \lambda < -\pi + \frac{1}{n} . \end{cases}$

dann sind $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig und es gilt $f_n(-\pi) = f_n(\pi)$ sowie

$|\lambda - f_n(\lambda)| \leq 2\pi \;\; \forall \lambda \in [-\pi,\pi]$. Nach dem Satz von Stone & Weierstraß[1] für stetige Funktionen $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ mit $f(-\pi) = f(\pi)$ gibt es Funktionen p_n der oben angegebenen Gestalt, sodaß

$$\|f_n - p_n\|_\infty := \max\{|f_n(\lambda) - p_n(\lambda)| \mid \lambda \in [-\pi,\pi]\} \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

gilt.

Darum ist $|\lambda - p_n(\lambda)|^2 \leq (\,|\lambda - f_n(\lambda)| + |f_n(\lambda) - p_n(\lambda)|\,)^2 \leq$

$\leq (\,|\lambda - f_n(\lambda)| + \frac{1}{n}\,)^2 = |\lambda - f_n(\lambda)|^2 + \frac{2}{n}|\lambda - f_n(\lambda)| + \frac{1}{n^2} \leq$

$\leq |\lambda - f_n(\lambda)|^2 + \frac{2}{n}2\pi + \frac{1}{n^2} \quad \forall \lambda \in [-\pi,\pi]$, weshalb

$$\int_{]-\pi,\pi]} |\lambda - p_n(\lambda)|^2 d\langle P_\lambda x,x\rangle \leq \int_{]-\pi,\pi]} \left[|\lambda - f_n(\lambda)|^2 + \frac{4\pi}{n} + \frac{1}{n^2}\right] d\langle P_\lambda x,x\rangle =$$

$$= \int_{]-\pi,-\pi+\frac{1}{n}]} |\lambda - p_n(\lambda)|^2 d\langle P_\lambda x,x\rangle + \frac{4\pi}{n} + \frac{1}{n^2} \leq 4\pi^2 \left\langle \int_{]-\pi,-\pi+\frac{1}{n}]} 1\, dP_\lambda x,x \right\rangle + \frac{4\pi}{n} + \frac{1}{n^2}$$

---

1) siehe [4] , pp. 137-140

Nun ist
$$\int_{]-\pi,-\pi+\frac{1}{n}]} 1\, dP_\lambda = P_{-\pi+1/n} - P_{-\pi} \text{ (1.2.9 !); 1.2.1(iv) } \Rightarrow$$

$$\int_{]-\pi,-\pi+\frac{1}{n}]} dP_\lambda x \underset{n\to\infty}{\to} 0$$, woraus sich die Behauptung ergibt. $\square$

1.5.11 Satz : Seien $A^* = A$, $B^* = B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit

$$-\pi\|x\|^2 < \langle Ax,x\rangle \leq \pi\|x\|^2 , \quad -\pi\|x\|^2 < \langle Bx,x\rangle \leq \pi\|x\|^2 \quad \forall x \in \mathcal{H}\setminus\{0\}$$

und $\exp(iA) =: U = \exp(iB)$. Dann gilt $A = B$.

Beweis : Seien p_n wie in 1.5.10 ; dann sind $p_n(\lambda)\ \forall \lambda\in\mathbb{C}$ konvergente Potenzreihen und es gilt $p_n(A)x \underset{n\to\infty}{\to} Ax$ bzw.

$p_n(B)x \underset{n\to\infty}{\to} Bx$ für alle $x\in\mathcal{H}$, da :

$$\|Ax - p_n(A)x\|^2 = \left\langle \int_{]-\pi,\pi]}\lambda dP_\lambda x - \int_{]-\pi,\pi]} p_n(\lambda)dP_\lambda x, \int_{]-\pi,\pi]}\lambda dP_\lambda x - \int_{]-\pi,\pi]} p_n(\lambda)dP_\lambda x \right\rangle$$

$$\text{(siehe 1.4.9(ii) !)} = \langle A^{(-\pi,\pi)}_{Id_{\mathbb{R}}-p_n}x, A^{(-\pi,\pi)}_{Id_{\mathbb{R}}-p_n}x\rangle \text{ (siehe 1.2.6(ii) !)} =$$

$$= \langle A^{(-\pi,\pi)}_{\overline{Id_{\mathbb{R}}-p_n}} A^{(-\pi,\pi)}_{Id_{\mathbb{R}}-p_n}x,x\rangle \text{ (siehe 1.2.4 !)} = \langle A^{(-\pi,\pi)}_{|Id_{\mathbb{R}}-p_n|^2}x,x\rangle$$

$$\text{(siehe 1.2.6(iv) !)} = \int_{]-\pi,\pi]} |\lambda - p_n(\lambda)|^2 d\langle P_\lambda x,x\rangle \text{ (siehe 1.2.4 !)} ,$$

also nach 1.5.10 $\|Ax - p_n(A)x\|^2 \to 0$ für $n\to\infty$,

ebenso zeigt man, daß $Bx = \lim_{n\to\infty} p_n(B)x \quad \forall x\in\mathcal{H}$ ist.

Wegen $\exp(i\lambda)^k = \exp(ik\lambda)\ \forall\lambda\in\mathbb{C}$, 1.4.7 gilt nun $\exp(ikA) = U^k$ und wegen $U^{-1} = U^* = \exp(-iA)$ (vgl. mit Beweis von 1.5.8 , (ii) $\Rightarrow$ (i) !) $\exp(-ikA) = U^{-k} := (U^{-1})^k \quad \forall k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, woraus sich wieder nach 1.4.7 $p_n(A) = \sum_{|k| \leq k_n} a_k^{(n)} U^k$ und

ganz analog $p_n(B) = \sum_{|k| \leq k_n} a_k^{(n)} U^k$, also $p_n(A) = p_n(B)$

für alle $n \in \mathbb{N}$ ergibt. Also ist $Ax = \lim_{n \to \infty} p_n(A)x =$

$= \lim_{n \to \infty} p_n(B)x = Bx \quad \forall x \in \mathcal{H}$, woraus $A = B$ folgt. $\square$

1.5.12 Bemerkung : Nach 1.5.8 , 1.5.11 gibt es also zu jedem unitären Operator U einen eindeutig bestimmten selbstadjungierten Operator A mit $-\pi \|x\|^2 < \langle Ax, x\rangle \leq \pi \|x\|^2 \quad \forall x \in \mathcal{H} \setminus \{o\}$, sodaß $\exp(iA) = U$ gilt.

1.5.13 Satz : Sei U unitär; dann existiert eine eindeutig bestimmte Spektralschar mit kompaktem Träger $\lambda \mapsto P_\lambda$, sodaß

$$P_{-\pi} = \Theta \;, \quad P_\pi = Id_{\mathcal{H}} \quad \text{sowie} \quad \int_{]-\pi,\pi]} \exp(i\lambda) dP_\lambda = U \quad \text{gilt.}$$

Beweis : Existenz : Sei $A^* = A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit $\exp(iA) = U$ (1.5.8 !) und $-\pi\|x\|^2 < \langle Ax, x\rangle \leq \pi \|x\|^2 \quad \forall x \in \mathcal{H} \setminus \{o\}$; dann gilt für die Spektralschar von A , $\lambda \mapsto P_\lambda^A$ nach 1.4.9 $P_{-\pi}^A = \Theta$, $P_\pi^A = Id_{\mathcal{H}}$ sowie $U = \exp(iA) = \int_{]-\pi,\pi]} \exp(i\lambda) dP_\lambda^A$.

Eindeutigkeit : Sei für eine solche Spektralschar $\lambda \mapsto P_\lambda$, $\varepsilon > 0$

$A := \int_{]-\pi-\varepsilon,\pi]} \lambda dP_\lambda \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$; 1.2.6(v) $\Rightarrow$ $A^* = A$; dann gilt wegen 1.3.6 $P_\lambda = P_\lambda^A \; \forall \lambda \in \mathbb{R}$ und daher wegen $P_{-\pi}^A(\mathcal{H}) = P_{-\pi}(\mathcal{H}) = \{o\}$ sowie wegen $P_\pi^A(\mathcal{H}) = P_\pi(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$ nach 1.3.3 :

$-\pi\|x\|^2 < \langle Ax, x\rangle \leq \pi\|x\|^2 \quad \forall x \in \mathcal{H} \setminus \{o\}$, sodaß auch A durch

$$U = \int_{]-\pi,\pi]} \exp(i\lambda)dP_\lambda = \int_{]-\pi,\pi]} \exp(i\lambda)dP_\lambda^A = \exp(iA) \quad (1.4.4 \,!)$$

nach 1.5.12 eindeutig bestimmt ist, sodaß auch die $P_\lambda = P_\lambda^A$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ eindeutig festgelegt sind. $\square$

<u>1.5.14 Satz</u> : Sei U unitär , $\begin{matrix}\lambda \mapsto P_\lambda \\ \mathbb{R} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})\end{matrix}$ die nach 1.5.13 eindeutig bestimmte Spektralschar mit kompaktem Träger, die

$$P_{-\pi} = \mathcal{O} \quad , \quad P_\pi = Id_{\mathcal{H}} \quad \text{und} \quad \int_{]-\pi,\pi]} \exp(i\lambda)dP_\lambda = U \quad \text{erfüllt.}$$

Dann gilt für $C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit $C^* = C$:

$$UC = CU \quad \Rightarrow \quad P_\lambda C = CP_\lambda \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \,.$$

<u>Beweis</u> : Sei A wie im Beweis von 1.5.13 , $P_\lambda = P_\lambda^A \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$; seien B , T , V , W wie im Beweis von 1.5.8.(i) $\Rightarrow$ (ii) ; dann folgt wegen $U^*C = CU^*$ (1.1.22 !) zunächst $CV = VC$, $CW = WC$, somit (1.4.8!) $Ch(V) = h(V)C$, also $CB = BC$, also (wieder 1.4.8!) $CT = TC$, also $C(W-T) = (W-T)C$, woraus nach 1.1.22 $CP = PC$ folgt, also auch $CA = 2CPB - CB = 2PBC - BC = AC$. Nun folgt nach 1.3.1(i) $CP_\lambda = CP_\lambda^A = P_\lambda^A C = P_\lambda C \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$. $\square$

1.6 STOCHASTISCHE INTEGRALE BEZÜGLICH EINER SPEKTRALSCHAR

Zunächst erfolgt der Übergang von der (Operator-) Integration über links halboffene Intervalle zur Integration über abgeschlossene Intervalle. Sodann werden stochastische Integrale bezüglich einer Spektralschar und eines Elements des Hilbertraums mittels Approximation durch Operator-Integral-Werte dieses Elements eingeführt.

Seien ab nun $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < \beta$ fest.

1.6.1 Bemerkung und Bezeichnungen : Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig; dann

seien $f^+(\lambda) := \max\{0, f(\lambda)\}$,(nicht mit f_+ in 1.4.1 zu verwechseln !)

$$f^-(\lambda) := \max\{0, -f(\lambda)\} \quad , \lambda \in \mathbb{R} .$$

Klarerweise sind dann $f^+ , f^- : \mathbb{R} \to [0,+\infty[$ stetig und

es gilt $f = f^+ - f^-$, $f(\lambda) \geq 0 \Leftrightarrow f(\lambda) = f^+(\lambda)$,

$$f(\lambda) \leq 0 \Leftrightarrow f(\lambda) = -f^-(\lambda) .$$

Für stetiges $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sind auch

$$\underset{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}{\mathrm{Re} f : \lambda \mapsto \mathrm{Re}[f(\lambda)]} \quad , \quad \underset{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}{\mathrm{Im} f : \lambda \mapsto \mathrm{Im}[f(\lambda)]} \quad \text{stetig,}$$

also $(\mathrm{Re} f)^+ , (\mathrm{Re} f)^- , (\mathrm{Im} f)^+ , (\mathrm{Im} f)^- : \mathbb{R} \to [0,+\infty[$

wohldefiniert und stetig, es gilt

$$f = (\mathrm{Re} f)^+ - (\mathrm{Re} f)^- + i(\mathrm{Im} f)^+ - i(\mathrm{Im} f)^- .$$

1.6.2 Proposition und Definition : Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig ;

seien P_λ , $\lambda \in \mathbb{R}$ wie in 1.2.1 ; dann gilt : $\exists !\ \bar{A}_f \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit

$$\langle \bar{A}_f x, x \rangle = \int_{[\alpha,\beta]} f(\lambda) d\langle P_\lambda x, x\rangle \quad \left(:= \int_{\mathbb{R}} f 1_{[\alpha,\beta]} \, d\mu_x \right)$$

Wir schreiben dann $\displaystyle\int_{[\alpha,\beta]} f(\lambda) dP_\lambda := \bar{A}_f$.

(Manchmal wird auch statt $\displaystyle\int_{[\alpha,\beta]}$ $\displaystyle\int_\alpha^\beta$ geschrieben.)

Beweis : (i) Wegen des Satzes über monotone Konvergenz[1)] gilt für

---

1) siehe [3] , p. 44

$$f(\lambda) \geq 0 \quad \forall \lambda \in [\alpha-1,\beta] \quad : \quad f_n(\lambda) := f(\lambda)1_{]\alpha-\frac{1}{n},\beta]}(\lambda) \ , \ n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad f_n(\lambda) \leq f_{n+1}(\lambda) \leq f(\lambda)1_{[\alpha,\beta]}(\lambda) \ , \quad f_n(\lambda) \underset{n\to\infty}{\to} f(\lambda)1_{[\alpha,\beta]}(\lambda)$$

$$\Rightarrow \quad \int\limits_{]\alpha-\frac{1}{n},\beta]} f(\lambda)d\langle P_\lambda x,x\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}} f_n d\mu_x \underset{n\to\infty}{\to} \int\limits_{\mathbb{R}} f1_{[\alpha,\beta]}d\mu_x = \int\limits_{[\alpha,\beta]} f(\lambda)d\langle P_\lambda x,x\rangle$$

für alle $x \in \mathcal{H}$.

