NICHTKOOPERATIVE ZWEIPERSONENSPIELE MIT UNVOLLSTÄNDIGER INFORMATION:

EIN VERGLEICH MIT SPIELDYNAMISCHEN EVOLUTIONSMODELLEN

Immanuel M. BOMZE*

Forschungsbericht/
Research Memorandum No. 175

Oktober 1982

* Scholar am Institut für Höhere Studien

Z u s a m m e n f a s s u n g

Ziel und Zweck dieser Arbeit ist es, die Ansätze der sogenannten "evolutionären Spieltheorie", eines Zweiges der theoretischen Biologie, mit einigen Aspekten der (menschlichen) nichtkooperativen Spieltheorie zu vergleichen und - wenn möglich - einzuordnen. Nach einer überblicksartigen Zusammenfassung der dazu notwendigen Resultate über nichtkooperative Zweipersonenspiele mit unvollständiger Information werden zunächst symmetrische Evolutions- bzw. Lernspiele modelliert und mit einer Dynamik versehen. Sodann werden die Eigenschaften der Fixpunkte dieser Dynamik - die "dynamischen Gleichgewichte" - mit denen des Nash-schen Gleichgewichtsbegriffs verglichen. Als Anwendungsbeispiel wird die Dynamik des verallgemeinerten Zermürbungskampfs näher untersucht.

Asymmetrische Konflikte werden nun ähnlich wie im symmetrischen Fall modelliert und dynamisiert, analog asymmetrische dynamische Gleichgewichte eingeführt und schließlich als interessanter Spezialfall eine Situation partieller Indifferenz im Rahmen der Spieldynamik untersucht.

A b s t r a c t

The aim of this paper is the comparison of the methods in the so-called "evolutionary game theory" used recently in theoretical biology with some aspects of the (human) noncooperative game theory and - if possible - the classification of some notions in that theory. Some needed results on noncooperative two-person games with incomplete information are specified and, in the first instance, symmetrical evolutionary games are introduced and supplied with a dynamic model.

The properties of the fixed points of this dynamic - - the "dynamic equilibria" - are compared with that of the Nash-equilibrium. As an example of application, the dynamic of the so-called generalized war of attrition is investigated further.

The dynamic of asymmetric conflicts and asymmetric dynamic equilibria are introduced in a similar way to the symmetric case. As an interesting special case, a situation of partial indifference is studied by means of the developped game dynamic.

INHALTSVERZEICHNIS

0. Einleitung

Um die Methoden der Mensch- und Tier-bezogenen Verhaltenswissenschaften zu vergleichen und - nicht zuletzt - auch voneinander abzugrenzen, scheint es von allgemeinerem Interesse zu sein, gewisse Modelle der theoretischen Biologie, die sich mit Evolution befassen und sich dabei spieltheoretischer Begriffe bedienen, mit den Konzepten der "klassischen" Spieltheorie, die ja menschliche Konflikte zu modellieren versucht, in Zusammenhang zu bringen.

Zu diesem Zwecke sei zunächst etwas näher auf die in neuerer Zeit vor allem in den angelsächsischen Ländern entwickelten und verbreiteten Zugänge zur Populationsgenetik eingegangen (einen leicht zugänglichen Überblick vermittelt [4]):

Die vielfach in der Natur beobachteten scheinbar altruistischen Verhaltensweisen der Individuen gewisser Tierarten wurden manchmal als Resultat der sogenannten "Gruppenselektion" erklärt, was bedeutete, daß sich nur diejenigen Gruppen von Individuen im Daseinskampf durchsetzen können, die genügend altruistisch veranlagte (manchmal sogar sich aufopfernde) Individuen umfassen. Diese Theorie erschien jedoch nicht unwiderlegbar, zumal sie die Existenz der "Gruppe" als Objekt der Evolution postulierte, was nicht unmittelbar einsichtig ist.

Die Theorie der "Genselektion" hingegen faßt das Verhalten der Individuen in gewissen Konfliktsituationen als durch ihre Erbanlagen bestimmt auf und meint, daß die Gene der Evolution unterworfen seien. Es könnte für ein Gen also durchaus vorteilhaft sein, ein altruistisches Verhalten des Individuums, das es in seinen Erbanlagen trägt, zu veranlassen, etwa indem sich dieses für seine nächsten Verwandten (die mit großer Wahrscheinlichkeit dasselbe Gen ebenso in ihren Erbanlagen haben) aufopfert. Die Gene kämpfen gewissermaßen "auf den Rücken der Individuen" ums Dasein.

Die aus einer Konfrontation zweier Individuen erwachsenden Vor- oder Nachteile für diese werden nun als Auszahlungen quantifiziert - womit bereits ein Fachausdruck aus der Spieltheorie gefallen ist. Weiters kann man etwa die (genetisch bestimmten) Verhaltensweisen mit (reinen) Strategien, Konfrontationen mit Partien des "Evolutionsspiels" oder Aufschlüsselungen der Bevölkerung bzw. des Genpools nach Verhaltensweisen bzw. Genen mit gemischten Strategien identifizieren. Diese und ähnliche Ansätze beruhen im wesentlichen auf der grundlegenden Arbeit [7] von J. Maynard Smith.

Um den Evolutionsprozeß zu modellieren, bedient man sich dynamischer Systeme, die (im Sinne des Evolutionsprinzips Darwins) gewährleisten, daß sich der Anteil eines Gens, das eine in gewissem Sinne vorteilhafte Auszahlung hervorruft, im Genpool vergrößert. Außerdem werden manche unter dieser Dynamik stationäre Bevölkerungszustände "evolutionär stabile Strategien" (ESS) genannt, man sieht also, daß eine ganze Reihe von spieltheoretischen Begriffen auftreten.

Eine grobe Klassifikation dieser "Evolutionsspiele" im Rahmen der Spieltheorie scheint leicht :

- Da nur Konfrontationen zwischen je zwei Individuen betrachtet werden, handelt es sich um Zweipersonenspiele.
- Da Tiere (und Gene) nicht verhandeln können, sind die Spiele nicht kooperativ.
- Da Gene kein Bewußtsein im üblichen Sinn besitzen, kann es auch keinerlei Informationsaustausch zwischen den "Spielern" geben - Spiele mit unvollständiger Information.

Hier sind wir auch schon bei einem sehr wichtigen Unterschied zwischen "tierischen" und "menschlichen" Spielen angelangt : Während die Evolution den status quo in der Natur nur durch zufällig auftretende Mutationen ändern kann, also ohne Ziel und Zweck verläuft, sodaß insbesondere die Gene (oder die Natur, je nachdem, wen man als Spieler im Evolutionsspiel auffaßt) keinerlei Vorstellungen über die Zukunft, also keinerlei Erwartungen über das Verhalten des Gegners haben können und demgemäß auch nicht "rational" handeln können im Sinne der Maximierung einer erwarteten Auszahlung, spielen in der "menschlichen" Spieltheorie solche Begriffe sehr wohl oft eine zentrale Rolle.

Insbesondere im Zusammenhang mit der dynamischen Modellierung ist es notwendig, diesen Unterschied nicht zu übersehen : Da bei der Evolution immer nur die Erfahrung der "letzten Partie(n)", also der letzten Konfrontation(en) maßgeblich ist bei der Veränderung im Genpool (also beim Auswechseln von (gemischten) Strategien eines Spielers (der Natur)) und außerdem immer nur die Auszahlungen an sich und nicht die an den Gegner entscheidend sein sollen, ist die evolutionäre Entwicklung einem Lernprozeß sehr ähnlich.

I. BIMATRIXSPIELE

I.1 Allgemeines, Gleichgewichtsbegriffe

Im folgenden sollen die Auszahlungsmatrizen für nicht-kooperative Zweipersonenspiele und der Begriff der Vorteilhaftigkeit von Strategien eingeführt sowie einige Gleichgewichtsbegriffe behandelt und deren für unsere Zwecke wichtige Eigenschaften abgeleitet werden.

Betrachten wir zwei Spieler, I und II genannt; I habe die Strategien $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$,dargestellt durch die Standardbasisvektoren $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_m$ im $\mathbb{R}^m$ und II die Strategien $\tau_1, \ldots, \tau_n$,dargestellt durch die Standardbasisvektoren $\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_n$ im $\mathbb{R}^n$ zur Verfügung.

Bezeichnen wir die Auszahlungen in der Situation, in der I σ_i und II τ_j spielt, mit a_{ij} für I und b_{ij} für II , so bilden

$$A = (a_{ij}) \qquad \text{bzw.} \qquad B = (b_{ij})$$

die Auszahlungsmatrizen für I bzw. II .

Spielt nun I $\sigma_i \triangleq \underline{e}_i$ gegen eine gemischte Strategie $\underline{y} = \sum_{j=1}^{n} y_j \underline{f}_j$ von II (dh. II spielt mit Wahrscheinlichkeit y_j die Strategie $\tau_j \triangleq \underline{f}_j$; also ist $y_j \geqq 0 \quad \forall j \in \{1,\ldots,n\}$ und $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$; dies ist gleichbedeutend mit $\underline{y} \in S^n =: \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n / x_j \geqq 0 , \sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \}$), so erhält er $\underline{e}_i . A\underline{y} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j$.