(ii) Seien für $f : \mathbb{R} \to [0,+\infty[$ stetig $A_n := A_f^{(\alpha-\frac{1}{n},\beta)} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (vgl. 1.2.4 !) . Nach 1.2.6(ii),(vi) gilt :

$$A_n = \int\limits_{]\alpha-\frac{1}{n},\alpha-\frac{1}{n+1}]} f(\lambda)dP_\lambda + A_{n+1} \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \int\limits_{]\alpha-\frac{1}{n},\alpha-\frac{1}{n+1}]} f(\lambda)dP_\lambda = A_n - A_{n+1} \ ,$$

sowie nach 1.2.4(ii) $\quad \|A_n\| \leq \max\limits_{\lambda\in[\alpha-1,\beta]} |f(\lambda)| \quad \forall n \in \mathbb{N}$. (*)

Also gilt nach 1.1.16, da ja nach 1.2.6(v) $A_n^* = A_n \ \forall n \in \mathbb{N}$:

$$\exists \ \bar{A}_f \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \text{ mit } \bar{A}_f^* = \bar{A}_f \text{ und } A_n x \underset{n\to\infty}{\to} \bar{A}_f x \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

Nach (i) ist $\langle \bar{A}_f x,x\rangle = \lim\limits_{n\to\infty} \langle A_n x,x\rangle = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{]\alpha-\frac{1}{n},\beta]} f(\lambda)d\langle P_\lambda x,x\rangle =$

$$= \int\limits_{[\alpha,\beta]} f(\lambda)d\langle P_\lambda x,x\rangle \quad \forall x \in \mathcal{H} \text{ (siehe 1.2.6(i) !)}$$

(iii) Nun sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ beliebig, stetig ; dann sei (vgl. 1.6.1 !)

$$\bar{A}_f := \overline{A_{(\mathrm{Re} f)^+}} - \overline{A_{(\mathrm{Re} f)^-}} + i\overline{A_{(\mathrm{Im} f)^+}} - i\overline{A_{(\mathrm{Im} f)^-}} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

Wegen (ii) und der Definition des Integrals komplexer Funktionen bezüglich μ_x gilt

$$\langle \bar{A}_f x,x\rangle = \int\limits_{[\alpha,\beta]} f(\lambda)d\langle P_\lambda x,x\rangle \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

(iv) Die Eindeutigkeit von $\bar{A}_f$ folgt analog zum Beweis von 1.2.4(i) aus 1.1.12(i) . □

<u>1.6.3 Satz</u> : Seien P_λ , $\lambda\in\mathbb{R}$, wie in 1.2.1 sowie $\mu\in\mathbb{C}$,

$f\ ,\ g : \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ stetig ; dann gilt :

(i) $$\Big[\int\limits_{]\alpha-\frac{1}{n},\beta]} f(\lambda)dP_\lambda\Big]x \underset{n\to\infty}{\to} \Big[\int\limits_{[\alpha,\beta]} f(\lambda)dP_\lambda\Big]x \qquad \forall x\in\mathcal{H} .$$

(ii) $$\int\limits_{[\alpha,\beta]}[\mu f(\lambda)+g(\lambda)]\,dP_\lambda = \mu\cdot\int\limits_{[\alpha,\beta]} f(\lambda)dP_\lambda + \int\limits_{[\alpha,\beta]} g(\lambda)dP_\lambda .$$

(iii) $$\Big[\int\limits_{[\alpha,\beta]} f(\lambda)dP_\lambda\Big]^* = \int\limits_{[\alpha,\beta]} \bar{f}(\lambda)dP_\lambda .$$

(iv) $$\int\limits_{[\alpha,\beta]}[f(\lambda)g(\lambda)]\,dP_\lambda = \Big[\int\limits_{[\alpha,\beta]} f(\lambda)dP_\lambda\Big]\Big[\int\limits_{[\alpha,\beta]} g(\lambda)dP_\lambda\Big] .$$

(v) $$f(\mathbb{R})\subseteq\mathbb{R} \Rightarrow \Big[\int\limits_{[\alpha,\beta]} f(\lambda)dP_\lambda\Big]^* = \int\limits_{[\alpha,\beta]} f(\lambda)dP_\lambda .$$

(vi) $f(\mathbb{R})\cup g(\mathbb{R})\subseteq\mathbb{R}$, $f(\lambda)\leq g(\lambda)\ \ \forall\lambda\in[\alpha,\beta] \Rightarrow$

$$\int\limits_{[\alpha,\beta]} f(\lambda)dP_\lambda \leq \int\limits_{[\alpha,\beta]} g(\lambda)dP_\lambda .$$

<u>Beweis</u> : (i) ist für $f(\mathbb{R})\subseteq[0,+\infty[$ die Definition von $\bar{A}_f$ und folgt für beliebige stetige f aus 1.2.6(iii) :

$$\bar{A}_f x = \lim_{n\to\infty} A^{(\alpha-\frac{1}{n},\beta)}_{(\Re f)^+}x - \lim_{n\to\infty} A^{(\alpha-\frac{1}{n},\beta)}_{(\Re f)^-}x + i\lim_{n\to\infty} A^{(\alpha-\frac{1}{n},\beta)}_{(\Im f)^+}x -$$

$$- i\lim_{n\to\infty} A^{(\alpha-\frac{1}{n},\beta)}_{(\Im f)^-}x = \lim_{n\to\infty}\Big[A^{(\alpha-\frac{1}{n},\beta)}_{(\Re f)^+} - A^{(\alpha-\frac{1}{n},\beta)}_{(\Re f)^-} + iA^{(\alpha-\frac{1}{n},\beta)}_{(\Im f)^+} - iA^{(\alpha-\frac{1}{n},\beta)}_{(\Im f)^-}\Big]x$$

$$= \lim_{n\to\infty}\Big[A_f^{(\alpha-\frac{1}{n},\beta)}x\Big] \quad \forall x\in\mathcal{H} .$$

(ii),(iii),(v) und (vi) sind trivial (vgl. 1.2.4(iii), 1.2.6(iii),(v),(vi))

(iv) folgt aus (i) , 1.2.6(iv) sowie aus 1.1.23 (vgl. (∗) im Beweis von 1.6.2(ii) !) . □

1.6.4 Korollar : Sei $\lambda \mapsto P_\lambda$ Spektralschar mit kompaktem Träger in $[a,b]$. Dann gilt

$$P_\lambda = \int_{[a,\lambda]} 1 \, dP_\mu \qquad \forall \lambda > a \; .$$

Beweis : klar aus 1.2.9 , 1.6.3(i) . $\square$

1.6.5 Korollar : Seien $A^* = A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, f für $|\lambda| \leq r$ konvergente Potenzreihe, $\|A\| < r$ und P_λ^A wie in 1.4.1 , $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dann gilt
$$f(A) = \int_{[-\|A\|,\|A\|]} f(\lambda)\,dP_\lambda^A \; .$$

Beweis : Für genügend großes $n \in \mathbb{N}$ erfüllen $\alpha_n := -\|A\| - \frac{1}{n}$, $\beta := \|A\|$ die Voraussetzungen in 1.4.9 , sodaß mit 1.4.9(ii) , 1.6.3 folgt :

$$\int_{[-\|A\|,\|A\|]} f(\lambda)\,dP_\lambda^A x = \lim_{n\to\infty} \int_{]\alpha_n,\beta]} f(\lambda)\,dP_\lambda^A x = [f(A)]x \qquad \forall x \in \mathcal{H} \; . \; \square$$

1.6.6 Proposition : Seien P_λ wie in 1.6.4 , $\lambda \in \mathbb{R}$, sodaß

$$P_{\alpha-\frac{1}{n}} x \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} P_\alpha x \quad \forall x \in \mathcal{H} \quad \text{ist.}$$

(Spezialfall : $\exists\, \varepsilon > 0$ mit $P_\lambda = P_\alpha \;\forall \lambda \in]\alpha-\varepsilon,\alpha]$.) Dann gilt für alle stetigen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$:

$$\int_{[\alpha,\beta]} f(\lambda)\,dP_\lambda = \int_{]\alpha,\beta]} f(\lambda)\,dP_\lambda \; .$$

Beweis : Nach 1.6.3(i) und 1.2.6(ii) ist $\forall x \in \mathcal{H}$

$$\int_{[\alpha,\beta]} f(\lambda)dP_\lambda x = \lim_{n\to\infty} \int_{]\alpha-\frac{1}{n},\beta]} f(\lambda)dP_\lambda x = \lim_{n\to\infty} \int_{]\alpha-\frac{1}{n},\alpha]} f(\lambda)dP_\lambda x +$$

$$+ \int_{]\alpha,\beta]} f(\lambda)dP_\lambda x \quad , \text{ sodaß wegen } \quad |< \int_{]\alpha-\frac{1}{n},\alpha]} f(\lambda)dP_\lambda x,x >| =$$

$$| \int_{]\alpha-\frac{1}{n},\alpha]} f(\lambda)d\langle P_\lambda x,x\rangle | \leq \int_{]\alpha-\frac{1}{n},\alpha]} |f(\lambda)|\, d\langle P_\lambda x,x\rangle \leq \max_{\lambda\in[\alpha-1,\alpha]} |f(\lambda)| \int_{]\alpha-\frac{1}{n},\alpha]} 1 d\langle P_\lambda x,x\rangle =$$

$$c \quad < \int_{]\alpha-\frac{1}{n},\alpha]} 1 dP_\lambda x,x > = c \ \langle P_\alpha x - P_{\alpha-\frac{1}{n}} x,x\rangle \underset{n\to\infty}{\to} 0 \quad \forall\, x\in\mathcal{H}$$

$$(\text{ siehe } 1.2.9\ !) \quad <[\bar{A}_f - A_f^{(\alpha,\beta)}]x,x> = \lim_{n\to\infty} \langle A^{(\alpha-\frac{1}{n},\alpha)}x,x\rangle = 0$$

und daraus nach 1.1.12(i) $\bar{A}_f = A_f^{(\alpha,\beta)}$ gefolgert werden kann. □

1.6.7 Korollar : Sei $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ unitär, P_λ wie in 1.5.13 , $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dann gilt
$$U = \int_{[-\pi,\pi]} \exp(i\lambda)dP_\lambda \quad .$$

Beweis : klar aus 1.5.13 , $P_\lambda = \Theta = P_{-\pi} \ \forall \lambda \leq -\pi$ und 1.6.6 . □

1.6.8 Bemerkung und Definition[1] : Sei $x\in\mathcal{H}$, $\lambda \mapsto P_\lambda$ eine Spektralschar mit kompaktem Träger ; dann ist die Menge $L^2_{\mathbb{C}}([\alpha,\beta], \mathcal{B}^{(\alpha,\beta)}, \mu_x|_{[\alpha,\beta]})$ aller bezüglich (der σ-Algebra $\mathcal{B}^{(\alpha,\beta)}$ der Borelmengen in $[\alpha,\beta]$ meßbaren und) $\mu_x|_{[\alpha,\beta]}$ quadratisch integrierbaren Funktionen $f : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ ein Vektorraum über $\mathbb{C}$; für solche f , g sei $(f|g)_x := \int_{[\alpha,\beta]} (f\bar{g})d\mu_x$.

---

1) siehe [3] , pp. 80–85/115

Identifiziert man nun f mit g, wenn $(f-g|f-g)_x = 0$ ist,

so erhält man einen Hilbertraum $\underline{(L_x^2, (.|..)_x)}$, wobei,

wenn man die Äquivalenzklasse, die f enthält, mit $\hat{f}$ bezeichnet,

$(\hat{f}|\hat{g})_x := (f|g)_x$, $\mu\hat{f} + \hat{g} := [\mu f + g]^\wedge$ wohldefiniert sind.

(L_x^2 hängt nicht nur von $x\in\mathcal{H}$, sondern auch von der Spektralschar ab !)

Aus Gründen der Übersichtlichkeit schreiben wir f statt $\hat{f}$,
falls ein Mißverständnis aus dem Zusammenhang heraus unmöglich ist.

Es gilt : $f\in L_x^2 \Rightarrow \exists\, f_n : \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ stetig, $n\in\mathbb{N}$, mit
$(f-f_n|f-f_n)_x \to 0$ für $n\to\infty$. [1)]

<u>1.6.9 Proposition</u> : Seien $f, g : \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ stetig ; dann gilt $\forall x\in\mathcal{H}$:

$$\langle \overline{A_f}x, \overline{A_g}x\rangle = (f|g)_x \quad \text{(anders geschrieben :}$$

$$\langle [\int_{[\alpha,\beta]} f(\lambda)dP_\lambda]x, [\int_{[\alpha,\beta]} g(\lambda)dP_\lambda]x\rangle = \int_{[\alpha,\beta]} f(\lambda)\overline{g(\lambda)}d\langle P_\lambda x,x\rangle \text{) .}$$

<u>Beweis</u> : 1.6.3(iii),(iv) , 1.6.2 $\Rightarrow$:

$$\langle \overline{A_f}x, \overline{A_g}x\rangle = \langle (\overline{A_g})^*\overline{A_f}x,x\rangle = \langle \overline{A_{\bar g}}\,\overline{A_f}x,x\rangle = \langle \overline{A_{\bar g f}}x,x\rangle = (f|g)_x \quad .\Box$$

<u>1.6.10 Proposition und Definition</u> : Sei $f\in L_x^2$; 1.6.8 $\Rightarrow$:

$\exists\, f_n : \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ stetig, $n\in\mathbb{N}$, mit $(f-f_n|f-f_n)_x \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Dann existiert $\lim_{n\to\infty} \overline{A_{f_n}}x$, und wenn $f_n' : \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ stetig
sind mit $(f-f_n'|f-f_n')_x \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, gilt $\lim_{n\to\infty}\overline{A_{f_n}}x = \lim_{n\to\infty}\overline{A_{f_n'}}x$.

$\int_{[\alpha,\beta]} f(\lambda)d(P_\lambda x) := \lim_{n\to\infty}\overline{A_{f_n}}x$ heißt <u>stochastisches Integral von f bezüglich $P_\cdot x$</u> .

---

1) siehe [3] , p. 88

Beweis : $\|\overline{A}_{f_n}x - \overline{A}_{f_m}x\|^2 = \|\overline{A_{f_n-f_m}}x\|^2 = \langle \overline{A_{f_n-f_m}}x, \overline{A_{f_n-f_m}}x\rangle =$

$$= (f_n-f_m|f_n-f_m)_x \leq \left[\sqrt{(f_n-f|f_n-f)_x} + \sqrt{(f-f_m|f-f_m)_x}\right]^2 \underset{n,m\to\infty}{\to} 0+0=0$$

(hiebei folgen die erste Gleichung aus 1.6.3(ii) , die dritte aus 1.6.9 sowie die Ungleichung aus der Tatsache, daß $f \mapsto \sqrt{(f|f)_x}$ eine Norm auf L_x^2 ist) $\Rightarrow$ $(\overline{A}_{f_n}x)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchyfolge in $\mathcal{H}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} \overline{A}_{f_n}x \in \mathcal{H}$; analog oben ergibt sich

$$\|\overline{A}_{f_n}x - \overline{A}_{f'_n}x\|^2 = (f_n-f'_n|f_n-f'_n)_x \leq \left[\sqrt{(f_n-f|f_n-f)_x} + \sqrt{(f-f'_n|f-f'_n)_x}\right]^2 \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \overline{A}_{f_n}x = \lim_{n\to\infty} \overline{A}_{f'_n}x \quad . \quad \square$$

1.6.11 Proposition : Seien $f, g \in L_x^2$, $\mu \in \mathbb{C}$; dann gilt :

(i) $$\int_{[\alpha,\beta]} [\mu f(\lambda) + g(\lambda)]\,d(P_\lambda x) = \mu\int_{[\alpha,\beta]} f(\lambda)\,d(P_\lambda x) + \int_{[\alpha,\beta]} g(\lambda)\,d(P_\lambda x) \quad .$$

(ii) $$\left\langle \int_{[\alpha,\beta]} f(\lambda)\,d(P_\lambda x), \int_{[\alpha,\beta]} g(\lambda)\,d(P_\lambda x)\right\rangle = (f|g)_x \quad .$$

Beweis : Seien $f_n, g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig , $n\in\mathbb{N}$, mit

$(f-f_n|f-f_n)_x \to 0$ und $(g-g_n|g-g_n)_x \to 0$ für $n\to\infty$.

(i) $$(\mu f+g-[\mu f_n+g_n]|\mu f+g-[\mu f_n+g_n])_x \leq \left[|\mu|\sqrt{(f-f_n|f-f_n)_x} + \sqrt{(g-g_n|g-g_n)_x}\right]^2 \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

$\Rightarrow$ (1.6.10 , 1.6.3(ii) !) :

$$\int_{[\alpha,\beta]} [\mu f(\lambda) + g(\lambda)]\,d(P_\lambda x) = \lim_{n\to\infty} \overline{A_{\mu f_n+g_n}}x = \lim_{n\to\infty}(\mu\overline{A}_{f_n} + \overline{A}_{g_n})x =$$

$$= \mu\lim_{n\to\infty}\overline{A}_{f_n}x + \lim_{n\to\infty}\overline{A}_{g_n}x = \mu\int_{[\alpha,\beta]} f(\lambda)\,d(P_\lambda x) + \int_{[\alpha,\beta]} g(\lambda)\,d(P_\lambda x) \quad .$$

(ii) 1.6.9 $\Rightarrow$ $\left\langle \int_{[\alpha,\beta]} f(\lambda)d(P_\lambda x), \int_{[\alpha,\beta]} g(\lambda)d(P_\lambda x)\right\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \overline{A_{f_n}}x, \overline{A_{g_n}}x\rangle =$

$= \lim_{n\to\infty} (f_n|g_n)_x = (f|g)_x$ (vgl. 1.1.3(ii) !) . $\square$

<u>1.6.12 Proposition</u> : Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig, so gilt :

$$\int_{[\alpha,\beta]} f(\lambda)d(P_\lambda x) = \left[\int_{(\alpha,\beta]} f(\lambda)dP_\lambda\right]x \qquad \forall x \in \mathcal{H} .$$

<u>Beweis</u> : trivial wegen 1.6.10: wähle $f_n = f \quad \forall n \in \mathbb{N}$. $\square$

<u>1.6.13 Korollar</u> : Sei $x \in \mathcal{H}$; dann existiert ein isometrischer Operator $U_x : L_x^2 \to \mathcal{H}$ mit $U_x f = \overline{A_f}x$ für alle stetigen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

<u>Beweis</u> : Sei $U_x f := \int_{[\alpha,\beta]} f(\lambda)d(P_\lambda x)$, $f \in L_x^2$.

Jetzt 1.6.11(ii) , 1.6.12 anwenden ! $\square$

2.1 SCHWACH STATIONÄRE PROZESSE

Schwach stationäre Prozesse werden als spezielle Folgen im Hilbertraum L^2_Ω der quadratisch integrierbaren Zufallsvariablen eingeführt. Ihr wesentliches Merkmal ist die von der "Zeit" unabhängige Kovarianzstruktur. Zeit- und Spektralbereich, beides Hilberträume, werden mit den im ersten Abschnitt entwickelten funktionalanalytischen Mitteln konstruiert und deren Isomorphie bewiesen.

2.1.1 Bemerkung und Definition: Sei $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra auf Ω und μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega,\mathfrak{A})$. Sei

$$X = \{x\colon \Omega \to \mathbb{C} : \exists \left|\int_\Omega |x(\omega)|^2 d\mu(\omega)\right| < +\infty\},$$

$$\begin{aligned} \langle .,. \rangle\colon X\times X &\to \mathbb{C} \\ (x,y) &\mapsto \int_\Omega x(\omega)\overline{y(\omega)}\,d\mu(\omega) \end{aligned}$$

Identifiziert man Elemente $x,y \in X$, wenn $\langle x-y,x-y\rangle = 0$, dann erhält man aus X den Hilbertraum L^2_Ω der quadratisch integrierbaren Zufallsvariablen in $\mathbb{C}$ mit innerem Produkt $\langle .,. \rangle$ (siehe 1.6.8!).

Da insbesondere μ ein endliches Maß ist, gilt für $c \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} c\cdot\colon \Omega &\to \mathbb{C} \quad \in L^2_\Omega. \\ \omega &\mapsto c \end{aligned}$$

2.1.2 Definition: Seien $x,y \in L^2_\Omega$:

(i) $\mathit{E}x := \langle x,1\rangle$ heißt Erwartungswert von x.

(ii) $\mathit{Cov}(x,y) := \langle x-\mathit{E}x, y-\mathit{E}y\rangle$ heißt Kovarianz von x und y.

(iii) $\mathit{Var}(x) := \mathit{Cov}(x,x)$ heißt Varianz von x.

<u>2.1.3 Definition</u>: Seien $x_t \in L^2_\Omega$, $t \in \mathbb{Z}$:

(i) Die (zweiseitige) Folge $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ heißt ein <u>stochastischer Prozeß</u> (<u>mit endlichen zweiten Momenten</u>) und wird mit $\underline{x} = (x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ bezeichnet.

(ii) $\underline{x}$ heißt <u>(schwach) stationärer Prozeß</u>, falls:

$$E x_o = E x_t \qquad \text{für alle } t\in\mathbb{Z}$$

$$\langle x_o, x_k\rangle = \langle x_t, x_{t+k}\rangle \qquad \text{für alle } t,k\in\mathbb{Z}$$

<u>2.1.4 Beispiel</u>: Sei $\underline{u} = (u_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ mit $\langle u_t, u_s\rangle = \delta_{st}\sigma^2_{\underline{u}}$, $\sigma^2_{\underline{u}} > 0$ dann ist $\underline{u}$ ein stationärer Prozeß, der "weißes Rauschen" genannt wird. Dabei ist $\delta_{st} := 1$ für $s = t$, $:= 0$ sonst.

<u>2.1.5 Bemerkung</u>: Sei $\underline{x}$ stationärer Prozeß:

(i) Wir beschränken uns ab nun auf den Fall $E x_o = E x_t = 0 \;\; \forall t$.

(ii) $\sigma^2_{\underline{x}} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$, $k \longmapsto \langle x_k, x_o\rangle$ heißt <u>die zu $\underline{x}$ gehörige Kovarianzfunktion</u>.

Es gilt:

$$\sigma^2_{\underline{x}}(0) = \|x_t\|^2 = Var\,(x_t) \qquad \text{für alle } t\in\mathbb{Z}$$

$$\sigma^2_{\underline{x}}(k) = \langle x_{t+k}, x_k\rangle = Cov\,(x_{t+k}, x_t) \qquad \text{für alle } t,k\in\mathbb{Z}$$

$$\sigma^2_{\underline{x}}(-k) = \overline{\sigma^2_{\underline{x}}(k)} \qquad \text{für alle } k\in\mathbb{Z}$$

<u>2.1.6 Definition</u>: Sei $\underline{x}$ stationärer Prozeß:
Der topologische Abschluß[1] der Menge $[\{x_t \mid t\in\mathbb{Z}\}]$ in L^2_Ω heißt Zeitbereich von x und wird mit ZB($\underline{x}$) bezeichnet.

---

[1] Der topologische Abschluß einer Menge $\mathcal{M}$ enthält alle Grenzwerte von konvergenten Folgen mit Gliedern in $\mathcal{M}$ und ist eine abgeschlossene Menge.

<u>2.1.7 Bemerkung</u>: $ZB(\underline{x})$ ist mit $\langle .,. \rangle |_{ZB(\underline{x}) \times ZB(\underline{x})}$ (das wieder mit $\langle .,. \rangle$ bezeichnet wird) ein Hilbertraum (siehe 1.2.11 (i)!).

<u>2.1.8 Satz</u>: Sei $\underline{x}$ stationärer Prozeß;
Es existiert genau ein unitärer Operator $L(\underline{x}): ZB(\underline{x}) \to ZB(\underline{x})$ so, daß

$$L(\underline{x})x_t = x_{t+1} \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{Z}.$$

<u>Beweis</u>: Die Abbildung

$$\begin{aligned} L:\{x_t \mid t \in \mathbb{Z}\} &\to ZB(\underline{x}) \\ x_t &\mapsto x_{t+1} \end{aligned}$$

ist wohldefiniert. Dazu ist zu zeigen: $x_t = x_s \Rightarrow x_{t+1} = x_{s+1}$:

Aus 1.1.2 (i) folgt

$$0 = \|x_t - x_s\|^2 = \langle x_t, x_t \rangle - 2\,\mathrm{Re}\,\langle x_t, x_s \rangle + \langle x_s, x_s \rangle =$$

$$= \langle x_{t+1}, x_{t+1} \rangle - 2\,\mathrm{Re}\langle x_{t+1}, x_{s+1} \rangle = \|x_{t+1} - x_{s+1}\|^2.$$

Wegen $\langle x_{t+1}, x_{k+1} \rangle = \langle x_t, x_k \rangle \;\forall t,k \in \mathbb{Z}$ ist L isometrisch.
L läßt sich nun laut 1.5.4 eindeutig auf $ZB(\underline{x})$ isometrisch fortsetzen; der so erhaltene Operator werde mit $L(\underline{x})$ bezeichnet.

Sei nun $y \in ZB(\underline{x}) \Rightarrow y = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{|k| \le k_N} a_k^{(N)} x_k$;

$\left(\sum\limits_{|k| \le k_N} a_k^{(N)} x_{k-1} \right)_{N \in \mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge

in $ZB(\underline{x})$ wegen $\left\| \sum\limits_{|k| \le k_N} a_k^{(N)} x_{k-1} - \sum\limits_{|t| \le k_M} a_t^{(M)} x_t \right\|^2 =$

$$= \sum_{|k| \le k_N} \sum_{|l| \le k_N} a_k^{(N)} \overline{a_l^{(N)}} \langle x_{k-1}, x_{l-1} \rangle - 2\,\mathrm{Re} \sum_{|k| \le k_N} \sum_{|t| \le k_M} a_k^{(N)} \overline{a_t^{(M)}} \langle x_{k-1}, x_{t-1} \rangle +$$

$$+ \sum_{|t| \le k_M} \sum_{|s| \le k_M} a_t^{(M)} \overline{a_s^{(M)}} \langle x_{t-1}, x_{s-1} \rangle \quad =$$

$$= \sum_{|k|\leq k_N} \sum_{|l|\leq k_N} a_k^{(N)} \overline{a_l^{(N)}} \langle x_k, x_l \rangle - 2\,\mathrm{Re} \sum_{|k|\leq k_N} \sum_{|t|\leq k_M} a_k^{(N)} \overline{a_t^{(M)}} \langle x_k, x_t \rangle +$$

$$\sum_{|t|\leq k_M} \sum_{|s|\leq k_M} a_t^{(M)} \overline{a_s^{(M)}} \langle x_t, x_s \rangle =$$

$$= \Big\| \sum_{|k|\leq k_N} a_k^{(N)} x_k - \sum_{|t|\leq k_M} a_t^{(M)} x_t \Big\|^2 \underset{N,M\to\infty}{\longrightarrow} 0 .$$

Also $\exists\ z := \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{|k|\leq k_N} a_k^{(N)} x_{k-1} \in ZB(\underline{x})$.