Spielt I statt $\sigma_i \triangleq \underline{e}_i$ ebenfalls eine gemischte Strategie $\underline{x} \in S^m$ (analog definiert; hier ist x_i die Wahrscheinlichkeit, daß I $\sigma_i \triangleq \underline{e}_i$ spielt), so erhält er

$$\underline{x}.A\underline{y} = \sum_{i,j=1}^{m,n} a_{ij} x_i y_j \quad \text{und II (analog)} \quad \underline{x}.B\underline{y} = \sum_{i,j=1}^{m,n} b_{ij} x_i y_j \ .$$

Spielt II schließlich statt $\underline{y}$ eine reine Strategie $\tau_j \triangleq \underline{f}_j$, so erhält dieser

$$\underline{x}.B\underline{f}_j = \sum_{i=1}^{m} b_{ij} x_i \quad \text{ausbezahlt.}$$

Nun können wir uns bereits der Frage der Vorteilhaftigkeit von Strategien zuwenden :

Eine reine Strategie $\underline{e}_i$ ist gegen eine Strategie $\underline{y}$ von II vorteilhaft für I gegenüber einer Strategie $\underline{x} \in S^m$, wenn

$$\underline{e}_i . A\underline{y} > \underline{x}.A\underline{y} \tag{I.1.1}$$

ist; ebenso ist für II gegen $\underline{x} \in S^m$ von I $\underline{f}_j$ vorteilhafter als $\underline{y}$, wenn gilt :

$$\underline{x}.B\underline{f}_j \;>\; \underline{x}.B\underline{y} \qquad (I.1.2)$$

Doch nun zu einigen allgemein gebräuchlichen Gleichgewichts-begriffen für nichtkooperative Zweipersonenspiele:

<u>Definition I.1.3</u> : Die (gemischten) Strategien $(\underline{p},\underline{q}) \in S^m \times S^n$ bilden ein "Nash-Gleichgewicht" (in Zeichen $(\underline{p},\underline{q}) \in \mathcal{E}$), falls

$$\underline{p}.A\underline{q} \;\geq\; \underline{x}.A\underline{q} \qquad \forall\, x \in S^m \qquad \text{und}$$

$$\underline{p}.B\underline{q} \;\geq\; \underline{p}.B\underline{y} \qquad \forall\, \underline{y} \in S^n \qquad \text{gilt, also}$$

wenn $\underline{p}$ beste Antwort auf $\underline{q}$ (für I) und
$\underline{q}$ beste Antwort auf $\underline{p}$ (für II) ist.

<u>Bezeichnung</u> : Sei $k \in \{m,n\}$ fest. Sei $I \subseteq \{1,\dots,k\}$; dann sei mit

$\Gamma_I =: \{\, \underline{x} \in S^k / \; x_i = 0 \quad \forall i \in \{1,\dots,k\} \setminus I \,\}$ und mit

$\mathring{\Gamma}_I =: \{\, \underline{x} \in \Gamma_I / \; x_i > 0 \quad \forall i \in I \,\}$ bezeichnet. Es gilt etwa

$\Gamma_{\{i\}} = \mathring{\Gamma}_{\{i\}} = \{\underline{e}_i\}$ (für $k = m$; für $k = n$ ist $\Gamma_{\{j\}} = \mathring{\Gamma}_{\{j\}} = \{\underline{f}_j\}$)

und $\Gamma_{\{1,\dots,m\}} = S^m$ (für $k = m$) .

Proposition I.1.4 : Seien $I \subseteq \{1,\dots,m\}$ und $J \subseteq \{1,\dots,n\}$;

dann gilt für $(\underline{p},\underline{q}) \in \mathring{\Gamma}_I \times \mathring{\Gamma}_J$:

$(\underline{p},\underline{q}) \in \mathcal{E} \iff$

$\iff$ $\underline{p}.A\underline{q} \geq \underline{e}_i.A\underline{q} \quad \forall i \in \{1,\dots,m\}$ und

$\underline{p}.B\underline{q} \geq \underline{p}.B\underline{f}_j \quad \forall j \in \{1,\dots,n\}$, wobei die Ungleichungen nur für $i \notin I$ bzw. $j \notin J$ strikt sein können.

Beweis: ("$\Rightarrow$") folgt aus I.1.3 ;

("$\Leftarrow$"): Ist $\underline{e}_i.A\underline{q} \leq \underline{p}.A\underline{q} \quad \forall i \in \{1,\dots,m\}$, so gilt für

$$\underline{x} \in S^m \; : \quad \underline{x}.A\underline{q} = \sum_{i=1}^{m} x_i \underline{e}_i.A\underline{q} \leq \sum_{i=1}^{m} x_i \underline{p}.A\underline{q} = \underline{p}.A\underline{q} \; ;$$

analog gilt $\underline{p}.B\underline{y} \leq \underline{p}.B\underline{q} \quad \forall \, \underline{y} \in S^n$.

Ist etwa $i \in I$, also (wegen $\underline{p} \in \mathring{\Gamma}_I$) $p_i > 0$, so muß $\underline{e}_i.A\underline{q} = \underline{p}.A\underline{q}$ gelten, da sonst

$$\underline{p}.A\underline{q} = \sum_{i=1}^{m} p_i \underline{e}_i.A\underline{q} < \sum_{i=1}^{m} p_i \underline{p}.A\underline{q} = \underline{p}.A\underline{q}$$ wäre, Wid(erspruch) !

$\square$

Korollar I.1.5 : Wenn $(\underline{p},\underline{q}) \in \mathring{\Gamma}_I \times \mathring{\Gamma}_J$ ein Nash-Gleichgewicht ist, so gilt

$$\underline{p}.A\underline{q} = \underline{x}.A\underline{q} \quad \forall \underline{x} \in \Gamma_I \text{ sowie}$$

$$\underline{p}.B\underline{q} = \underline{p}.B\underline{y} \quad \forall \underline{y} \in \Gamma_J \; .$$

Beweis: Wegen I.1.4 ist

$$\underline{x}.A\underline{q} = \sum_{i=1}^{m} x_i \underline{e}_i.A\underline{q} = \sum_{i=1}^{m} x_i \underline{p}.A\underline{q} = \underline{p}.A\underline{q} \quad \forall x \in \Gamma_I \quad \square .$$

Satz I.1.6 (Nash) : Es existiert mindestens ein Nash-Gleichgewicht :

$$\mathcal{E} \neq \emptyset$$

Beweis : siehe [8] !

Bezeichnung : Sei für $Y \subseteq S^n$ $N(Y) =: \{\underline{x} \in S^m / (\underline{x},\underline{y}) \in \mathcal{E} \ \forall \underline{y} \in Y\}$.

Bemerkung : Y stellt eine (meist endliche) Menge von (gemischten) Strategien von II dar. Analog definiert man für $X \subseteq S^m$ (endlich) :

$$N(X) =: \{\underline{y} \in S^n / (\underline{x},\underline{y}) \in \mathcal{E} \quad \forall \underline{x} \in X\} .$$

<u>Proposition I.1.7</u> : Sei $X \subseteq S^m$; dann gilt :

$$\forall\, \underline{y} \in N(X) \text{ ist } \underline{x}.A\underline{y} = v_A(\underline{y}) \quad \forall\, \underline{x} \in X \text{ und}$$

$$\forall\, \underline{x} \in X \text{ ist } \underline{x}.B\underline{y} = w_B(\underline{x}) \quad \forall\, \underline{y} \in N(X) \;;$$

analog : $Y \subseteq S^n$, $\underline{x} \in N(Y) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{x}.B\underline{y} = w_B(\underline{x}) \quad \forall\, \underline{y} \in Y \text{ und :}$$

$$\underline{y} \in Y \Rightarrow \underline{x}.A\underline{y} = v_A(\underline{y}) \quad \forall\, \underline{x} \in N(Y) \;.$$

<u>Beweis</u>: Sind $\underline{y}$, $\underline{z} \in N(X)$ und $\underline{x} \in X$,so ist (wegen $(\underline{x},\underline{y}) \in \mathcal{E}$) $\underline{x}.B\underline{y} \geq \underline{x}.B\underline{z}$ und (wegen $(\underline{x},\underline{z}) \in \mathcal{E}$) $\underline{x}.B\underline{z} \geq \underline{x}.B\underline{y}$ □

<u>Proposition I.1.8</u> : Für $Y \subseteq S^n$ mit $N(Y) \neq \emptyset$ ist $N(Y)$ kompakt und konvex. (Analoges gilt für $N(X)$, $X \subseteq S^m$).

<u>Beweis</u>: Sind $\underline{x}$, $\underline{x}' \in N(Y)$ und $\lambda \in [0,1]$, so gilt wegen I.1.7
$(\lambda\underline{x} + (1-\lambda)\underline{x}').A\underline{y} = \lambda v_A(\underline{y}) + (1-\lambda)v_A(\underline{y}) = v_A(\underline{y}) \geq \underline{x}''.A\underline{y}$
für alle $\underline{x}'' \in S^m$ und zwar für jedes $\underline{y} \in Y$; ebenso ist für $\underline{z} \in S^n$
$(\lambda\underline{x} + (1-\lambda)\underline{x}').B\underline{y} = \lambda\underline{x}.B\underline{y} + (1-\lambda)\underline{x}'.B\underline{y} \geq \lambda\underline{x}.B\underline{z} + (1-\lambda)\underline{x}'.B\underline{z} =$
$= (\lambda\underline{x} + (1-\lambda)\underline{x}').B\underline{z} \quad \forall\, \underline{y} \in Y$, was $(\lambda\underline{x} + (1-\lambda)\underline{x}',\underline{y}) \in \mathcal{E} \;\forall \underline{y} \in Y$,
also $\lambda\underline{x} + (1-\lambda)\underline{x}' \in N(Y)$ beweist; deshalb ist $N(Y)$ konvex .

Sind $\underline{x}(n) \in N(Y)\ \forall n \in \mathbb{N}$ und $\underline{x}(n) \to \underline{x} \in \mathbb{R}^m$ für $n \to \infty$,
so ist $\underline{x}.A\underline{y} = \lim_{n\to\infty} \underline{x}(n).A\underline{y} \geq \underline{x}''.A\underline{y} \quad \forall\, \underline{x}'' \in S^m$ und ebenso
$\underline{x}.B\underline{y} = \lim_{n\to\infty} \underline{x}(n).B\underline{y} \geq \lim_{n\to\infty} \underline{x}(n).B\underline{z} = \underline{x}.B\underline{z} \;\forall \underline{z} \in S^n$, also
(da ja $\underline{x} \in S^m$, weil $N(Y) \subseteq S^m$ und S^m kompakt ist) $(\underline{x},\underline{y}) \in \mathcal{E}$
für alle $\underline{y} \in Y$, also auch $\underline{x} \in N(Y)$, was die Abgeschlossenheit
von $N(Y)$ zeigt; wegen $N(Y) \subseteq S^m$ ist daher $N(Y)$ kompakt □

<u>Definition I.1.9</u> : Sei S konvex; $\underline{x} \in S$ heißt "Extremalpunkt von S " ($\underline{x} \in \operatorname{Ext} S$) , wenn $S \setminus \{\underline{x}\}$ konvex ist.

<u>Proposition I.1.10</u> : Es gilt $\underline{x} \in \operatorname{Ext}(S) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ ($\underline{y}, \underline{z} \in S$ mit $\underline{y} \neq \underline{z}$, $\lambda \in [0,1]$ mit
$\underline{x} = \lambda \underline{y} + (1-\lambda)\underline{z} \Rightarrow \lambda \in \{0,1\}$).

<u>Beweis</u>: (" $\Rightarrow$") : Sei $\underline{x} = \lambda \underline{y} + (1-\lambda)\underline{z}$, $\lambda \in [0,1]$, $\underline{y}$, $\underline{z} \in S$ mit $\underline{y} \neq \underline{z}$; wäre $\lambda \in]0,1[$, so gälte $\underline{x} \notin \{\underline{y},\underline{z}\}$, also $\{\underline{y},\underline{z}\} \subseteq S \setminus \{\underline{x}\}$, ein Wid. zu $S \setminus \{\underline{x}\}$ konvex !

(" $\Leftarrow$ ") : Seien $\underline{y}$, $\underline{z} \in S \setminus \{\underline{x}\}$, ohne Beschränkung der Allgemeinheit (oBdA) $\underline{y} \neq \underline{z}$ und $\lambda \in]0,1[$ (ebenfalls oBdA) ; dann muß nach Voraussetzung $\lambda \underline{y} + (1-\lambda)\underline{z} \in S \setminus \{\underline{x}\}$ sein, also ist $S \setminus \{\underline{x}\}$ konvex und daher $\underline{x} \in \operatorname{Ext} S$ $\square$.

<u>Definition I.1.11</u> : $\underline{x} \in \operatorname{Ext} N(Y)$ heißt "V-extremale Strategie für I gegen Y " (hier ist $Y = \{\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_k\} \subseteq S^n$ mit $N(Y) \neq \emptyset$).
Ebenso heißt $\underline{y} \in \operatorname{Ext} N(X)$ ($N(X) \neq \emptyset$, $X = \{\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_\ell\} \subseteq S^m$) "V-extremale Strategie für II gegen X " .

<u>Satz I.1.12</u> : Es gibt nur endlich viele V-extremale Strategien für I und II. (Bezeichnen wir diese mit X_V bzw. Y_V)

Beweis : siehe [8] !

Bemerkung : Daß es überhaupt V-extremale Strategien gibt, ergibt sich aus folgender Überlegung :

Proposition I.1.13 : Es gilt $X_V \neq \emptyset$ und $Y_V \neq \emptyset$.

Beweis : Da es nach I.1.6 $\underline{x} \in S^m$, $\underline{y} \in S^n$ gibt mit $(\underline{x},\underline{y}) \in \mathcal{E}$, also etwa $\underline{x} \in N(\{\underline{y}\})$ ist, ist $N(\{\underline{y}\}) \neq \emptyset$ und damit nach I.1.8 kompakt und konvex; deshalb ist (siehe etwa [6] !) Ext $N(\{\underline{y}\}) \neq \emptyset$ und somit $X_V \neq \emptyset$. Ebenso gilt $Y_V \supseteq \text{Ext } N(\{\underline{x}\}) \neq \emptyset$ wegen $\underline{y} \in N(\{\underline{x}\})$.

$\square$

Den "globalen" Zusammenhang zwischen Nash-Gleichgewichten und V-extremalen Strategien wird der folgende Satz erhellen; zuvor jedoch die dazu nötige

Definition I.1.14 : Sei $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ beliebig ; dann wird mit co(Y) die von Y erzeugte konvexe Menge bezeichnet.

Bemerkung : Es gilt $co(Y) = \{\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \underline{y}_i \,/\, \lambda_i \geq 0 \,, \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1 \,,\ \underline{y}_i \in Y \,,\ N \in \mathbb{N}\}$ und, wenn Y kompakt und konvex sowie Ext Y kompakt ist, co (Ext Y) = Y (Satz von Krein,Milman, siehe etwa [6]).

<u>Satz I.1.15</u> : Es gilt :

$$\mathcal{E} = \bigcup_{Y \subseteq Y_V} \left(N(Y) \times co(Y) \right).$$

<u>Beweis</u> : (i) Seien $(\underline{x}', \underline{y}') \in \mathcal{E} \Rightarrow N(\{\underline{x}'\}) \neq \emptyset$ ($\underline{y}' \in N(\{\underline{x}'\})$!) $\Rightarrow Y =: \text{Ext}\ N(\{\underline{x}'\}) \subseteq Y_V \cap N(\{\underline{x}'\})$, also ist Y kompakt, da endlich, weswegen nach obiger Bemerkung $co(Y) = co(\text{Ext}\ N(\{\underline{x}'\})) = N(\{\underline{x}'\})$, also $\underline{y}' \in N(\{\underline{x}'\}) = co(Y)$ ist; wegen $Y \subseteq N(\{\underline{x}'\})$ und I.1.7 ist $\underline{x}' \in N(Y)$: in der Tat ist $(\underline{x}', \underline{y}) \in \mathcal{E}, \underline{y} \in Y$; deshalb gilt $(\underline{x}', \underline{y}') \in N(Y) \times co(Y)$, was zu zeigen war.

(ii) Seien umgekehrt $\underline{y}' \in co(Y)$, $\underline{x}' \in N(Y)$, $Y \subseteq Y_V$; klarerweise ist dann $Y \subseteq N(\{\underline{x}'\})$, weswegen $\underline{y}' \in co(Y) \subseteq co(N(\{\underline{x}'\})) = N(\{\underline{x}'\})$, also $(\underline{x}', \underline{y}') \in \mathcal{E}$ ist. □

Nun wollen wir einige Bedingungen für total gemischte Strategien, die Bestandteil eines Gleichgewichts sind, untersuchen :

<u>Bezeichnung</u> : Sei mit $\mathring{S}^k =: \mathring{\Gamma}_{\{1,\dots,k\}}$ die Menge der total gemischten Strategien (von I für $k = m$ bzw. von II für $k = n$) bezeichnet.
Allgemein sei weiters $\partial\Gamma_I =: \Gamma_I \setminus \mathring{\Gamma}_I$

<u>Satz I.1.16</u> : Sei $(\underline{x}_o,\underline{y}_o) \in \mathcal{E}$, wobei $\underline{x}_o.B\underline{y}_o = 0$ und $N(\{\underline{y}_o\}) \subseteq \overset{\circ}{S}{}^m$; dann gilt :

$$\mathrm{rang}(B) \in \{m-1, m\} \text{ , wobei für } \mathrm{rang}(B) = m-1$$

$$N(\{\underline{y}_o\}) = \{\underline{x}_o\} \quad \text{sein muß .}$$

<u>Beweis</u> : Wegen $\underline{x}_o \in N(\{\underline{y}_o\}) \subseteq \overset{\circ}{S}{}^m$ und I.1.5 gilt
$\underline{x}.A\underline{y}_o = \underline{x}_o.A\underline{y}_o \quad \forall \underline{x} \in S^m$.

Es ist $\mathrm{rang}(B) \leq m$; wäre $\mathrm{rang}(B) \leq m-2$, so existierte ein von $\underline{x}_o$ linear unabhängiges $\underline{z} \in \mathbb{R}^m$ mit $B^t.\underline{z} = \underline{0}$.
(B^t bezeichne die zu B transponierte Matrix)

oBdA sei $\sum_{i=1}^{m} z_i \in \{0,1\}$.

<u>Fall a.)</u> $\qquad \sum_{i=1}^{m} z_i = 0$

Sei $\underline{x}' =: \underline{x}_o - \lambda \underline{z}$, wobei $1/\lambda = \max_i z_i/x_i^o \in \mathbb{R}$ ist; dann

gilt $\underline{x}' \in \partial S^m$, da $z_i/x_i = 1/\lambda \Rightarrow x_i' = x_i^o - \frac{x_i^o}{z_i} z_i = 0$ und

$$x_j' = x_j^o - \lambda z_j = \left\{ \begin{array}{ll} = x_j^o \geqslant 0 & \text{für } z_j = 0 \\[2ex] \geq x_j^o - \frac{x_j^o}{z_j} z_j = 0 & \text{sonst} \end{array} \right\} \geq 0$$

sowie $\sum_{i=1}^{m} x_i' = \sum_{i=1}^{m} x_i^o - \lambda \sum_{i=1}^{m} z_i = 1 - 0 = 1$.
Aber $(\underline{x}',\underline{y}_o) \in \mathcal{E}$, da $\underline{x}'.A\underline{y}_o = \underline{x}_o.A\underline{y}_o$ und
$\underline{x}'.B\underline{y}_o = \underline{x}_o.B\underline{y}_o - \lambda \underline{z}.B\underline{y}_o = \underline{x}_o.B\underline{y}_o - \lambda 0 \geq \underline{x}_o.B\underline{y} - \underline{z}.B\underline{y} =$
$= \underline{x}'.B\underline{y} \quad \forall \underline{y} \in S^n$. Also wäre $\underline{x}' \in N(\{\underline{y}_o\}) \cap \partial S^m$, Wid. !

Fall b.) $\sum_{i=1}^{m} z_i = 1$

Sei $\underline{x}'' =: (1+\lambda)\underline{x}_o - \lambda\underline{z}$, wobei $1 + 1/\lambda = \max_i z_i/x_i^o > 1$.
Dann ist $x_i'' = (1+\lambda)x_i^o - \lambda z_i = \lambda((1+1/\lambda)x_i^o - z_i) \geqq$

$\geqq \lambda(\frac{z_i}{x_i^o} x_i^o - z_i) = 0$ sowie $\sum_{i=1}^{m} x''_i = (1+\lambda)\sum_{i=1}^{m} x_i^o - \sum_{i=1}^{m} z_i = 1$,

also $\underline{x}'' \in S^m$; aber wieder wäre $\underline{x}'' \in N(\{\underline{y}_o\}) \cap \partial S^m$ Wid. !