Aber $L(\underline{x})z = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{|k|\leq k_N} a_k^{(N)} x_k = y \implies L(\underline{x})$ ist surjektiv,

also nach 1.5.6 unitär. □

<u>2.1.9 Bemerkung</u>: Es gilt (für $[L(\underline{x})]^{-t} := ([L(\underline{x})]^{-1})^t$, $t \in \mathbb{N}$):

$$x_t = [L(\underline{x})]^t x_0 \quad \forall\ t \in \mathbb{Z} .$$

<u>2.1.10 Bemerkung und Definition</u>: Sei $\underline{x}$ stationärer Prozeß und $L(\underline{x})$ der Operator von 2.1.8. $L(\underline{x})$ heißt der <u>Lag Operator von $\underline{x}$</u> .

Laut 1.5.13 existiert genau eine Spektralschar mit kompaktem Träger in $[-\pi,\pi]$,

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathfrak{B}(ZB(\underline{x})) \\ \lambda &\mapsto P_\lambda^{\underline{x}} \end{aligned} \quad \text{mit}$$

$$P_{-\pi}^{\underline{x}} = 0 , \quad P_{\pi}^{\underline{x}} = Id_{ZB(\underline{x})} \text{ und } \quad L(\underline{x}) = \int_{[-\pi,\pi]} e^{i\lambda} dP_\lambda^{\underline{x}} .$$

<u>2.1.11 Satz und Definition</u>: Sei $\underline{x}$ stationärer Prozeß ;

die Spektralschar mit kompaktem Träger

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathfrak{B}(ZB(\underline{x})) \\ \lambda & \mapsto & P_{\lambda}^{\underline{x}} \end{array}$$

ist durch

(i) $P_{-\pi}^{\underline{x}} = \sigma$

(ii) $P_{\pi}^{\underline{x}} = Id_{ZB(\underline{x})}$

(iii) $x_t = \int_{[-\pi,\pi]} \exp(i\lambda t)\, d(P_{\lambda}^{\underline{x}}\, x_o)$

$$(= [\int_{[-\pi,\pi]} \exp(i\lambda t)\, dP_{\lambda}^{\underline{x}}]\, x_o =$$

$$= [\int_{[-\pi,\pi]} \exp(i\lambda)\, dP_{\lambda}^{\underline{x}}]^t\, x_o \quad) \quad \forall\ t \in \mathbb{Z}$$

eindeutig bestimmt. Sie heißt
<u>die Spektralschar von $\underline{x}$</u> .

<u>Beweis</u>: Sei $L := \int_{[-\pi,\pi]} \exp(i\lambda)\, dP_{\lambda}^{\underline{x}}$; (iii) , 2.1.8 $\Rightarrow$

$L = L(\underline{x})$ und $P_{\lambda}^{\underline{x}}$ sind durch $L(\underline{x})$ und (i) , (ii) wegen 1.5.13 eindeutig festgelegt. □

<u>2.1.12 Bemerkung</u>: 2.1.11 (iii) ist die <u>Spektraldarstellung</u> des Prozesses $\underline{x}$ mit "diskreter Zeit" als Integral des stochastischen Prozesses mit "stetiger Zeit"

$$P^{\underline{x}}_{\lambda} x_o : [-\pi, \pi] \to ZB(\underline{x}), \quad \lambda \mapsto P^{\underline{x}}_{\lambda} x_o$$

mit orthogonalen Inkrementen, d.h.

$$\langle P^{\underline{x}}_{\mu_1} x_o - P^{\underline{x}}_{\lambda_1} x_o \, , \, P^{\underline{x}}_{\mu_2} x_o - P^{\underline{x}}_{\lambda_2} x_o \rangle = 0 \quad \forall\ \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \quad \text{mit}$$

$$\lambda_1 < \mu_1 \leq \lambda_2 < \mu_2 \qquad \text{(vgl. mit 1.1.20 (i) !)}$$

<u>2.1.13 Definition</u>: Sei $\underline{x}$ stationärer Prozeß :

Die Verteilungsfunktion $F_{\underline{x}} : \lambda \to \langle P^{\underline{x}}_{\lambda} x_o, x_o \rangle$ heißt <u>spektrale Verteilungsfunktion</u> von $\underline{x}$ (1.1.2 !). Hat $F_{\underline{x}}$ eine Dichte $f_{\underline{x}}$, so heißt diese <u>spektrale Dichte</u> von $\underline{x}$.

Wegen 2.1.5 gilt für die Kovarianzfunktion von $\underline{x}$:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\underline{x}}(t) &= \langle x_t, x_o \rangle \\
&= \langle \Big(\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} dP^{\underline{x}}_{\lambda} \Big) x_o, x_o \rangle \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} dF_{\underline{x}}(\lambda) \qquad \text{wegen } 1.6.8 \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} f_{\underline{x}}(\lambda) d\lambda \qquad \text{, falls die spektrale Dichte existiert.}
\end{aligned}$$

<u>2.1.14 Lemma</u>: Sei $g : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ beschränkt, rechtsseitig stetig mit

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda = 0 \quad \forall\, t \in \mathbb{Z} \quad .$$

Dann gilt $\quad g(\lambda) = 0 \quad \forall\, \lambda \in [-\pi,\pi[\quad .$

<u>Beweis</u>: Sei $G(\lambda) := \int_{-\pi}^{\lambda} g(\mu) d\mu$; dann ist $G(-\pi) = 0 =$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} g(\mu) e^{i\mu 0} d\mu = G(\pi)$$ und $G : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ ist stetig.

Sei $K := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(\mu) d\mu$ sowie $H(\lambda) := G(\lambda) - K$.

Wegen des Satzes von Fubini [1)] gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} [\int_{-\pi}^{\lambda} g(\mu) d\mu] e^{i\lambda t} d\lambda = \int_{-\pi}^{\pi} [\int_{\mu}^{\pi} e^{i\lambda t} d\lambda] g(\mu) d\mu \quad , \text{ also}$$

$$\int_{\pi}^{\pi} G(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda = \int_{\pi}^{\pi} \frac{1}{it} [e^{i\pi t} - e^{i\mu t}] g(\mu) d\mu =$$

$$= \frac{e^{i\pi t}}{it} \int_{-\pi}^{\pi} g(\mu) d\mu - \frac{1}{it} \int_{-\pi}^{\pi} g(\mu) e^{i\mu t} d\mu = 0 \qquad \forall\, t \in \mathbb{Z} \setminus \{o\} \quad ,$$

also $$\int_{-\pi}^{\pi} H(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda = \int_{-\pi}^{\pi} G(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda - K \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} d\lambda = 0 \quad \forall\, t \in \mathbb{Z} \; .$$

(für $t = 0$: $\int_{\pi}^{\pi} G(\lambda) d\lambda = K \,.\, 2\pi$)

---

1) Siehe [5] , p. 68f. ; setze $$g(\mu,\lambda) := \begin{cases} e^{i\lambda t} g(\mu) \; , & \mu \le \lambda \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Daraus folgt nun $H(\lambda) = 0 \ \forall \ \lambda \in [-\pi,\pi]$:

wäre nämlich $C := \max\limits_{|\lambda| \leq \pi} |H(\lambda)| > 0$ ($\Rightarrow$ $I := \int\limits_{-\pi}^{\pi} |H(\lambda)|^2 d\lambda > 0$),

so existierten für $\varepsilon := \frac{I}{4\pi C} > 0$ wegen der Stetigkeit von

$H : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ und wegen $H(-\pi) = -K = H(\pi)$ nach dem Satz von

Stone & Weierstraß [1)] $N \in \mathbb{N}$, $a_k \in \mathbb{C}$, $|k| \leq N$, mit

$$\Big| H(\lambda) - \sum_{|k| \leq N} a_k e^{i\lambda k} \Big| < \varepsilon \quad \forall \ \lambda \in [-\pi,\pi] \quad .$$ Also wäre

$$I = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |H(\lambda)|^2 d\lambda = \int\limits_{-\pi}^{\pi} H(\lambda)[H(\lambda) - \sum_{|k| \leq N} a_k e^{i\lambda k}] d\lambda \quad +$$

$$+ \sum_{|k| \leq N} a_k \int\limits_{-\pi}^{\pi} H(\lambda) e^{i\lambda k} d\lambda \leq \int\limits_{-\pi}^{\pi} |H(\lambda)| \Big| H(\lambda) - \sum_{|k| \leq N} a_k e^{i\lambda k} \Big| \, d\lambda \ + \ 0 \ \leq$$

$$\leq C.\varepsilon.2\pi = I/2$$, ein Widerspruch !

Wegen $H(\lambda) = 0 \ \forall \ \lambda \in [-\pi,\pi]$ ist also

$$G(\lambda) = K = G(-\pi) = 0 \quad \forall \ \lambda \in [-\pi,\pi]$$, also

$$\int\limits_{\lambda}^{\beta} g(\mu) d\mu = G(\beta) - G(\lambda) = 0 \ \forall \ \lambda, \beta \text{ mit } -\pi \leq \lambda < \beta \leq \pi \quad .$$

Wäre nun $g(\lambda) = \delta > 0$ für ein $\lambda \in [-\pi,\pi[$, so existierte ein β mit $\lambda < \beta \leq \pi$ und $g(\mu) > \delta/2 \ \forall \ \mu \in [\lambda,\beta]$, da ja g rechtsseitig stetig ist. Also wäre

$$\int\limits_{\lambda}^{\beta} g(\mu) d\mu \geq \delta/2.(\beta - \lambda) > 0$$, Widerspruch !

Daher gilt $g(\lambda) \leq 0 \ \forall \ \lambda \in [-\pi,\pi[$; ebenso zeigt man
$g(\lambda) \geq 0 \ \forall \ \lambda \in [-\pi,\pi[$, woraus sich die Behauptung ergibt. □

[1)] vgl. 1.5.10

2.1.15 Satz: Sei $\underline{x}$ stationärer Prozeß mit Kovarianzfunktion $\sigma^2_{\underline{x}} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$.

Dann ist die spektrale Verteilungsfunktion $F_{\underline{x}}$ von $\underline{x}$ die einzige monoton wachsende, rechtsseitig stetige Funktion mit $\lim_{\lambda \uparrow -\pi} F_{\underline{x}}(\lambda) = F_{\underline{x}}(-\pi) = 0$, $F_{\underline{x}}(\pi) = \|x_o\|^2$ und

$$\int_{[-\pi,\pi]} e^{i\lambda t} dF_{\underline{x}}(\lambda) = \sigma^2_{\underline{x}}(t) \qquad \forall\ t \in \mathbb{Z} .$$

Beweis: $F_{\underline{x}}$ hat die oben angegebenen Eigenschaften (siehe 2.1.13 !).

Sei nun F monoton wachsend, $\lim_{\lambda \uparrow -\pi} F(\lambda) = F(-\pi) = 0$, $F(\pi) = \|x_o\|^2$ und

$$\int_{[-\pi,\pi]} e^{i\lambda t} dF(\lambda) = \sigma^2_{\underline{x}}(t) \qquad \forall\ t \in \mathbb{Z} .$$

Wegen des Satzes über partielle Stieltjes-Integration [1] gilt

$$\int_{[-\pi,\pi]} e^{i\lambda t} dF(\lambda) = e^{i\pi t} F(\pi) - e^{-i\pi t} F(-\pi)$$

$$- \int_{[-\pi,\pi]} F(\lambda)\ (it) e^{i\lambda t} d\lambda = (-1)^t \|x_o\|^2 - 0 - it \int_{[-\pi,\pi]} F(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda .$$

und die analoge Gleichung mit $F_{\underline{x}}$ statt F , sodaß laut Voraussetzung gilt: $it \int_{-\pi}^{\pi} F(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda =$

$$= (-1)^t \|x_o\|^2 - \sigma_{\underline{x}}(t) = it \int_{-\pi}^{\pi} F_{\underline{x}}(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda \qquad \forall\ t \in \mathbb{Z} ,$$

1) Siehe [5] , p. 73f.

also $\displaystyle\int_{\pi}^{\pi} [F(\lambda) - F_{\underline{x}}(\lambda)]\; e^{i\lambda t} d\lambda \;=\; 0 \qquad \forall\, t \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}\;.\; (*)$

Sei $\displaystyle C := \int_{\pi}^{\pi} [F(\lambda) - F_{\underline{x}}(\lambda)]\, d\lambda$ sowie

$$g(\lambda) := F(\lambda) - F_{\underline{x}}(\lambda) - C\;;$$

dann ist g rechtsseitig stetig und es gilt wegen (*) und

$$\int_{\pi}^{\pi} C\, e^{i\lambda t} d\lambda = 0 \qquad \forall\, t \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$$

$$\int_{\pi}^{\pi} g(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda = 0 \qquad \forall\, t \in \mathbb{Z}\;.$$

Nach 2.1.14 ist daher $g(\lambda) = 0 \quad \forall \lambda \in [-\pi,\pi[$, also

$$F(\lambda) - F_{\underline{x}}(\lambda) = C \qquad \forall \lambda \in [-\pi,\pi[\;,$$

speziell $0 = F(-\pi) - F_{\underline{x}}(-\pi) = C$

$$\Rightarrow \quad F(\lambda) = F_{\underline{x}}(\lambda) \qquad \forall \lambda \in [-\pi,\pi[\;,$$

was zusammen mit $F(\pi) = \|x_o\|^2 = F_{\underline{x}}(\pi)$ die Behauptung ergibt $\square$.