Deshalb muß rang(B) $\geq$ m-1 sein; wenn rang(B) = m-1 , dann gibt es (bis auf Skalarmultiplikation) genau eine Lösung $\underline{z} \in \mathbb{R}^m$ von $B^t\underline{z} = \underline{0}$; wenn $\underline{z}$ von $\underline{x}_o$ linear unabhängig wäre, dann erhielte man einen Wid. wie oben; deshalb ist auch $\underline{x}_o = \underline{z}$ eine Lösung von $B^t\underline{z} = \underline{0}$, also $B^t\underline{x}_o = \underline{0}$; wäre $(\underline{z},\underline{y}_o) \in \mathcal{E}$, dann gälte $\underline{z}.B\underline{y}_o = \underline{x}_o.B\underline{y}_o = 0$, also $B^t\underline{z} = \underline{0}$; deshalb muß $\underline{z} = \underline{x}_o$, also $N(\{\underline{y}_o\}) = \{\underline{x}_o\}$ sein. $\square$

<u>Satz I.1.17</u> : Ist m > n , so gilt für $(\underline{x}_o,\underline{y}_o) \in \mathcal{E}$:

$$N(\{\underline{y}_o\}) \cap \partial S^m \neq \emptyset ,$$

es muß also eine nicht total gemischte Strategie $\underline{x}$ von I geben, die mit $\underline{y}_o$ ein Nash-Gleichgewicht bildet.

<u>Beweis</u> : (i) Sei E die m×n-Matrix, die alle Eintragungen = 1 hat; sei $B' =: B - (\underline{x}_o.B\underline{y}_o)E$; dann stimmen die Nash--Gleichgewichte von (A,B) und von (A,B′) klarerweise überein und es gilt $\underline{x}_o.B'\underline{y}_o = 0$; also kann man oBdA $\underline{x}_o.B\underline{y}_o = 0$ voraussetzen.

(ii) Angenommen, $N(\{\underline{y}_o\}) \subseteq \overset{\circ}{S}{}^m$; nach I.1.16 muß daher $m-1 \leq \text{rang}(B) \leq n < m$ gelten, also $n = m-1 = \text{rang}(B)$ sein. Wieder nach I.1.16 ist daher $B^t \underline{x}_o = \underline{0}$; oBdA ist

$$\tilde{B} =: \begin{bmatrix} b_{11}, \ldots, b_{1n} \\ \\ \\ b_{n1}, \ldots, b_{nn} \end{bmatrix} \text{ nichtsingulär, es existiert also}$$

eine Lösung $\underline{p} = [p_1, \ldots, p_n] \neq \underline{0}$ von $\tilde{B}^t \underline{z} = \underline{e} =: [1, \ldots, 1]$; sei $\underline{p}' =: [p_1, \ldots, p_n, 0] \in \mathbb{R}^m \Rightarrow B^t \underline{p}' = \underline{e}$; wegen $p'_m = 0 \neq x^o_m$ und $\underline{p}' \neq \underline{0}$ ist $\underline{p}'$ von $\underline{x}_o$ linear unabhängig , wie in I.1.16 kann man daraus auf die Existenz eines $\underline{x}' \in \partial S^m \cap N(\{\underline{y}_o\})$ schließen, ein Wid. zu $N(\{\underline{y}_o\}) \subseteq \overset{\circ}{S}{}^m$! $\square$

<u>Satz I.1.18</u> : Ist $(\underline{x}_o, \underline{y}_o) \in \mathcal{E}$ mit $\underline{y}_o \in \partial S^n$, so gilt ebenfalls

$$N(\{\underline{y}_o\}) \cap \partial S^m \neq \emptyset ,$$

wieder muß also eine nicht total gemischte Strategie $\underline{x}$ von I existieren, die mit $\underline{y}_o$ ein Nash-Gleichgewicht bildet.

Beweis : oBdA sei $\underline{x}_o.B\underline{y}_o = 0$ (siehe I.1.17(i) !); weiters sei oBdA $y_n^o = 0$; seien $\underline{y}' =: [y_1^o, \ldots, y_{n-1}^o] \in S^{n-1}$ sowie

$$A' =: \begin{bmatrix} a_{11}, \ldots, a_{1,n-1} \\ \\ \\ a_{m1}, \ldots, a_{m,n-1} \end{bmatrix} \qquad B' =: \begin{bmatrix} b_{11}, \ldots, b_{1,n-1} \\ \\ \\ b_{m1}, \ldots, b_{m,n-1} \end{bmatrix}$$

Angenommen, $N(\{\underline{y}_o\}) \subseteq \overset{o}{S}{}^m \Rightarrow \underline{x}_o \in \overset{o}{S}{}^m \Rightarrow A'\underline{y}' = A\underline{y}_o = (\underline{x}_o.A\underline{y}_o)\underline{e}$, $\underline{x}_o.B'\underline{e}_j = \underline{x}_o B\underline{e}_j \leq 0 \ \forall j \in \{1,\ldots,n-1\}$;
ist ein $\underline{x}_o.B'\underline{e}_j < 0$, $j \in \{1,\ldots,n-1\}$, so gilt $y_j' = y_j^o = 0$, also ist $(\underline{x}_o,\underline{y}')$ ein Nash-Gleichgewicht für (A',B') , da :

$$A'\underline{y}' = (\underline{x}_o.A\underline{y}_o)\underline{e} \ , \ \underline{x}_o.B'\underline{y}' = \sum_{j=1}^{n-1} \underline{x}_o.B'\underline{e}_j y_j^o \text{ (siehe oben!) } = 0$$

$\geq \underline{x}_o.B'\underline{y}'' \ \forall \underline{y}'' \in S^{n-1}$.

Wegen $\underline{x}_o.B'\underline{y}' = 0$ existiert ein $x' \in \partial S^m$ sodaß (x',y') ein Nash-Gleichgewicht für (A',B') ist (I.1.16) ;
ist $0 > \underline{x}'.B'\underline{e}_j = \underline{x}'.B\underline{e}_j$, so muß wiederum $y_j^o = y_j' = 0$, also $\underline{x}'.B'\underline{y}' = 0$ sein. $(\underline{x}',\underline{y}_o)$ ist ein Nash-Gleichgewicht für (A,B) , da : $A\underline{y}_o = (\underline{x}_o.A\underline{y}_o)\underline{e}$; $\underline{x}'.B\underline{y}_o = (\underline{x}'.B\underline{e}_n)y_n^o +$
$+ \underline{x}'.B'\underline{y}' = 0 = \underline{x}_o.B\underline{y}_o \geq \underline{x}.B\underline{y}_o \quad \forall x \in S^m$.

Also ist $\underline{x}' \in N(\{\underline{y}_o\}) \cap \partial S^m$, ein Wid. ! $\square$

Satz I.1.19 : Ist $\mathcal{E} \subseteq \overset{\circ}{S}{}^m \times \overset{\circ}{S}{}^n$,(gibt es also nur Nash-Gleichgewichte, die sich aus total gemischten Strategien zusammensetzen,) so gilt :

$m = n$ (I und II haben gleich viele Strategien zur Verfügung , A und B sind quadratisch) sowie

es gibt genau ein Nash-Gleichgewicht, $\mathcal{E} = \{(\underline{x}_o, \underline{y}_o)\}$.

Beweis : Wegen I.1.17 muß $m = n$ sein; seien $(\underline{x}_o, \underline{y}_o) \in \mathcal{E}$; oBdA sei $\underline{x}_o . B\underline{y}_o = 0$; da nach I.1.16 $\mathrm{rang}(B) \in \{n-1, n\}$ gilt, (und $\underline{y}_o \in \overset{\circ}{S}{}^n$ ist), muß wegen $B^t\underline{x}_o = \underline{0}$, $\underline{x}_o \neq \underline{0}$ $\mathrm{rang}(B) = n-1$ sein; deshalb gilt $N(\{\underline{y}_o\}) = \{\underline{x}_o\}$ (vgl. I.1.16 !). Seien $(\underline{x}', \underline{y}') \in \mathcal{E}$ beliebig; wegen $\underline{x}', \underline{y}' \in \overset{\circ}{S}{}^n$ und I.1.4 gilt also $A\underline{y}' = (\underline{x}'.A\underline{y}')\underline{e}$, $B^t\underline{x}' = (\underline{x}'.B\underline{y}')\underline{e}$, sodaß auch $(\underline{x}', \underline{y}_o) \in \mathcal{E}$ und $(\underline{x}_o, \underline{y}') \in \mathcal{E}$ gelten muß; nach ähnlichen Überlegungen wie in I.1.16 folgt nun $\underline{x}' = \underline{x}_o$ sowie analog $\underline{y}' = \underline{y}_o$, also $\mathcal{E} = \{(\underline{x}_o, \underline{y}_o)\}$. □

I.2 Strategien-Symmetrie

Betrachten wir nun eine Situation, in der beide Spieler die gleichen (reinen) Strategien zur Verfügung haben (etwa ein - faires - Duell oder eine Versteigerung) :

Da sich verschiedene Strategien in unserem Ansatz immer nur durch verschiedene Auszahlungen voneinander unterscheiden können, muß also folgendes gelten, wenn I σ_i und II $\tau_j = \sigma_j$ spielt :

I erhält (wie früher) a_{ij} und

II erhält $b_{ij} = a_{ji}$. (I.2.1)

Es gilt also $B = A^t$, (I.2.2)

wobei (wie schon früher) A^t die Matrix bedeutet, die man durch Transponieren der Matrix A erhält.

<u>Bemerkung</u> : Konsequenterweise müßte man ebenso zwischen Zeilen- ($\underline{x}^t$) und Spaltenvektoren ($\underline{y}$) unterscheiden. Dies wäre jedoch nur beim inneren Produkt $\underline{x}.\underline{y} =: \underline{x}^t\underline{y}$ wichtig, wo wir vor den Punkt den Zeilen- und danach den Spaltenvektor schreiben und somit bequemerweise auf das "t" verzichten können.

Proposition I.2.1 : Es gilt für $(\underline{p},\underline{q}) \in \mathring{\Gamma}_I \times \mathring{\Gamma}_J$:

$$(\underline{p},\underline{q}) \text{ ist Nash-Gleichgewicht für } (A,A^t) \iff$$

$$\iff \quad \underline{e}_i.A\underline{q} \leq \underline{p}.A\underline{q} \quad \forall i \in \{1,\dots,n\} \text{ und}$$

$$\underline{e}_j.A\underline{p} \leq \underline{q}.A\underline{p} \quad \forall j \in \{1,\dots,n\} ,$$

wobei obige Ungleichungen nur für $i \notin I$ bzw. $j \notin J$ strikt sein können.

Beweis : folgt unmittelbar aus I.1.4 sowie aus $\underline{x}.A\underline{y} = \underline{y}.A^t\underline{x}$.

$\square$

Satz I.2.2 : Sei $(\underline{p},\underline{q}) \in \mathring{\Gamma}_I \times \mathring{\Gamma}_I$ ein Nash-Gleichgewicht für das Strategien-symmetrische Spiel (A,A^t) ; dann sind auch

$(\underline{p},\underline{p})$, $(\underline{q},\underline{q})$ sowie $(\underline{q},\underline{p})$
Nash-Gleichgewichte für (A,A^t) .

Beweis : Wegen I.2.1 und I.1.5 gilt $\underline{p}.A\underline{p} = \underline{q}.A\underline{p} \geq \underline{e}_i.A\underline{p}$ sowie $\underline{q}.A\underline{q} = \underline{p}.A\underline{q} \geq \underline{e}_i.A\underline{q}$ $\forall i \in \{1,\dots,n\}$; jetzt wieder I.2.1 (für $(\underline{p},\underline{p})$,$(\underline{q},\underline{q})$ und - direkt - für $(\underline{q},\underline{p})$) anwenden !

$\square$

Korollar I.2.3 : Ist für (A,A^t) $\mathcal{E} \subseteq \mathring{S}^n \times \mathring{S}^n$, so gilt :

$$\mathcal{E} = \{(\underline{p},\underline{p})\} \quad , \quad \underline{p} \in \mathring{S}^n .$$

Beweis : folgt unmittelbar aus I.2.2 und aus I.1.19 ! $\square$

Bemerkung : Im folgenden nennen wir der Bequemlichkeit halber bereits $\underline{p} \in S^n$ ein Nash-Gleichgewicht, wenn $(\underline{p},\underline{p})$ ein Nash-Gleichgewicht für (A,A^t) ist.

II. EVOLUTIONS- UND LERNSPIELE

II.1 Vorbemerkungen; gemischte Strategien und Bevölkerungen.

Ausdrücklich möge an dieser Stelle betont werden, daß hier nicht einem vulgären Sozialdarwinismus das Wort geredet werden soll.

Daß in der Evolutionstheorie etwa Mendelsche Vererbungsvorgänge auf genetischer Ebene eine wesentliche Rolle bei einer strategisch-spieltheoretischen Modellierung von Tierkonflikten spielen können, wird unter anderem in [2] gezeigt.

Im Sinne einer aus Gründen der Übersichtlichkeit von dieser Problematik "losgelösten" Betrachtungsweise einiger gemeinsamer Aspekte verschiedener individuell-rationaler Konfliktmodelle sollte es ab nun nicht mehr notwendig sein, auf die Unterschiede zwischen hauptsächlich durch Evolution erklärbaren Vorgängen in der Natur und den durch menschliche (Inter-)Aktion in der Gesellschaft entstandenen Situationen hinzuweisen.

Wenden wir uns wieder der Evolutionstheorie zu :
Gehen wir davon aus, daß die (genetisch bestimmten) Verhaltensweisen durch reine Strategien dargestellt werden; ein Individuum

kann folglich (zeit seines Lebens) immer nur eine reine Strategie spielen, sehr zum Unterschied eines menschlichen Spielers in der Spieltheorie. Jedoch kommt auch dem Begriff der gemischten Strategie eine Bedeutung zu, nämlich dann, wenn man ganze Bevölkerungen betrachtet, wie dies in der evolutionären Spieltheorie geschieht :

Bezeichnet man etwa mit x_i die relative Häufigkeit der σ_i spielenden Individuen in der Bevölkerung I und mit y_j die der τ_j-spielenden Individuen in der Bevölkerung II , so stellen

$$\underline{x} = [x_1,\dots,x_m] \in S^m \quad \text{bzw.} \quad \underline{y} = [y_1,\dots,y_n] \in S^n$$

Beschreibungen der Bevölkerungszustände dar.

Faßt man nun als Spieler die Bevölkerungen I , II auf, so kann man $\underline{x}$ als gemischte Strategie von I und
$\underline{y}$ als gemischte Strategie von II interpretieren.

Die Auszahlung $\underline{x}.A\underline{y}$ wäre dann eine mittlere Auszahlung für ein willkürlich aus der Bevölkerung I herausgegriffenes Individuum im Bevölkerungszustand $(\underline{x},\underline{y})$ und $\underline{e}_i.A\underline{y}$ die mittlere Auszahlung für ein σ_i spielendes Individuum :
In der Tat hat ein solches Gegner aus der Bevölkerung II vor sich, in der "mit Wahrscheinlichkeit" y_j τ_j-Spieler vorkommen; im Mittel wird es daher

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j = \underline{e}_i.A\underline{y} \quad \text{bekommen.}$$

Das Auszahlungsmittel innerhalb der Bevölkerung I ist dann natürlich durch

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \right) = \underline{x}.A\underline{y} \quad \text{gegeben.}$$

Ebenso ist $\underline{x}.B\underline{f}_j$ die mittlere Auszahlung für einen τ_j-Spieler in der Bevölkerung II und $\underline{x}.B\underline{y}$ die mittlere Auszahlung innerhalb dieser Bevölkerung im Zustand $(\underline{x},\underline{y})$.

Die Vorteil-Relationen (I.1.1) bzw. (I.1.2) sind nun so zu verstehen, daß (wenn $\underline{e}_i$ für I vorteilhafter als $\underline{x}$ gegen $\underline{y}$ ist) ein σ_i spielendes Individuum der Bevölkerung I im Zustand $(\underline{x},\underline{y})$ im Mittel mehr bekommt als seine "Mit-Individuen" in dieser Bevölkerung, es wird also der jeweiligen Situation besser angepaßt sein. Nach dem Selektionsprinzip müßte also der Anteil der σ_i-Spieler in I wachsen; in einem dynamischen Evolutionsmodell sollte also die Relation (I.1.1) ein Anwachsen von x_i nach sich ziehen, ebenso wie aus der Relation (I.1.2) ein Wachstum von y_j folgen müßte.

Zurück zur menschlichen Spieltheorie : da eine gemischte Strategie $\underline{x} \in S^m$ von I nichts anderes als eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über der Menge der reinen Strategien $\{\sigma_1,\ldots,\sigma_m\}$ von I ist, kann man sich das Spielen von $\underline{x}$ als das anteilsmäßige Anwenden der reinen Strategie σ_i entsprechend der Größe von x_i bei einer oftmaligen Wiederholung des Spieles vorstellen, man interpretiert also die Wahrscheinlichkeit x_i als Approximation für die relative Häufigkeit der Verwendung von σ_i durch I. Ist nun die Strategie σ_i gegen eine Strategie $\underline{y}$ von II für I vorteilhafter gegenüber der gemischten Strategie $\underline{x}$, so könnte I im Rahmen eines Lernprozesses diese gemischte Strategie dahingehend umändern, daß er den Anteil x_i an σ_i erhöht.

Man sieht also, daß eine dynamische Modellierung eines spieltheoretischen Lernprozesses genau die gleichen Eigenschaften haben sollte wie die eines Evolutionsspiels.

II.2 Symmetrische Konflikte und evolutionär stabile Strategien

Bei symmetrischen Konflikten in der Evolutionstheorie geht man nicht wie bisher von zwei, sondern nur von einer Bevölkerung aus, die - als Spieler aufgefaßt - gegen sich selbst spielt; klarerweise herrscht in einer solchen Situation die oben beschriebene Strategien-Symmetrie.

Ein analoges Szenario in der menschlichen Spieltheorie wäre etwa ein Spiel, bei dem sich die Spieler ihren Gegner als ihr Ebenbild vorstellen und danach ihre Strategien auswählen. Jedenfalls erscheint eine eingehendere Behandlung dieser Spieltypen bereits durch die vielfältige Verwendung spieltheoretischer Begriffe in der Evolutionstheorie gerechtfertigt. Einer dieser Begriffe ist die evolutionär stabile Strategie, die, wie schon oben ausgeführt, einer Beschreibung des Bevölkerungszustandes gleichkommt, weshalb eine ESS manchmal auch "evolutionär stabile Bevölkerung" genannt wird :

<u>Definition II.2.1</u> : Eine (gemischte) Strategie $\underline{p} \in S^n$ heißt "evolutionär stabil", wenn gilt :

(i) $\underline{x}.A\underline{p} \leq \underline{p}.A\underline{p} \quad \forall x \in S^n$

(ii) $\underline{x}.A\underline{p} = \underline{p}.A\underline{p}\ ,\ \underline{p} \neq \underline{x} \quad \Rightarrow \quad \underline{x}.A\underline{x} < \underline{p}.A\underline{x}$.

<u>Bemerkung</u> : Die Gleichgewichtsbedingung II.2.1(i) ist äquivalent zur Aussage : $\underline{p}$ ist ein Nash-Gleichgewicht für das Spiel (A, A^t) .

Die Stabilitätsbedingung II.2.1(ii) bedeutet, daß jede andere gemischte Strategie, die gegen $\underline{p}$ die gleiche (beste) Auszahlung erzielt wie $\underline{p}$, gegen sich selbst gegenüber $\underline{p}$ im Nachteil ist.