<u>2.1.16 Korollar</u>: Sei $\underline{x}$ stationär, $f : \mathbb{R} \to [0,+\infty[$ beschränkt, integrierbar mit

(i) $f(\lambda) = 0 \quad \forall\, \lambda \notin [-\pi,\pi]$ und

(ii) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda = \sigma^2_{\underline{x}}(t) \quad \forall\, t \in \mathbb{Z}$.

Dann ist f eine spektrale Dichte von $\underline{x}$.

<u>Beweis</u> : Sei $F(\lambda) := \int_{-\pi}^{\lambda} f(\mu)d\mu$; dann ist F

wegen $|F(\beta) - F(\alpha)| \leq \sup_{|\mu|\leq\pi}|f(\mu)||\beta - \alpha|$ stetig und

wegen $f(\mu) \geq 0 \;\forall\, \mu \in \mathbb{R}$ monoton wachsend. Analog zum Beweis in 2.1.14 (mit f bzw. F statt g bzw. G) ergibt sich

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(\lambda)e^{i\lambda t}d\lambda = \frac{e^{i\pi t}}{it}\sigma^2_{\underline{x}}(0) - \frac{1}{it}\sigma^2_{\underline{x}}(t) \quad \forall\, t \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} ;$$

andererseits ist jedoch analog zum Beweis in 2.1.15 wegen

$F(\pi) = \sigma^2_{\underline{x}}(0)$ und $F(-\pi) = 0$

$$\int_{[-\pi,\pi]} e^{i\lambda t}dF(\lambda) = (-1)^t\,\sigma^2_{\underline{x}}(0) - it\int_{[-\pi,\pi]} F(\lambda)e^{i\lambda t}d\lambda \quad \forall\, t \in \mathbb{Z} ,$$

sodaß man $\int_{[-\pi,\pi]} e^{i\lambda t}dF(\lambda) = \sigma^2_{\underline{x}}(t) \;\forall\, t \in \mathbb{Z}$ erhält,

also nach 2.1.15 $F = F_{\underline{x}}$, was zu zeigen war. □

<u>2.1.17 Beispiel</u>: Sei $\underline{u}$ wie in 2.1.4 weißes Rauschen.

Sei

$$f_{\underline{u}}(\lambda) := \begin{cases} \sigma^2_{\underline{u}}/2\pi & , \lambda \in [-\pi,\pi] , \\ 0 & , \lambda \notin [-\pi,\pi] . \end{cases}$$

Dann ist $f_{\underline{u}}$ wegen $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t}d\lambda = 2\pi\delta_{0t}$ und wegen 2.1.16 eine spektrale Dichte von $\underline{u}$.

2.1.18 Bemerkung und Definition:

$$F_{\underline{x}} := F_{x_o} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$\lambda \mapsto \langle P_\lambda^{\underline{x}} x_o, x_o \rangle$$

ist nach 1.2.2 Verteilungsfunktion eines endlichen Maßes $\mu_{\underline{x}} := \mu_{x_o}$ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Wir sind damit in der Situation von 1.6.8, wo der Hilbertraum $L^2_{\underline{x}} := L^2_{x_o}$ (mit $\alpha = -\pi$, $\beta = \pi$) definiert wurde. $L^2_{\underline{x}}$ heißt der Spektralbereich von $\underline{x}$ und wird mit $SB(\underline{x})$ bezeichnet.

2.1.19 Satz: Sei $\underline{x}$ stationärer Prozeß:

$$V(\underline{x}) : SB(\underline{x}) \to ZB(\underline{x})$$
$$f \mapsto \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda)\, d(P_\lambda^{\underline{x}} x_o)$$

ist isometrisch und bijektiv.

Beweis: Daß $V(\underline{x})$ Isometrie ist, wurde bereits in 1.6.13 gezeigt, damit bleibt noch die Surjektivität zu beweisen (die Injektivität folgt aus $\| V(\underline{x})y - V(\underline{x})z \| = \| y-z \|$).

$$\begin{aligned}
x_t &= [L(\underline{x})]^t x_o && \text{wegen } 2.1.9 \\
&= [\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda} dP_\lambda^{\underline{x}}]^t x_o && \text{wegen } 1.6.2 \\
&= (\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} dP_\lambda^{\underline{x}} x_o) && \text{wegen } 1.6.3\text{(iv)} \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} d(P_\lambda^{\underline{x}} x_o) && \text{wegen } 1.6.11 \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} e_t(\lambda)\; d(P_\lambda^{\underline{x}} x_o) \quad = \quad V(\underline{x}) e_t ,
\end{aligned}$$

wobei
$$e_t : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$$
$$\lambda \mapsto e^{i\lambda t}$$
($e_t \in SB(\underline{x})$!).

Sei $y \in ZB(\underline{x}) \Rightarrow y = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{|k| \leq k_N} a_k^{(N)} x_k$; seien

$f_N := \sum\limits_{|k| \leq k_N} a_k^{(N)} e_k \in SB(\underline{x}),\ N \in \mathbb{N}$; da $V(\underline{x})$ isometrisch ist

und $V_{(\underline{x})} f_N = \sum\limits_{|k| \leq k_N} a_k^{(N)} x_k \underset{N\to\infty}{\to} y$ gilt, ist $(f_N)_{N \in \mathbb{N}}$ Cauchy-

folge in $SB(\underline{x})$, also $\exists\ f := \lim\limits_{N\to\infty} f_N \in SB(\underline{x})$.

Es gilt $V(\underline{x}) f = \lim\limits_{N\to\infty} V(\underline{x}) f_N = y$, also ist $V(\underline{x})$ surjektiv. □

2.1.20 Bemerkung: Wenn eine isometrische, bijektive Abbildung zwischen zwei Hilberträumen existiert, so heißen diese isomorph ; 2.1.19 besagt also :

Der Zeitbereich $ZB(\underline{x})$ und der Spektralbereich $SB(\underline{x})$ eines stationären Prozesses $\underline{x}$ sind zueinander isomorphe Hilberträume.

2.1.21 Proposition: Sei $\underline{x}$ stationärer Prozeß:

(i) $f \in SB(\underline{x}) \Rightarrow e_t f \in SB(\underline{x})$

(ii) $[L(\underline{x})]^t\, V(\underline{x}) f = V(\underline{x})(e_t f) \quad \forall\ t \in \mathbb{Z}$

Beweis: (i) folgt aus $|(e_t f)(\lambda)| = |e^{i\lambda t} f(\lambda)| = |f(\lambda)| \quad \forall\, \lambda \in [-\pi,\pi]$.

(ii) $V(\underline{x}) f \in ZB(\underline{x})$ ($\Rightarrow f = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{|k| \leq k_N} a_k^{(N)} e_k$) $\Rightarrow$

$$V(\underline{x}) f = \lim_{N\to\infty} \sum_{|k| \leq k_N} a_k^{(N)} x_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [L(\underline{x})]^t\, V(\underline{x}) f = \lim_{N\to\infty} \sum_{|k| \leq k_N} a_k^{(N)} x_{t+k} =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{|k| \leq k_N} a_k^{(N)} V(\underline{x})(e_{t+k}) =$$

$$= V(\underline{x}) \left(\lim_{N\to\infty} \sum_{|k| \leq k_N} a_k^{(N)} e_k\, e_t \right) = V(\underline{x})(f.e_t)$$

□

2.2 LINEARE PRÄDIKTOREN UND WOLD - ZERLEGUNG

Das Problem der Prognose stationärer Prozesse mittels linearer Prädiktoren wird angeschnitten und gezeigt, daß der Orthoprojektor auf einen Teilraum des Zeitbereiches den besten linearen Prädiktor liefert. Schließlich wird die Zerlegung eines regulären stationären Prozesses in einen indeterministischen und einen rein deterministischen Teil dargestellt: die Wold-Zerlegung.

2.2.1 Bemerkung und Definition: Sei $\underline{x}$ stationärer Prozeß und $\mathcal{M}_t$ der topologische Abschluß von $[\{x_i \mid i \leq t\}]$ in $ZB(\underline{x})$ (also ein abgeschlossener Teilraum) $\forall\ t \in \mathbb{Z}$.

Eine Abbildung

$$p : \{x_t \mid t \in \mathbb{Z}\} \rightarrow ZB(\underline{x})$$

mit

$$p(x_t) \in \mathcal{M}_{t-1} \qquad \forall\ t \in \mathbb{Z}$$

heiße ein linearer Prädiktor für $\underline{x}$. Natürlich soll x_t durch $p(x_t)$ möglichst gut approximiert werden. Vom besten linearen Prädiktor verlangen wir, daß er den mittleren quadratischen (Prognose-) Fehler

$$\begin{aligned} E(|x_t - p(x_t)|^2) &= E([x_t - p(x_t)]\,\overline{[x_t - p(x_t)]}) \\ &= \langle x_t - p(x_t), x_t - p(x_t)\rangle \\ &= \|x_t - p(x_t)\|^2 \end{aligned}$$

minimiere. Wegen 1.1.8 und 1.1.18 ist der beste lineare Prädiktor p damit eindeutig bestimmt und es gilt

$$p(x_t) = P_{t-1}(x_t) \qquad \forall\ t \in \mathbb{Z} \ ,$$

wobei $P_{t-1} : ZB(\underline{x}) \to ZB(\underline{x})$ der Orthoprojektor auf $\mathcal{M}_{t-1}$ ist.

Sei $u_t := x_t - p(x_t) = x_t - P_{t-1}(x_t)$, $t \in \mathbb{Z}$; dann heißt $\underline{u} = (u_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ der <u>Innovationsprozeß des Prozesses $\underline{x}$</u> .

<u>2.2.2 Satz</u>: Sei $\underline{x}$ stationärer Prozeß, $\underline{u}$ sein Innovationsprozeß.

Dann gilt:

(i) $\underline{u}$ ist stationär, genauer: $Eu_t = 0 \quad \forall\ t \in \mathbb{Z}$ und

(ii) es gilt:

$$Cov\ (u_t, u_s) = \langle u_t, u_s \rangle = \sigma_{\underline{u}}^2 \cdot \delta_{st} \qquad \forall\ s, t \in \mathbb{Z},\ \sigma_{\underline{u}}^2 \geq 0$$

(Für $\sigma_{\underline{u}}^2 > 0$ ist $\underline{u}$ also weißes Rauschen !)

<u>Beweis</u>: (i) $p(x_t) \in \mathcal{M}_{t-1} \Rightarrow p(x_t) = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{k_N} a_k^{(N)} x_{t-k}$

$$\Rightarrow \langle p(x_t), 1\rangle = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{k_N} a_k^{(N)} \langle x_{t-k}, 1\rangle = 0$$

wegen $Ex_t = 0 \quad \forall\ t \in \mathbb{Z}$

Also ist $Eu_t = \langle x_t, 1\rangle - \langle p(x_t), 1\rangle = 0 \quad \forall\ t \in \mathbb{Z}$.

(ii) $L(\underline{x})p(x_t) = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{k_N} a_k^{(N)} x_{t-k+1} \in \mathcal{M}_t$,

andererseits gilt für

$z \in \mathcal{M}_t \quad (z = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{m_N} b_k^{(N)} x_{t+1-k}$ und)

$$[L(\underline{x})]^{-1}z = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{m_N} b_k^{(N)} \; x_{t-k} \in \mathcal{M}_{t-1}$$

Also ist wegen $\underline{x}_{t+1} = L(\underline{x})x_t$, 1.5.2 (i)

$$\|x_{t+1} - z\| = \|x_t - [L(\underline{x})]^{-1}z\|$$

$$> \|x_t - p(x_t)\| = \|x_{t+1} - L(\underline{x})p(x_t)\| \quad \forall\ z\in \mathcal{M}_t \setminus \{L(\underline{x})p(x_t)\}$$

woraus mit 1.1.8 , 1.1.18 wegen $L(\underline{x})p(x_t) \in \mathcal{M}_t$

$$L(\underline{x})p(x_t) = P_t(x_{t+1}) = p(x_{t+1}) \quad \text{folgt .}$$

Also gilt

$$L(\underline{x})u_t = L(\underline{x})x_t - L(\underline{x})p(x_t) = x_{t+1} - p(x_{t+1}) = u_{t+1} \quad \forall\ t\in \mathbb{Z} ,$$

also $\qquad u_t = [L(\underline{x})]^t u_0 \qquad \forall\ t \in \mathbb{Z}$, woraus

$$\langle u_t, u_t\rangle = \langle u_0, u_0\rangle =: \sigma_{\underline{u}}^2 \geq 0 \quad \forall\ t\in\mathbb{Z} \quad \text{folgt .}$$

Ist nun $s < t$, so gilt $u_s = x_s - p(x_s) \in \mathcal{M}_{t-1}$ wegen

$$p(x_s) \in \mathcal{M}_{s-1} \subseteq \mathcal{M}_{t-1} \quad , \quad \text{also } u_s = P_{t-1}u_s \quad \text{nach } 1.1.18 .$$

Also gilt $\langle u_s, u_t\rangle = \langle P_t, u_s, x_t - P_{t-1}(x_t)\rangle =$

$$= \langle P_{t-1}u_s, x_t\rangle - \langle P_{t-1}u_s, x_t\rangle = 0 . \qquad \square$$

2.2.3 Definition: Sei $\underline{x}$ stationär mit Innovationsprozeß $\underline{u}$.

$\underline{x}$ heißt regulär, falls $\sigma_{\underline{u}}^2 > 0$, also falls $\underline{u}$ weißes Rauschen ist (vgl. 2.1.4 , 2.2.2 !), andernfalls heißt $\underline{x}$ rein (linear) deterministisch. Nach 2.2.2 gilt in diesem Fall $u_t = o \quad \forall\ t\in\mathbb{Z}$.