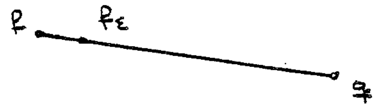
Die Bedeutung der ESS besteht darin, daß (genügend) kleine Änderungen in der Bevölkerungsstruktur keinen Vorteil für die Mutanten bringen dürfen :

<u>Satz II.2.2</u> : $\underline{p} \in S^n$ ist genau dann eine ESS , wenn gilt :

$\forall\, \underline{q} \in S^n \setminus \{\underline{p}\} \quad \exists\ \varepsilon_o(q) > 0$ sodaß für $\underline{p}_\varepsilon =: (1-\varepsilon)\underline{p} + \varepsilon\underline{q}$ gilt :

$$\underline{p}.A\underline{p}_\varepsilon > \underline{q}.A\underline{p}_\varepsilon \quad \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_o(q)[\ .$$

<u>Beweis</u> : Die Beziehung zwischen $\underline{p}$, $\underline{q}$ und $\underline{p}_\varepsilon$ veranschaulicht



Bemerken wir zunächst, daß folgende Äquivalenzen gelten :

$$\underline{p}.A\underline{p}_\varepsilon > \underline{q}.A\underline{p}_\varepsilon \iff \underline{p}.A\underline{p} - \varepsilon\underline{p}.A\underline{p} + \varepsilon\underline{p}.A\underline{q} > \underline{q}.A\underline{p} - \varepsilon\underline{q}.A\underline{p} + \varepsilon\underline{q}.A\underline{q} \iff$$

$$\iff (1-\varepsilon)(\underline{p}.A\underline{p} - \underline{q}.A\underline{p}) + \varepsilon(\underline{p}.A\underline{q} - \underline{q}.A\underline{q}) > 0 \qquad (*)$$

(" $\Rightarrow$") Da $\underline{p}$ ESS ist, gilt $\underline{p}.A\underline{p} \geq \underline{q}.A\underline{p}$ und : $\underline{p}.A\underline{p} = \underline{q}.A\underline{p}$, $\underline{p} \neq \underline{q}$ $\Rightarrow$ $\underline{p}.A\underline{q} > \underline{q}.A\underline{q}$; ist also $\underline{p}.A\underline{p} = \underline{q}.A\underline{p}$, $\underline{p} \neq \underline{q}$, so muß (*) erfüllt sein $\forall\ \varepsilon > 0$; wähle etwa $\varepsilon_0(\underline{q}) = 1$.
Ist jedoch $\underline{q}.A\underline{p} < \underline{p}.A\underline{p}$, so wähle $\varepsilon_0(\underline{q}) = \min\{1,r\}$,
wobei $r =: (\underline{p}.A\underline{p} - \underline{q}.A\underline{p})/(\underline{p}.A\underline{p} - \underline{q}.A\underline{p} - \underline{p}.A\underline{q} + \underline{q}.A\underline{q})$,
falls der Nenner positiv ist, ansonsten $r =: 2$.

Wie man sich leicht überlegt, erfüllen die so bestimmten $\varepsilon_0(\underline{q})$ die Behauptung.

("$\Leftarrow$ ") Umgekehrt erhält man aus der Voraussetzung durch Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ + die Gleichgewichtsbedingung II.2.1(i), da klarerweise $\underline{p}_\varepsilon \to \underline{p}$ für $\varepsilon \to 0$. Ist $\underline{q}.A\underline{p} = \underline{p}.A\underline{p}$, $\underline{p} \neq \underline{q}$, so ergibt sich, da (*) für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ erfüllt sein muß, die Stabilitätsbedingung II.2.1(ii). □

Eine weitere Eigenschaft von ESS zeigt

Satz II.2.3 : $\underline{p} \in S^n$ ist genau dann eine ESS, wenn es eine Umgebung U von $\underline{p}$ in S^n gibt, sodaß gilt :

$$\underline{p}.A\underline{x} > \underline{x}.A\underline{x} \qquad \forall\, \underline{x} \in U \setminus \{\underline{p}\} .$$

Beweis : (" $\Rightarrow$") Sei für $\underline{q} \in S^n \setminus \{\underline{p}\}$ $\underline{p}_\varepsilon(\underline{q}) =: (1-\varepsilon)\underline{p} + \varepsilon\underline{q}$; da $\underline{p}$ ESS ist, gilt $\varepsilon\underline{p}.A\underline{p}_\varepsilon(\underline{q}) > \varepsilon\underline{q}.A\underline{p}_\varepsilon(\underline{q})$ nach II.2.2 ; addiert man dazu $(1-\varepsilon)\underline{p}.A\underline{p}_\varepsilon(\underline{q}) = (1-\varepsilon)\underline{p}.A\underline{p}_\varepsilon(\underline{q})$, so erhält man
$\underline{p}.A\underline{p}_\varepsilon(\underline{q}) > (1-\varepsilon)\underline{p}.A\underline{p}_\varepsilon(\underline{q}) + \varepsilon\underline{q}.A\underline{p}_\varepsilon(\underline{q}) = \underline{p}_\varepsilon(\underline{q}).A\underline{p}_\varepsilon(\underline{q})\ \forall \varepsilon \in]0,\varepsilon_0(\underline{q})[$, $\underline{q} \neq \underline{p}$.

Sei nun $U =: \{\underline{p}_\varepsilon(\underline{q}) \mid \varepsilon \in [0,\varepsilon_0(\underline{q})[, \underline{q} \in S^n \setminus \{\underline{p}\}\}$; dann ist U eine (offene) Umgebung von $\underline{p}$ in S^n und es gilt nach obigem $\underline{p}.A\underline{x} > \underline{x}.A\underline{x}\ \forall\, x \in U \setminus \{\underline{p}\}$.

(" $\Leftarrow$ ") Wenn U eine beliebige Umgebung von $\underline{p}$ in S^n ist, dann existiert $\forall \underline{q} \in S^n \setminus \{\underline{p}\}$ ein $\varepsilon_0(\underline{q}) > 0$ sodaß $\forall \varepsilon \in]0,\varepsilon_0(\underline{q})[$ $\underline{p}_\varepsilon(\underline{q}) \in U$ gilt; also ist $\underline{p}.A\underline{p}_\varepsilon(\underline{q}) > \underline{p}_\varepsilon(\underline{q}).A\underline{p}_\varepsilon(\underline{q})$ laut Voraussetzung, und zwar für alle $\varepsilon \in]0,\varepsilon_0(\underline{q})[$. Nun zieht man von dieser Ungleichung wieder $(1-\varepsilon)\underline{p}.A\underline{p}_\varepsilon(\underline{q}) = (1-\varepsilon)\underline{p}.A\underline{p}_\varepsilon(\underline{q})$ ab, um daraus nach Division durch $\varepsilon > 0$ $\underline{p}.A\underline{p}_\varepsilon(\underline{q}) > \underline{q}.A\underline{p}_\varepsilon(\underline{q})$ zu erhalten, womit nach II.2.2 bewiesen ist, daß $\underline{p}$ eine ESS ist.

$\square$

Ein ähnlicher Satz ergibt sich, wenn man statt Umgebungen von $\underline{p}$ (die ja immer Punkte aus $\overset{\circ}{S}{}^n$, also total gemischte Strategien enthalten), die Seitenfläche, in deren Innerem die ESS liegt, betrachtet :

Satz II.2.4 : Sei $\underline{p} \in \mathring{\Gamma}_I$ eine ESS ; dann gilt:

$$\underline{p}.A\underline{x} > \underline{x}.A\underline{x} \quad \forall \underline{x} \in \Gamma_I \setminus \{\underline{p}\} .$$

Beweis : Wegen $(\underline{p},\underline{p}) \in \mathcal{E}$ und I.1.5 gilt $\underline{p}.A\underline{p} = \underline{x}.A\underline{p} \ \forall x \in \Gamma_I$, sodaß wegen II.2.1(ii) die Behauptung folgt. $\square$

Korollar II.2.5 : Sei $\underline{p} \in \mathring{\Gamma}_I$ eine ESS. Dann gilt : $N(\{\underline{p}\}) \cap \Gamma_I = \{\underline{p}\}$.

Beweis : Wegen II.2.1(i) gilt $(\underline{p},\underline{p}) \in \mathcal{E}$, weshalb $\underline{p} \in N(\{\underline{p}\})$ ist; sei $\underline{x} \in \Gamma_I \cap N(\{\underline{p}\}) \Rightarrow (\underline{p},\underline{x}) \in \mathcal{E} \Rightarrow$ (I.1.5 , $\underline{x} \in \Gamma_I$!) $\Rightarrow \underline{x}.A\underline{x} = \underline{p}.A\underline{x}$;
wäre $\underline{x} \neq \underline{p}$, so folgte aus II.2.4 $\underline{x}.A\underline{x} < \underline{p}.A\underline{x}$ Wid. $\square$

Korollar II.2.6 : Sei $I \subseteq \{1,\ldots,n\}$ beliebig ; dann existiert höchstens eine ESS in $\mathring{\Gamma}_I$; diese ist dann das einzige Nash-gleichgewicht in Γ_I .

Beweis : $\underline{q} \in \Gamma_I \setminus \{\underline{p}\} \Rightarrow$ (II.2.4) $\underline{q}.A\underline{q} < \underline{p}.A\underline{q} \Rightarrow$
$\Rightarrow (\underline{q},\underline{q}) \notin \mathcal{E} \Rightarrow \underline{q}$ ist keine ESS. $\square$

<u>Korollar II.2.7</u> : Es gibt nur endlich viele ESS ; ist $\underline{p} \in \overset{\circ}{S}^n$ eine total gemischte ESS, dann existieren außer ihr keine weiteren Nash-Gleichgewichte. Speziell ist eine total gemischte ESS die einzige dieses Spieles.

<u>Bemerkung</u> : Daß nur endlich viele ESS existieren, legt bei Vergleich mit I.1.12 nahe, daß ESS und V-extremale Strategien miteinander verwandte Begriffe sind; tatsächlich gilt der folgende

<u>Satz II.2.8</u> : Jede ESS ist eine V-extremale Strategie.