2.2.4 Lemma: Sei $\underline{u}$ weißes Rauschen,

dann gilt

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{|i|\le n} \frac{\langle x,u_i\rangle}{\sigma_{\underline{u}}^2} u_i \qquad \forall x \in ZB(\underline{u})$$

$$\left(\text{schreiben } x = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{\langle x,u_i\rangle}{\sigma_{\underline{u}}^2} u_i \right)$$

Beweis: (i) Sei $\Upsilon_n := [\{u_i \mid |i| \le n\}]$; dann ist

Υ_n ein abgeschlossener Teilraum in $ZB(\underline{u})$, da:

$$v_N = \sum_{|i|\le n} a_i^{(N)} u_i \in \Upsilon_n \,, \quad v_N \underset{N\to\infty}{\rightarrow} v \in ZB(\underline{u}) \Rightarrow$$

$$\alpha_i^{(N)} = \frac{1}{\sigma_{\underline{u}}^2} \langle v_N, u_i\rangle \underset{N\to\infty}{\rightarrow} \frac{1}{\sigma_{\underline{u}}^2} \langle v,u_i\rangle =: \alpha_i \in \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow \|v_N - \sum_{|i|\le n} \alpha_i u_i\|^2 = \|\sum_{|i|\le n} (\alpha_i^{(N)} - \alpha_i) u_i\|^2 =$$

$$= \langle \sum_{|i|\le n} (\alpha_i^{(N)} - \alpha_i) u_i, \sum_{|j|\le n} (\alpha_j^{(N)} - \alpha_j) u_j\rangle =$$

$$= \sum_{|i|\le n} \sum_{|j|\le n} (\alpha_i^{(N)} - \alpha_i) \overline{(\alpha_i^{(N)} - \alpha_j)} \langle u_i,u_j\rangle =$$

$$= \sum_{|i|\le n} |\alpha_i^{(N)} - \alpha_i|^2 \sigma_{\underline{u}}^2 \underset{N\to\infty}{\rightarrow} 0 .$$

$$\Rightarrow v = \sum_{|i|\le n} \alpha_i u_i \in \Upsilon_n .$$

(ii) Seien $y_n := \sum_{|i|\le n} \frac{\langle x,u_i\rangle}{\sigma_{\underline{u}}^2} u_i . \in \Upsilon_n$,

$z_n := x - y_n \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\langle y_n,z_n\rangle = \sum_{|i|\le n} \frac{\langle x,u_i\rangle}{\sigma_{\underline{u}}^2} \langle u_i, x - y_n\rangle =$$

$$= \sum_{|i|\le n} \frac{|\langle x,u_i\rangle|^2}{\sigma_u^2} - \sum_{|i|\le n} \sum_{|j|\le n} \frac{\langle x,u_i\rangle}{\sigma_{\underline{u}}^2} \overline{\frac{\langle x,u_j\rangle}{\sigma_{\underline{u}}^2}} \langle u_i,u_j\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \|x\|^2 = \|y_n + z_n\|^2 = \|y_n\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle y_n, z_n\rangle + \|z_n\|^2 =$$

$$= \sum_{|i|\leq n} \sum_{|j|\leq n} \frac{\langle x,u_i\rangle}{\sigma_{\underline{u}}^2} \frac{\overline{\langle x,u_j\rangle}}{\sigma_{\underline{u}}^2} \langle u_i, u_j\rangle + \|z_n\|^2 \geq$$

$$\geq \sum_{|i|\leq n} \frac{|\langle x,u_i\rangle|^2}{\sigma_{\underline{u}}^2} \qquad \forall\ n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \exists \lim_{n\to\infty} \sum_{|i|\leq n} \frac{|\langle x,u_i\rangle|^2}{\sigma_{\underline{u}}^2} \quad \leq \quad \|x\|^2$$

(iii) $m < n \Rightarrow \|y_m - y_n\|^2 = \| \sum_{m<|i|\leq n} \frac{\langle x,u_i\rangle}{\sigma_{\underline{u}}^2} u_i \|^2 =$

$$= \sum_{m<|i|\leq n} \frac{|\langle x,u_i\rangle|^2}{\sigma_{\underline{u}}^2} \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0 \quad \Rightarrow \quad \exists\, y := \lim_{n\to\infty} y_n \in ZB(\underline{u}) \quad .$$

Sei $z \in ZB(\underline{u})$ beliebig $\Rightarrow z = \lim_{N\to\infty} \sum_{|k|\leq k_N} a_k^{(N)} u_k$

$$\Rightarrow \langle x-y, z\rangle = \lim_{N\to\infty} \sum_{|k|\leq k_N} \overline{a_k^{(N)}} \langle x, u_k\rangle \; -$$

$$- \lim_{N\to\infty} \sum_{|k|\leq k_N} \overline{a_k^{(N)}} \lim_{n\to\infty} \sum_{|i|\leq n} \frac{\langle x,u_i\rangle}{\sigma_{\underline{u}}^2} \langle u_i, u_k\rangle =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{|k|\leq k_N} a_k^{(N)} \langle x, u_k\rangle - \lim_{N\to\infty} \sum_{|k|\leq k_N} \overline{a_k^{(N)}} \langle x, u_k\rangle = 0$$

$$\Rightarrow x-y \in ZB(\underline{u}) \cap [ZB(\underline{u})]^{\perp} = \{0\} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \lim_{n\to\infty} \sum_{|i|\leq n} \frac{\langle x,u_i\rangle}{\sigma_{\underline{u}}^2} u_i \quad . \qquad \square$$

2.2.5 Satz und Definition (Wold - Zerlegung) :

Sei $\underline{x}$ stationär und regulär mit Innovationsprozeß $\underline{u}$; dann existieren stationäre Prozesse $\underline{v} = (v_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ und $\underline{w} = (w_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ mit $E v_t = E w_t = 0 \quad \forall t \in \mathbb{Z}$, sodaß gilt:

(i) $\quad x_t = v_t + w_t \qquad \forall t \in \mathbb{Z}$

(ii) $\quad \underline{v}$ ist rein deterministisch

(iii) $\quad \langle u_s, v_t \rangle = 0 \;,\; \langle w_s, v_t \rangle = 0 \qquad \forall s,t \in \mathbb{Z}$

(iv) $\quad w_t = \frac{1}{\sigma_{\underline{u}}^2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \langle x_t, u_{t-k} \rangle \, u_{t-k} \qquad \forall t \in \mathbb{Z}$.

$\underline{v}$ heißt <u>deterministischer Anteil</u> von $\underline{x}$,

$\underline{w}$ heißt <u>indeterministischer Anteil</u> von $\underline{x}$.

Die (von t unabhängigen) $c_k(\underline{x}) := \frac{\langle x_t, u_{t-k} \rangle}{\sigma_{\underline{u}}^2}$

heißen die <u>kanonischen Parameter</u> von $\underline{x}$.

<u>Beweis</u>: Wegen $u_t \in ZB(\underline{x}) \;\; \forall t \in \mathbb{Z}$ ist klarerweise $ZB(\underline{u})$ ein abgeschlossener Teilraum von $ZB(\underline{x})$; sei P der OP auf $ZB(\underline{u})$ sowie $w_t := P x_t$, $t \in \mathbb{Z}$. Dann gilt für $v_t := x_t - w_t$ klarerweise (i).

Wegen $v_t \in [ZB(\underline{u})]^{\perp}$ (vgl. 1.1.18 !) $\forall t \in \mathbb{Z}$ ist (iii) klar.

Nun zur Stationarität von $\underline{v}$ und $\underline{w}$:

Wir wissen bereits (vgl. Beweis von 2.2.2 !)

$$[L(\underline{x})]^s \, u_t = u_{t+s} \;\; \forall t,s \in \mathbb{Z} \text{ , sodaß}$$

$$(s = 1,\; z \in ZB(\underline{u}) \Rightarrow z = \lim_{N\to\infty} \sum_{|k| \le k_N} a_k^{(N)} u_{t-k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\underline{x}) z = \lim_{N\to\infty} \sum_{|k| \le k_N} a_k^{(N)} u_{t-k+1} \in ZB(\underline{u}) \;)$$

$$L(\underline{x}) \, [ZB(\underline{u})] \subseteq ZB(\underline{u}) \quad \text{sowie}$$

($s = -1$, analog oben)

$[L(\underline{x})]^* [ZB(\underline{u})] = [L(\underline{x})]^{-1} [ZB(\underline{u})] \subsetneq ZB(\underline{u})$ gilt,

also nach 1.1.19 (vi) $L(\underline{x})P = PL(\underline{x})$ ist .

Daraus folgt $w_{t+1} = PL(\underline{x})x_t = L(\underline{x})Px_t = L(\underline{x})w_t \quad \forall\ t \in \mathbb{Z}$

und $v_{t+1} = L(\underline{x})x_t - L(\underline{v})w_t = L(\underline{x})v_t \quad \forall\ t \in \mathbb{Z}$.

Klarerweise sind nun $\langle v_t, v_s \rangle = \langle L(\underline{x})v_t, L(\underline{x})v_s \rangle = \langle v_{t+1}, v_{s+1} \rangle$

$$\forall\ s,t \in \mathbb{Z}$$

sowie $\langle w_t, w_s \rangle = \langle w_{t+1}, w_{s+1} \rangle \quad \forall s,t \in \mathbb{Z}$ sowie

$$(v_t , w_t \in ZB(\underline{x}) \Rightarrow) \quad \mathcal{E}v_t = \mathcal{E}w_t = 0 \qquad \forall\ t \in \mathbb{Z} ,$$

also sind $\underline{v}$ und $\underline{w}$ stationär .

Da $w_t \in ZB(\underline{u})$ und $\underline{u}$ laut Voraussetzung weißes Rauschen ist, gilt nach 2.2.4

$$w_t = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{\langle w_t, u_i \rangle}{\sigma_{\underline{u}}^2} u_i \qquad \forall\ t \in \mathbb{Z} .$$

Es gilt nun

$$\langle w_t, u_i \rangle = \langle Px_t, u_i \rangle = \langle x_t, Pu_i \rangle = \langle x_t, u_i \rangle \quad \text{wegen} \quad Pu_i = u_i$$

und für $t < i$ wegen $x_t \in \mathcal{M}_{i-1}$ $(\Rightarrow P_{i-1}x_t = x_t)$

$$\langle x_t, u_i \rangle = \langle x_t, x_i - P_{i-1}x_i \rangle = \langle x_t, x_i \rangle - \langle P_{i-1}x_t, x_i \rangle = 0 .$$

Also gilt ($k = t-i$ gesetzt $\Rightarrow \langle x_t, u_{t-k} \rangle = 0 \quad \forall\ k < 0$)

$$w_t = \frac{1}{\sigma_{\underline{u}}^2} \sum_{k=0}^{\infty} \langle x_t, u_{t-k} \rangle \, u_{t-k} \qquad \forall\ t \in \mathbb{Z} ,$$

womit (iv) gezeigt ist .

Weiters ist wegen $[L(\underline{x})]^t u_{-k} = u_{t-k}$ (Beweis von 2.2.2 !)

$$\frac{\langle x_t, u_{t-k}\rangle}{\sigma_{\underline{u}}^2} = \frac{\langle x_o, u_{-k}\rangle}{\sigma_{\underline{u}}^2} =: c_k(\underline{x}) \quad \text{von } t \text{ unabhängig .}$$

Somit bleibt nur noch (ii) zu zeigen :

Sei Υ_t der topologische Abschluß von $[\{v_i \mid i \leq t\}]$ in $ZB(\underline{x})$, Q_t der OP auf den abgeschlossenen Teilraum Υ_t , $t \in \mathbb{Z}$.
Dann gilt zunächst wegen $\|Q_t w_s\|^2 = \langle Q_t w_s, w_s\rangle = 0$
(beachte $Q_t w_s \in \Upsilon_t$ sowie (iii) !)

$$Q_t x_s = Q_t v_s \qquad \forall\, s \in \mathbb{Z} .$$

Klarerweise ist auch $\langle v_t, x_s\rangle = \langle v_t, v_s + w_s\rangle = \langle v_t, v_s\rangle$, sodaß für $s \leq t$ ($\Rightarrow v_s \in \Upsilon_t \Rightarrow Q_t v_s = v_s$) gilt :

$$\langle v_{t+1} - Q_t v_{t+1}, x_s\rangle = \langle v_{t+1}, x_s\rangle - \langle v_{t+1}, Q_t x_s\rangle =$$

$$= \langle v_{t+1}, v_s\rangle - \langle v_{t+1}, Q_t v_s\rangle = 0 ,$$

also $v_{t+1} - Q_t v_{t+1} \in \mathcal{M}_t^{\perp}$.