<u>Beweis</u> : Sei $\underline{p} \in \overset{\circ}{\Gamma}_I$ eine ESS, $\underline{x}$, $\underline{y} \in N(\{\underline{p}\})$, $\lambda \in]0,1[$ sodaß $\underline{p} = \lambda\underline{x} + (1-\lambda)\underline{y}$ gilt; ist $i \notin I$, so gilt
$0 = p_i = \lambda x_i + (1-\lambda)y_i \Rightarrow x_i = y_i = 0$, also sind auch $\underline{x}$, $\underline{y} \in \Gamma_I$; wegen II.2.5 gilt daher $\underline{x} = \underline{y} = \underline{p}$, was $\underline{p} \in \mathrm{Ext}\, N(\{\underline{p}\})$ zeigt. $\square$

II.3 Dynamisierung und dynamisches Gleichgewicht

Nach unseren Überlegungen in II.1, wo bereits Bedingungen an eine dynamische Modellierung von spieltheoretischen Lern- und Evolutionsprozessen entwickelt wurden, kommen wir nun zur Dynamisierung mittels Differenzen- und Differentialgleichungssystemen :

Eine weitere wünschenswerte Eigenschaft dieser Systeme besteht in der Invarianz von S^n : klarerweise sollte das Ergebnis einer zeitlichen Entwicklung von gemischten Strategien wiederum als gemischte Strategie interpretierbar sein, und S^n ist ja gerade die Menge aller möglichen gemischten Strategien.

Diesen Bedingungen genügen sowohl das diskrete Modell

$$x_i^{(t+1)} = x_i^{(t)} \frac{\underline{e}_i \cdot A\underline{x}^{(t)} + C}{\underline{x}^{(t)} \cdot A\underline{x}^{(t)} + C} \quad , \quad i \in \{1,\dots,n\} \qquad \text{(II.3.1)}$$

(hier ist $C > \max\{\underline{e}_i.A\underline{x} \mid \underline{x} \in S^n,\ i \in \{1,\ldots,n\}\}$, um ein Verschwinden - und damit eine Vorzeichenumkehr - des Nenners zu verhindern) als auch das kontinuierliche Modell

$$\dot{x}_i(t) = x_i(t)\,[\underline{e}_i.A\underline{x}(t) - \underline{x}(t).A\underline{x}(t)]\ ,\quad i \in \{1,\ldots,n\}\ . \qquad \text{(II.3.2)}$$

<u>Bemerkung</u> : Daß (II.3.2) sozusagen eine Kontinuisierung von (II.3.1) darstellt, zeigt folgende Überlegung :

Sei $h =: 1/(\underline{x}^{(t)}.A\underline{x}^{(t)} + C)$ ($\to 0$ für $C \to +\infty$) ; sei $\underline{x}(\tau) =: \underline{x}^{(t)}$, $\underline{x}(\tau+h) =: \underline{x}^{(t+1)}$; dann ist

$$\frac{x_i(\tau+h) - x_i(\tau)}{h} = x_i(\tau)[\underline{e}_i.A\underline{x}(\tau) - \underline{x}(\tau).A\underline{x}(\tau)]\ ,$$

und für $h \to 0$ erhält man (II.3.2) .

Daß (II.3.1) und (II.3.2) die in Abschnitt II.1 besprochenen "Selektions-" bzw. "Lernbedingungen" erfüllen, ist unmittelbar einsichtig; die Invarianz von S^n gewährleistet

<u>Proposition II.3.3</u> : Sei $\underline{x} \in \mathring{\Gamma}_I$, $I \subseteq \{1,\dots,n\}$; dann gilt :

$$\underline{x}^{(0)} = \underline{x} \quad \Rightarrow \quad \underline{x}^{(t)} \in \mathring{\Gamma}_I \quad \forall t \in \mathbb{N} \quad \text{unter (II.3.1),}$$

$$\underline{x}(0) = \underline{x} \quad \Rightarrow \quad \underline{x}(t) \in \mathring{\Gamma}_I \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{unter (II.3.2)} .$$

<u>Beweis</u> : (i) Klarerweise ist für $x_i^{(t)} = 0$ auch $x_i^{(t+1)} = 0$ $\forall t \in \mathbb{N}$; wegen $C + \underline{e}_i.A\underline{x}^{(t)} > 0$ $\forall i$ muß auch $C + \underline{x}^{(t)}.A\underline{x}^{(t)} > 0$ sein, sodaß auch $x_i^{(t)} > 0 \Rightarrow x_i^{(t+1)} > 0$ $\forall t \in \mathbb{N}$ gilt. Ist nun

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{(t)} = 1 \quad \text{, so auch} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^{(t+1)} = \frac{1}{\underline{x}^{(t)}.A\underline{x}^{(t)} + C} \sum_{i=1}^{n} x_i^{(t)}(\underline{e}_i.A\underline{x}^{(t)} + C)$$

$$= \frac{\underline{x}^{(t)}.A\underline{x}^{(t)} + C}{\underline{x}^{(t)}.A\underline{x}^{(t)} + C} = 1 \text{ , womit induktiv } \quad \underline{x}^{(t)} \in \mathring{\Gamma}_I \ \forall t \in \mathbb{N}$$

gezeigt ist.

(ii) Wegen

$$x_i(t) = x_i(0) \exp\left(\int_0^t [\underline{e}_i.A\underline{x}(\tau) - \underline{x}(\tau).A\underline{x}(\tau)]d\tau \right)$$

gilt $x_i(0) = 0 \Leftrightarrow x_i(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ sowie
$x_i(0) > 0 \Leftrightarrow x_i(t) > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$;

sei $u(t) =: \sum_{i=1}^{n} x_i(t)$; dann ist $\dot{u}(t) = \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i(t) =$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i(t)\underline{e}_i.A\underline{x}(t) - \sum_{i=1}^{n} x_i(t)\underline{x}(t).A\underline{x}(t) = [1 - u(t)]\underline{x}(t).A\underline{x}(t) ,$$

sodaß für $u(0) = 1$ die (eindeutige) Lösung obiger Differentialgleichung die Gestalt $u(t) = 1$ $\forall t \in \mathbb{R}$ hat; ist daher $\underline{x}(0) \in \mathring{\Gamma}_I$, so gilt $u(0) = 1$, also ist nach obigen Überlegungen $\underline{x}(t) \in \mathring{\Gamma}_I$ für alle $t \in \mathbb{R}$. □

Bemerkung : Nach obiger Proposition ist nicht nur S^n , sondern auch sämtliche Seiten(-inneren) $\mathring{\Gamma}_I$ invariant !

Doch nun zur Einführung des in spieldynamischen Evolutionsmodellen oft verwendeten Gleichgewichtsbegriffes :

Definition II.3.4 : $\underline{p} \in S^n$ heißt "dynamisches Gleichgewicht", wenn $\underline{p}$ ein Fixpunkt der dynamischen Systeme (II.3.1) und (II.3.2) ist, wenn also gilt :

$$\underline{x}^{(0)} = \underline{p} \quad \Rightarrow \quad \underline{x}^{(t)} = \underline{p} \quad \forall t \in \mathbb{N} \quad \text{sowie}$$

$$\underline{x}(0) = \underline{p} \quad \Rightarrow \quad \underline{x}(t) = \underline{p} \quad \forall t \in \mathbb{R} \,.$$

Eine Charakterisierung dynamischer Gleichgewichte liefert die folgende

<u>Proposition II.3.5</u> : Sei $\underline{p} \in \mathring{\Gamma}_I$, $I \subseteq \{1,\ldots,n\}$; dann sind äquivalent :

(i) $\underline{p}$ ist ein dynamisches Gleichgewicht

(ii) $\underline{p}$ ist unter (II.3.1) fix

(iii) $\underline{p}$ ist unter (II.3.2) fix

(iv) es gilt $\underline{e}_i.A\underline{p} = \underline{p}.A\underline{p} \quad \forall i \in I$

(v) es gilt $\underline{e}_i.A\underline{p} = v_A(\underline{p}) \quad \forall i \in I$

<u>Beweis</u> : Wegen $\dot{p}_i(t) = p_i(t)[\underline{e}_i.A\underline{p}(t) - \underline{p}(t).A\underline{p}(t)]$ ist $\dot{p}_i(t) = 0 \iff p_i(t) = 0$ oder $\underline{e}_i.A\underline{p}(t) = \underline{p}(t).A\underline{p}(t)$; ebenso gilt wegen $p_i^{(t+1)} = p_i^{(t)}(\underline{e}_i.A\underline{p}^{(t)} + C)/(\underline{p}^{(t)}.A\underline{p}^{(t)} + C)$: $p_i^{(t+1)} = p_i^{(t)} \iff p_i^{(t)} = 0$ oder $\underline{e}_i.A\underline{p}^{(t)} = \underline{p}^{(t)}.A\underline{p}^{(t)}$; der Rest der Behauptungen folgt daraus unmittelbar. □

Den Zusammenhang zwischen Nash-Gleichgewichten und dynamischen Gleichgewichten erläutert der folgende

<u>Satz II.3.6</u> : Jedes Nash-Gleichgewicht $\underline{p}$ für (A,A^t) ist ein dynamisches Gleichgewicht für die Dynamik (II.3.1) oder (II.3.2) des dazugehörigen symmetrischen Konflikts.

<u>Beweis</u> : Sei $\underline{p} \in \mathring{\Gamma}_I$ ein Nash-Gleichgewicht; dann ist nach I.1.4 $\underline{e}_i.A\underline{p} = \underline{p}.A\underline{p} \quad \forall i \in I$, also ist $\underline{p}$ nach II.3.5(iv) ein dynamisches Gleichgewicht. □

<u>Bemerkung</u> : Daß die Umkehrung von II.3.6 im allgemeinen nicht gelten kann, zeigt sofort

<u>Proposition II.3.7</u> : Jede reine Strategie $\underline{e}_i$, $i \in \{1,\dots,n\}$, ist ein dynamisches Gleichgewicht.

<u>Beweis</u> : Für $\underline{p} = \underline{e}_i$ gilt $\underline{e}_i.A\underline{p} = (a_{ii} =) \underline{p}.A\underline{p}$ sowie $\underline{p} \in \mathring{\Gamma}_{\{i\}}$; jetzt II.3.5(iv) anwenden ! □

Klarerweise ist $\underline{p} = \underline{e}_i$ im allgemeinen kein Nash-Gleichgewicht für (A,A^t) (nur für den Fall, daß $a_{ii} \geqq a_{ji}$ $\forall j \in \{1,\dots,n\}$).