Wegen (iv) und $c_o(\underline{x}) = \dfrac{\langle x_o, u_o\rangle}{\sigma_{\underline{u}}^2} = \dfrac{\|u_o\|^2}{\sigma_{\underline{u}}^2} = 1$ ist

$$v_s = x_s - w_s = x_s - u_s - \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\underline{x}) u_{s-k} =$$

$$= P_{s-1} x_s - \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\underline{x}) u_{s-k} \in \mathcal{M}_{s-1} ,$$

also $v_s \in \mathcal{M}_t \quad \forall\, s \leq t+1$, $\Rightarrow \Upsilon_{t+1} \subseteq \mathcal{M}_t \Rightarrow$ ($\Upsilon_t \subseteq \Upsilon_{t+1}$)

$$Q_t v_{t+1} \in \Upsilon_{t+1} \subseteq \mathcal{M}_t \Rightarrow v_{t+1} - Q_t v_{t+1} \in \mathcal{M}_t ,$$

sodaß $v_{t+1} - Q_t v_{t+1} \in \mathcal{M}_t \cap \mathcal{M}_t^{\perp} = \{o\}$, also

$v_{t+1} = Q_t v_{t+1} \in \Upsilon_t$ sein muß, was zu zeigen war . □

<u>2.2.6 Definition</u>: Sei $\underline{x}$ regulärer stationärer Prozeß mit

deterministischem Anteil $\underline{v} = (v_t)_{t \in \mathbb{Z}}$.

Falls $v_t = o \quad \forall t \in \mathbb{Z}$ gilt, heißt <u>indeterministisch</u> .

2.3 LINEARE FILTERUNG; ARMA-PROZESSE

Eine wichtige Methode, aus einem stationären Prozeß einen anderen zu erhalten, ist die der linearen Filterung. Die theoretische Beschreibung dieses Vorgangs ist aufgrund der bisher entwickelten Hilfsmittel sehr einfach: der linearen Filterung im Zeitbereich entspricht die Multiplikation mit dem Absolutquadrat der Transferfunktion im Spektralbereich. Auf dieser Theorie aufbauend werden Fragen nach Existenz und Eindeutigkeit der wichtigsten Spezialfälle stationärer Prozesse, nämlich autoregressiver (AR-) , Moving Average- (MA-) und autoregressiver Moving Average- (ARMA-) Prozesse gelöst und deren spektrale Dichten berechnet.

2.3.1. Definition: Der stochastische Prozeß $\underline{y}$ geht aus dem stochastischen Prozeß $\underline{x}$ durch lineare Filterung hervor, wenn $\underline{y}$ eine Darstellung der Form

$$y_t = \lim_{N\to\infty} \sum_{|k|\le k_N} a_k^{(N)} x_{t+k} \quad , \quad t \in \mathbb{Z} \quad \text{besitzt.}$$

2.3.2. Satz: Ist $\underline{x}$ stationär und geht $\underline{y}$ aus $\underline{x}$ durch lineare Filterung hervor, dann ist

(i) auch $\underline{y}$ stationär

(ii) $ZB(\underline{y})$ ein abgeschlossener Teilraum von $ZB(\underline{x})$

(iii) $L(\underline{y}) = L(\underline{x})|_{ZB(\underline{y})}$

(iv) $P_\lambda^{\underline{y}} = P_\lambda^{\underline{x}}|_{ZB(\underline{y})} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Beweis: (i):

$$E\, y_t = E(\lim_{N\to\infty} \sum_{|k|\le k_N} a_k^{(N)} x_{t+k})$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{|k|\le k_N} a_k^{(N)} E x_{t+k} = 0$$

$$E\, y_s \bar{y}_t = \langle y_s, y_t \rangle = \lim_{M,N\to\infty} \sum_{|k|\le k_N} \sum_{|l|\le k_M} a_k^{(N)} a_l^{(M)} \sigma_{\underline{x}}^2 (s-t+k-l)$$

(iii):

$$L(\underline{y}) y_t = y_{t+1} = \lim_{N\to\infty} \sum_{|k|\le k_N} a_k^{(N)} x_{t+1+k} =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{|k|\le k_N} a_k^{(N)} L(\underline{x}) x_{t+k} = L(\underline{x}) \lim_{N\to\infty} \sum_{|k|\le k_N} a_k^{(N)} x_{t+k}$$

$= L(\underline{x}) y_t \quad \forall t \in \mathbb{Z}$, woraus nach 2.1.8

$L(\underline{y}) = L(\underline{x})|_{ZB(\underline{y})}$ folgt.

(ii) ist wegen $y_t \in ZB(\underline{x}) \quad \forall\, t \in \mathbb{Z}$ trivial.

(iv): Sei $P\in\mathfrak{P}(ZB(\underline{x}))$ der OP auf $ZB(\underline{y})$

Wegen (iii) gilt $L(\underline{x})(ZB(\underline{y}))\cup[L(\underline{x})]^*(ZB(\underline{y}))\subseteq ZB(\underline{y})$,

also nach 1.1.19 (vi)

$L(\underline{x})P = PL(\underline{x})$, woraus nach 1.5.14

$PP_\lambda^{\underline{x}} = P_\lambda^{\underline{x}}P \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}$, also nach 1.1.19 (vi)

$P_\lambda^{\underline{x}}(ZB(\underline{y}))\subseteq ZB(\underline{y}) \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}$ folgt. Wegen 1.2.11 gilt

daher mit $P_\lambda := P_\lambda^{\underline{x}}|_{ZB(\underline{y})}\in\mathfrak{P}(ZB(\underline{y}))$, $\lambda\in\mathbb{R}$: $P_{-\pi}=\Theta$, $P_\pi=Id_{ZB(\underline{y})}$,

$$L(\underline{y})=L(\underline{x})|_{ZB(\underline{y})} = \left(\int e^{i\lambda}dP_\lambda^{\underline{x}}\right)\Big|_{ZB(\underline{y})} = \int e^{i\lambda}dP_\lambda ,$$

woraus nach 1.5.13 $P_\lambda^{\underline{y}} = P_\lambda$ folgt. □

2.3.3. Satz und Definition:

Ist $\underline{x}$ stationär und geht $\underline{y}$ aus $\underline{x}$ durch lineare Filterung hervor, dann existiert genau ein $f\in SB(\underline{x})$, nämlich $f=V(\underline{x})^{-1}y_o$, sodaß gilt:

$$y_t = \int_{[-\pi,\pi]} e^{i\lambda t} f(\lambda)\, dP_\lambda^{\underline{x}}\, x_o \ , \ t\in\mathbb{Z} \qquad (*)$$

und umgekehrt wird für jedes $f\in SB(\underline{x})$ durch (*) ein stationärer Prozeß $\underline{y}$ definiert, der aus $\underline{x}$ durch lineare Filterung hervorgeht. $f=V(\underline{x})^{-1}\, y_o$ heißt <u>Transferfunktion von $\underline{x}$ nach $\underline{y}$.</u>

<u>Beweis:</u> Es gilt $\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{|k|\le k_N} a_k^{(N)} x_{t+k} = \lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{|k|\le k_N} a_k^{(N)} V(\underline{x})e_{t+k} =$

$$= V(\underline{x})\lim_{N\to\infty}\sum_{|k|\le k_N} a_k^{(N)} e_t e_k = V(\underline{x})\Big(e_t \lim_{N\to\infty}\sum_{|k|\le k_N} a_k^{(N)} e_k\Big) =$$

$$= \int_{[-\pi,\pi]} e^{i\lambda t} \lim_{N\to\infty}\sum_{|k|\le k_N} a_k^{(N)} e^{i\lambda k}\, dP_\lambda^{\underline{x}} x_o$$

$$= \int_{[-\pi,\pi]} e^{i\lambda t} f(\lambda)\, dP_\lambda^{\underline{x}} x_o \ ,$$ wobei alle Limiten existieren.

Für " $\Rightarrow$" definiert man f durch $\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{|k|\leq k_N} a_k^{(N)} e_k$.

Aus $y_o = \int\limits_{[-\pi,\pi]} f(\lambda) d(P_\lambda^{\underline{x}} x_o)$ folgt unmittelbar $f = V(\underline{x})^{-1}\, y_o$.

Es gilt : $f \in SB(\underline{x}) \Rightarrow V(\underline{x}) f \in ZB(\underline{x}) \Rightarrow V(\underline{x}) f = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{|k|\leq k_N} a_k^{(N)} x_k$

$\Rightarrow f = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{|k|\leq k_N} a_k^{(N)} e_k$, woraus " $\Leftarrow$ " folgt. □

<u>2.3.4. Satz</u>: Ist f die Transferfunktion von $\underline{x}$ nach $\underline{y}$, so gilt

(i) $P_\lambda^{\underline{y}}\, y_o = \int\limits_{[-\pi,\lambda]} f(\mu) d(P_\mu^{\underline{x}} x_o)$

(ii) $F_{\underline{y}}(\lambda) = \int\limits_{[-\pi,\lambda]} |f(\mu)|^2\, dF_{\underline{x}}(\mu)$

(iii) Ist $f_{\underline{x}}$ eine spektrale Dichte von $\underline{x}$, so gilt weiters:

$$f_{\underline{y}} = |f|^2 f_{\underline{x}}$$

ist eine spektrale Dichte von $\underline{y}$.

Dazu benötigen wir das folgende

<u>2.3.5. Lemma</u>: $f \in SB(\underline{x}) \Rightarrow V(\underline{x})(1_{[-\pi,\lambda]} f) = P_\lambda^{\underline{x}}\, V(\underline{x}) f$

<u>Beweis</u>: $f \in SB(\underline{x}) \Rightarrow V(\underline{x}) f = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{|t|\leq k_N} a_t^{(N)} x_t \Rightarrow P_\lambda^{\underline{x}}\, V(\underline{x}) f =$

$= \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{|t|\leq k_N} a_t^{(N)} [L(\underline{x})]^t (P_\lambda^{\underline{x}}\, x_o) =$

$= \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{|t|\leq k_N} a_t^{(N)} [L(\underline{x})]^t \int\limits_{[-\pi,\lambda]} d(P_\mu^{\underline{x}}\, x_o) =$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{|t| \le k_N} a_t^{(N)} [L(\underline{x})]^t \, V(\underline{x}) (1_{[-\pi,\lambda]}) = \quad (2.1.14(ii)!)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{|t| \le k_N} a_t^{(N)} \, V(\underline{x}) (1_{[-\pi,\lambda]} e_t) =$$

$$= V(\underline{x}) (\lim_{N\to\infty} \sum_{|t| \le k_N} a_t^{(N)} e_t \; 1_{[-\pi,\lambda]}) = V(\underline{x}) (f \, 1_{[-\pi,\lambda]}) . \qquad \square$$

<u>Beweis</u> von 2.3.4 : (i) $P_\lambda^{\underline{y}} y_o = P_\lambda^{\underline{x}} y_o = P_\lambda^{\underline{x}} V(\underline{x}) f =$

$$\int_{[-\pi,\pi]} 1_{[-\pi,\lambda]}(\mu) f(\mu) d(P_\mu^{\underline{x}} x_o) = \int_{[-\pi,\lambda]} f(\mu) d(P_\mu^{\underline{x}} x_o)$$

(ii): $F_{\underline{y}}(\lambda) = \langle P_\lambda^{\underline{y}} \; y_o, y_o \rangle = \langle P_\lambda^{\underline{x}} \, y_o . y_o \rangle$

$$= \langle P_\lambda^{\underline{x}} \, V(\underline{x}) f, \, V(\underline{x}) f \rangle = \langle V(\underline{x})^{-1} P_\lambda^{\underline{x}} \, V(\underline{x}) f, f \rangle =$$

$$= \langle 1_{[-\pi,\lambda]} f, f \rangle \quad \text{(wegen 2.3.5.)}$$

$$= \int_{[-\pi,\lambda]} |f(\mu)|^2 \, dF_{\underline{x}}(\mu) .$$

(iii): Folgt unmittelbar aus (ii) . $\square$

<u>2.3.6 Korollar</u> : Sei $\underline{x}$ indeterministisch, $c_k(\underline{x})$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ seine kanonischen Parameter, $\underline{u}$ sein Innovationsprozeß. Dann ist

$$f_{\underline{x}} : \lambda \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sigma_{\underline{u}}^2}{2\pi} \left| \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\underline{x}) e^{-i\lambda k} \right|^2 , & \lambda \in [-\pi,\pi] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

eine spektrale Dichtefunktion von $\underline{x}$.

Beweis: $\underline{x}$ indeterministisch, 2.2.5 $\Rightarrow$

$$x_t = w_t = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\underline{x}) u_{t-k} \quad \forall\ t \in \mathbb{Z}\ , \quad \underline{u} = (u_t)_{t \in \mathbb{Z}}$$

weißes Rauschen. Für $a_k^{(N)} := \begin{cases} c_{-k}(\underline{x})\ , & k \in \{-N,\dots,0\}, \\ 0\ , & k \in \{1,\dots,N\} \end{cases}$

ist $$x_t = \lim_{N\to\infty} \sum_{|k|\leq N} a_k^{(N)} u_{t+k} \quad \forall\ t \in \mathbb{Z}\ ,$$

also geht $\underline{x}$ aus $\underline{u}$ durch lineare Filterung hervor.

Nach 2.1.17 , 2.3.5(ii) ist daher

$$f_{\underline{x}}(\lambda) = \frac{\sigma_{\underline{u}}^2}{2\pi} \left| \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\underline{x}) e^{-i\lambda k} \right|^2 = f_{\underline{u}}(\lambda) |f(\lambda)|^2$$

eine spektrale Dichte von $\underline{x}$, da

$$f(\lambda) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\underline{x}) e^{-i\lambda k}$$ die entsprechende

Transferfunktion von $\underline{u}$ nach $\underline{x}$ ist. □

2.3.7 Satz: Seien $\underline{x} = (x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$, $\underline{y} = (y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ stochastische Prozesse mit zweiten Momenten, $\underline{x}$ stationär.

Dann sind äquivalent :

(i) $\underline{y}$ geht aus $\underline{x}$ durch lineare Filterung hervor.

(ii) $\underline{x}$ und $\underline{y}$ sind <u>stationär korreliert</u> , das heißt

$$\langle x_{t+k}, y_{s+k} \rangle = \langle x_t, y_s \rangle \quad \forall\ k,s,t \in \mathbb{Z}$$

und es gilt $$y_t \in ZB(\underline{x}) \quad \forall\ t \in \mathbb{Z}\ .$$

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) : Sei f die Transferfunktion von $\underline{x}$ nach $\underline{y}$ $\Rightarrow$ $y_s = V(\underline{x})(f.e_s)$ $\forall\ s \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \langle x_{t+k}, y_{s+k} \rangle = \langle V(\underline{x}) e_{t+k}, V(\underline{x})(f.e_{s+k}) \rangle =$$

$$= (e_{t+k} | f.e_{s+k})_{x_0} = (e_{t+k-s-k} | f)_{x_0} = (e_{t-s} | f)_{x_0}$$

$$= (e_t | f.e_s)_{x_0} = \langle x_t, y_s \rangle \quad \forall\ s,t,k \in \mathbb{Z};$$ klarerweise

gilt $$y_t \in ZB(\underline{x}) \quad \forall\ t \in \mathbb{Z}\ .$$

(ii) $\Rightarrow$ (i): $y_0 \in ZB(\underline{x}) \Rightarrow f := V(\underline{x})^{-1} y_0 \in SB(\underline{x})$,

2.1.21(i) $\Rightarrow e_s f \in SB(\underline{x}) \Rightarrow V(\underline{x})(e_s f) \in ZB(\underline{x})$;

aber $\langle y_s - V(\underline{x})(e_s f), x_t\rangle = \langle y_s, x_t\rangle - (e_s f | e_t)_{x_0} =$

$= \langle y_0, x_{t-s}\rangle - (f | e_{t-s})_{x_0} = \langle y_0, x_{t-s}\rangle - \langle V(\underline{x}) f, x_{t-s}\rangle$

$= 0 \;\forall\, t \in \mathbb{Z} \Rightarrow y_s - V(\underline{x})(e_s f) \in ZB(\underline{x}) \cap [ZB(\underline{x})]^{\perp} = \{0\}$

$\Rightarrow y_s = V(\underline{x})(e_s f) \;\forall\, s \in \mathbb{Z}$, was nach 2.3.3 alles zeigt. □

<u>2.3.8 Satz:</u> Sei $\underline{x}$ stationär, $\underline{y}$ gehe aus $\underline{x}$ durch lineare Filterung hervor; sei f die Transferfunktion von $\underline{x}$ nach $\underline{y}$, es gelte

$$\frac{1}{f} : \lambda \to \frac{1}{f(\lambda)} \quad \in SB(\underline{x}).$$

Dann gilt:
(i) $\underline{x}$ geht aus $\underline{y}$ durch lineare Filterung hervor
(ii) $ZB(\underline{x}) = ZB(\underline{y})$
(iii) $\frac{1}{f}$ ist die Transferfunktion von $\underline{y}$ nach $\underline{x}$.

<u>Beweis:</u> Nach 2.3.2 (ii) ist $ZB(\underline{y})$ ein abgeschlossener Teilraum von $ZB(\underline{x})$, weshalb alle folgenden Grenzübergänge (auch in $SB(\underline{x})$ oder $SB(\underline{y})$) unproblematisch sind:

$\frac{1}{f} \in SB(\underline{x}) \Rightarrow$ (vgl. mit Beweis von 2.3.3 !)

$\Rightarrow \frac{1}{f} = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{|k| \le k_N} a_k^{(N)} e_k$; nach 2.3.3 gilt

$$x_t = V(\underline{x})(e_t) = V(\underline{x})(\tfrac{1}{f}.f.e_t) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{|k|\le k_N} a_k^{(N)} V(\underline{x})(e_k.f.e_t) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{|k|\le k_N} a_k^{(N)} V(\underline{x})(f.e_{t+k}) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{|k|\le k_N} a_k^{(N)} y_{t+k} \quad \forall\, t \in \mathbb{Z} ,$$

womit (i) und wegen 2.3.2(ii) auch (ii) gezeigt ist.
(iii) folgt aus

$$V(\underline{y})(\tfrac{1}{f}) = \lim_{N\to\infty} \sum_{|k|\leq k_N} a_k^{(N)} V(\underline{y})e_k = \lim_{N\to\infty} \sum_{|k|\leq k_N} a_k^{(N)} y_k = x_o \quad .$$

□

<u>2.3.9 Satz</u>: Ist $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ und auch $\frac{1}{f} : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ stetig

(gilt genau dann, falls f stetig und $f(\lambda) \neq 0 \;\; \forall \lambda \in [-\pi,\pi]$ ist),
so gilt für stationäre $\underline{y} = (y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$:
Es gibt genau einen stationären Prozeß $\underline{x} = (x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ mit

$$V(\underline{x})(f.e_t) = y_t \qquad \forall t\in\mathbb{Z} \quad ,$$

nämlich $x_t = V(\underline{y})(\frac{1}{f}.e_t)$, $t\in\mathbb{Z}$.

<u>Beweis</u>: (i) Wegen $\frac{1}{f} \in SB(\underline{y})$ und 2.3.3 gilt für

$x_t := V(\underline{y})(\frac{1}{f}.e_t)$, $t\in\mathbb{Z}$:

$\underline{x} = (x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ geht aus $\underline{y}$ durch lineare Filterung hervor, ist also nach 2.3.2(i) stationär. Jetzt vertauschen wir die Rollen $\underline{x}$ und $\underline{y}$ in 2.3.8 und beachten $\frac{1}{(\frac{1}{f})} = f \in SB(\underline{y})$; dann folgt mit 2.3.3

$$y_t = V(\underline{x})(f.e_t) \quad \forall t\in\mathbb{Z} \quad .$$

(ii) Sei umgekehrt $\underline{x}$ stationär mit

$V(\underline{x})(f.e_t) = y_t \quad \forall t\in\mathbb{Z}$; wegen 2.3.8 und

$\frac{1}{f} \in SB(\underline{x})$ gilt nach 2.3.3

$$x_t = V(\underline{y})(\tfrac{1}{f}.e_t) \quad .$$

□

<u>2.3.10 Korollar und Definition</u>: Sei $\underline{u}$ weißes Rauschen, seien

$p,q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a_0,\dots,a_p,b_0,\dots,b_q \in \mathbb{C}$

mit $a_0 a_p b_0 b_q \neq 0$ und

$$f(\lambda) := \sum_{k=0}^{p} a_k e^{-i\lambda k} \neq 0 \qquad \forall\, \lambda \in [-\pi,\pi] \; .$$

Dann ist durch

$$\sum_{k=0}^{p} a_k x_{t-k} = \sum_{j=0}^{q} b_j u_{t-j} \qquad \forall\, t \in \mathbb{Z}$$

ein stationärer Prozeß $\underline{x} = (x_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ eindeutig festgelegt; dieser heißt <u>ARMA-Prozeß der Ordnung (p,q)</u> .

Wir schreiben $\underline{x} = \mathrm{ARMA}(a_0,\dots,a_p;b_0,\dots,b_q;\underline{u})$.

<u>Beweis</u>: $f, \frac{1}{f} : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ sind stetig;

falls $\underline{x}$ stationär ist, gilt

$$\sum_{k=0}^{p} a_k x_{t-k} = V(\underline{x})(f.e_t) \qquad \forall t \in \mathbb{Z} \; .$$

Seien $y_t := \sum_{j=0}^{q} b_j u_{t-j}$, $t \in \mathbb{Z}$, also

$$y_t = V(\underline{u})(g.e_t) \qquad \forall t \in \mathbb{Z} \; ,$$

wobei $g : \lambda \mapsto \sum_{j=0}^{q} b_j e^{-i\lambda j} \in SB(\underline{u})$ ist.

$\underline{y}$ geht daher aus $\underline{u}$ durch lineare Filterung hervor, ist also stationär, alles weitere folgt aus 2.3.9 . □

<u>2.3.11 Definition</u> : Sei $\underline{x}$ = ARMA $(a_o,\dots,a_p;b_o,\dots,b_q;\underline{u})$;

(i) wenn $p = 0$, $a_o = 1$ ist, heißt $\underline{x}$ <u>MA-Prozeß der Ordnung q</u> , schreiben $\underline{x} = \mathrm{MA}(b_o,\dots,b_q;\underline{u})$; in diesem Fall ist

$$x_t = \sum_{j=0}^{q} b_j u_{t-j} \qquad \forall \quad t \in \mathbb{Z} \quad .$$

(ii) wenn $q = 0$, $b_o = 1$ ist, heißt $\underline{x}$ <u>AR-Prozeß der Ordnung p</u> , schreiben $\underline{x} = \mathrm{AR}(a_o,\dots,a_p;\underline{u})$; dann gilt

$$\sum_{k=0}^{p} a_k x_{t-k} = u_t \qquad \forall \quad t \in \mathbb{Z} \quad .$$

<u>2.3.12 Satz</u>: Sei $\underline{x} = \mathrm{ARMA}(a_o,\dots,a_p,b_o,\dots,b_q;\underline{u})$;

dann ist

$$f_{\underline{x}} : \lambda \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sigma_{\underline{u}}^2 \left| \sum\limits_{j=0}^{q} b_j e^{-i\lambda j} \right|^2}{2\pi \left| \sum\limits_{k=0}^{p} a_k e^{-i\lambda k} \right|^2} , & \lambda \in [-\pi,\pi] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

eine spektrale Dichte von $\underline{x}$.

<u>Beweis</u>: Seien $\quad f(\lambda) := \sum\limits_{k=0}^{p} a_k e^{-i\lambda k}$

$$f_{\underline{y}}(\lambda) := \frac{\sigma_{\underline{u}}^2}{2\pi} \left| \sum_{j=0}^{q} b_j e^{-i\lambda j} \right|^2$$

dann ist nach 2.3.4(iii) und dem Beweis von 2.3.10

$f_{\underline{y}}$ eine spektrale Dichte von $\underline{y}$, weshalb wegen der Stetigkeit von f und $\frac{1}{f}$ sowie wegen 2.3.9 folgt :

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} f_{\underline{x}}(\lambda)d\lambda = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\lambda t}}{|f(\lambda)|^2} f_{\underline{y}}(\lambda)d\lambda =$$

$$= \int_{[-\pi,\pi]} \frac{e^{i\lambda t}}{f(\lambda)} \overline{\frac{1}{f(\lambda)}} dF_{\underline{y}}(\lambda) = (e_t \cdot \tfrac{1}{f} \mid \tfrac{1}{f})_{y_o} =$$

$$= \langle V(\underline{y})(\tfrac{1}{f}\cdot e_t) , V(\underline{y})(\tfrac{1}{f})\rangle = \langle x_t, x_o\rangle = \sigma^2_{\underline{x}}(t) \qquad \forall\ t\in \mathbb{Z} .$$

Nach 2.1.16 ergibt sich daraus die Behauptung . □

<u>2.3.13 Korollar:</u>

(i) $\underline{x} = AR(a_o,\ldots,a_p;\underline{u}) \Rightarrow$

$$f_{\underline{x}} : \lambda \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sigma^2_{\underline{u}}}{2\pi\left|\sum\limits_{k=0}^{p} a_k e^{-i\lambda k}\right|^2} & , \lambda\in [-\pi,\pi] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist spektrale Dichte von $\underline{x}$

(ii) $\underline{x} = MA(b_o,\ldots,b_q;\underline{u}) \Rightarrow$

$$f_{\underline{x}}: \lambda \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sigma^2_{\underline{u}}}{2\pi} \left|\sum\limits_{j=0}^{q} b_j e^{-i\lambda j}\right|^2 & , \lambda\in [-\pi,\pi] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist spektrale Dichte von $\underline{x}$.

3. LITERATUR

[1] ACHIESER,N.I. & I.M. GLASMANN : Theorie der linearen Operatoren im Hilbert-Raum
Akademie-Verlag, Berlin (1960).

[2] ANDERSON,T.W. : The Statistical Analysis of Time Series
John Wiley & Sons, New York (1971).

[3] ASH,R.B. : Real Analysis and Probability
Academic Press, New York (1972).

[4] CIGLER,J. & H.-C. REICHEL : Topologie - eine Grundvorlesung
BI-Hochschultaschenbuch Band 121
Bibliographisches Institut, Mannheim (1978).

[5] CRAMÉR,H. : Mathematical Methods of Statistics, 12th printing
Princeton University Press, Princeton (1971).

[6] GÜNTHER,P., K. BEYER, S. GOTTWALD & V. WÜNSCH : Grundkurs Analysis Teil 2
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Bibliothek Band 54
BSB B.G. Teubner, Leipzig (1973).

[7] HIRZEBRUCH,F. & W. SCHARLAU : Einführung in die Funktionalanalysis
BI-Hochschultaschenbuch Band 296
Bibliographisches Institut, Mannheim (1971).

[8] LENGYEL,B.A. & M.H. STONE : Elementary Proof of the Spectral Theorem
Annals of Mathematics 37 , 853-864 (1936).

[9] MESCHKOWSKI,H. : Unendliche Reihen
BI-Hochschultaschenbuch Band 35
Bibliographisches Institut, Mannheim (1962).

[10] ROZANOV,Y.A. : Stationary Random Processes
Holden-Day, San Francisco (1967).