Für total gemischte Strategien sind jedoch die Begriffe "Nash-Gleichgewicht" und "dynamisches Gleichgewicht" äquivalent :

<u>Satz II.3.8</u> : Sei $\underline{p} \in \mathring{S}^n$ ein total gemischtes dynamisches Gleichgewicht; dann ist $\underline{p}$ auch ein Nash-Gleichgewicht.

<u>Beweis</u> : siehe II.3.5(iv) sowie I.2.1 . □

<u>Satz II.3.8</u> : Jede ESS ist ein dynamisches Gleichgewicht.

<u>Beweis</u> : Nach II.2.1(i) ist jede ESS ein Nash-Gleichgewicht; jetzt II.3.6 anwenden ! □

II.4 ESS als dynamisches Gleichgewicht

Im folgenden soll die Bedeutung des Begriffes "ESS" im Rahmen unserer Dynamisierung aufgezeigt werden : jede ESS ist nicht nur ein dynamisches Gleichgewicht, sondern sogar asymptotisch stabil, was bedeutet, daß "Störungen" (etwa Mutationen) , die die Bevölkerung vom Optimalzustand der ESS entfernen, durch die Dynamik wieder ausgeglichen werden. Auf den Lernprozeß umgelegt bedeutet dies, daß - unabhängig von der Wahl der Anfangsstrategie - die Dynamik zur ESS "hinführt".

Um im Falle der ESS Stabilität nachzuweisen, müssen wir nicht auf die (lokale) Linearisierung zurückgreifen; "glücklicherweise" existiert in diesem Fall eine Ljapunow-Funktion, das ist eine entlang der Lösungskurven monoton wachsende Funktion, die ihr Maximum an der ESS annimmt. Diese Ljapunow-Funktion sichert uns die Konvergenz aller Lösungskurven zur ESS (siehe etwa [5]).

Lemma II.4.1 : Sei $I \subseteq \{1,\ldots,n\}$, $\underline{p} \in \mathring{\Gamma}_I$; dann gilt :

die Funktion $V_I : \underline{x} \mapsto V_I(\underline{x}) =: \prod_{i\in I} x_i^{p_i}$

$$\Gamma_I \to \mathbb{R}$$

nimmt ihr Maximum an der Stelle $\underline{x} = \underline{p} = (p_1,\ldots,p_n)$ an.

Beweis : (i) Da V_I eine stetige Funktion auf der kompakten Menge $\Gamma_I \cong S^l$ (l ist die Anzahl der Elemente von I) ist, die auf dem Rand von Γ_I , $\partial\Gamma_I$ verschwindet und in dessen Inneren strikt positive Werte annnimmt, muß sie auch eine Maximalstelle in $\mathring{\Gamma}_I$ besitzen; diese Maximalstelle ist klarerweise auch eine Maximalstelle für die (in $\mathring{\Gamma}_I$ wohldefinierte) Funktion $\log V_I$.

(ii) Fassen wir $\log V_I$ als Funktion aus $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$ auf, so wird aus jedem kritischen Punkt in $\mathring{\Gamma}_I$ ein kritischer Punkt unter der Nebenbedingung

$$\sum_{j\in I} x_j = 1$$, er muß also erfüllen :

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\log V_I(\underline{x}) - \lambda\Big(\sum_{j\in I} x_j - 1\Big)\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{j\in I}\left(p_j \log x_j - \lambda x_j \right) =$$

$$= p_i/x_i - \lambda$$, wobei λ ein Lagrange-Multiplikator ist;

Hier ist also $\lambda \neq 0$ und $x_i = 1/\lambda\, p_i$, da aber sowohl $\underline{x} \in S^n$ als auch $\underline{p} \in S^n$ sind, gilt schließlich $\underline{x} = \underline{p}$.

(iii) Da nach (i) sich in $\mathring{\Gamma}_I$ eine Maximalstelle von $\log V_I$, also ein kritischer Punkt befinden muß, aber andererseits nach (ii) höchstens ein solcher existiert, nämlich $\underline{p}$, muß bereits $\underline{p}$ die gesuchte Maximalstelle sein. $\square$

<u>Satz II.4.2</u> : Sei $\underline{p} = (p_1, \dots, p_n) \in \mathring{\Gamma}_I$ eine ESS; dann gilt :

$V_I(x) =: \prod_{i \in I} x_i^{p_i}$ ist eine Ljapunow-Funktion.

<u>Beweis</u> : Wir betrachten wieder statt V_I $\log V_I(\underline{x}) = \sum_{i \in I} p_i \log x_i$; klarerweise ist V_I genau dann monoton, wenn $\log V_I$ dies ist.

Nun sei $t \mapsto \underline{x}(t)$ eine Lösungskurve von (II.3.2) sowie

$V(t) =: V_I(x(t)) = \prod_{i \in I} x_i(t)^{p_i}$; dann gilt für $x(0) \in \mathring{\Gamma}_I$:

$$(\log V(t))^{\bullet} = \sum_{i \in I} p_i \, \dot{x}_i(t)/x_i(t) = \sum_{i \in I} p_i [\underline{e}_i . A\underline{x}(t) - \underline{x}(t).A\underline{x}(t)] =$$
$$= \underline{p}.A\underline{x}(t) - \underline{x}(t).A\underline{x}(t)$$; ist nun $\underline{p}$ eine ESS, so gilt deshalb

$(\log V(t))^{\bullet} > 0$ (für $\underline{x}(0) \neq \underline{p}$ und damit $\underline{x}(t) \neq \underline{p}$) $\forall t \in \mathbb{R}$ (vgl. II.2.4 !), sodaß V wegen II.4.1 eine Ljapunow-Funktion ist.

□

<u>Bemerkung</u> : Der Einfachheit halber haben wir uns hier nur auf das kontinuierliche dynamische Modell (II.3.2) beschränkt.

Eine Klassifikation aller möglichen Flüsse der Dynamik (II.3.2) nach topologischen Gesichtspunkten im Falle $n = 3$ dreier reiner Strategien findet sich in [3] . In [9] wird (II.3.2) samt einigen anderen Anwendungsmöglichkeiten ausführlich behandelt.

II.5 Das dynamische Gleichgewicht beim verallg. Zermürbungskampf und dessen algorithmische Ermittlung

Das Szenario des Zermürbungskampfes ist ein Beispiel für eine Situation, die unter Beachtung aller (wie oben ausgeführt wurde) notwendigen Vorsicht auf menschliche Spiele übertragbar wäre : in diesem Spiel haben die Gegner die Wahl zwischen verschiedenen Wartezeiten, die sie investieren, um den Gegner zu "zermürben" ; wartet ein Individuum länger als sein Gegenspieler, so hat es gewonnen. Dieses Szenario wurde vor allem bei Scheinkämpfen in der Tierwelt beobachtet und ähnelt dem der (menschlichen) Zeitspiele, die - mit kontinuierlich variabler Zeit modelliert - bereits ausführlich untersucht wurden. In unserem Modell haben Spieler nur endlich viele Strategien zur Verfügung, sodaß von einer Diskretisierung der Wartezeit gesprochen werden kann.

Es erscheint nun zweckmäßig, für die Ermittlung des dynamischen Gleichgewichtes sowohl im kontinuierlichen als auch im diskreten Fall einen Algorithmus anzugeben, zumal bei diesem Spezialfall einer symmetrischen Spieldynamik die spezielle Form der Auszahlungsmatrix es erlaubt, die unter Umständen (bei einer großen Anzahl von reinen Strategien) auf- und im allgemeinen Fall notwendige Matrixinversion zu umgehen. Der Algorithmus ergibt sich aus der in [1] vorgenommenen Analyse verallgemeinerter Zermürbungskämpfe; für Beweise der in diesem Abschnitt vorkommenden Behauptungen sei dorthin verwiesen.

<u>Definition II.5.1</u> : Ein "verallgemeinerter Zermürbungskampf" ist ein spezieller symmetrischer Konflikt und wird durch eine Auszahlungsmatrix A charakterisiert, für die gilt :

$$a_{ij} = a_j > a_{jj} \quad \text{für alle } i > j .$$

<u>Bemerkung</u> : Wie diese eher abstrakt anmutende Forderung an die Auszahlungsmatrix mit dem Zermürbungskampf zusammenhängt, ist so einzusehen :
sei der "Wert" des Streitobjekts $v > 0$ sowie $-t$ die "Kosten" für eine Einheit der gewarteten Zeit.
Ordnen wir nun die Strategien nach der Wartezeit an, fordern wir also, daß gelte :
$\underline{e}_1$ spielen bedeutet " r_1 Zeiteinheiten warten" ,
$\underline{e}_2$ spielen bedeutet " r_2 Zeiteinheiten warten" ,

$\underline{e}_n$ spielen bedeutet " r_n Zeiteinheiten warten" ,

wobei $r_1 < r_2 < \ldots < r_n$ sei, dann gewinnt ein $\underline{e}_i$-Spieler gegen einen $\underline{e}_j$-Spieler für $i > j$, und zwar

$$a_{ij} = v - r_j t \text{ , die Auszahlung hängt also nur von}$$

der Wartezeit und somit von der Strategie des Gegners ab, immer $i > j$ vorausgesetzt (für $i < j$ wäre in unserem Modell $a_{ij} = - r_i t$); fordern wir nun noch für den Fall, daß zwei Spieler mit gleicher Strategie aufeinandertreffen, eine "gerechte Aufteilung" des Streitobjekts - oder, anders gesehen, daß für zwei gleich geduldige

Spieler die Gewinnwahrscheinlichkeit gleich groß ist, was eigentlich eine Konsequenz des Szenarios der Strategien-Symmetrie sein müßte - , so ergibt sich

$$a_{jj} = v/2 - r_j t < v - r_j t = a_j \quad .$$

Nun zu den Sätzen über dynamische Gleichgewichte und deren (asymptotische) Stabilität beim verallgemeinerten Zermürbungskampf :

<u>Satz II.5.2</u> : Sei A wie in II.5.1 und $m \in \{2,\dots,n\}$ fest;

seien $y_{m-1}^{(m)} =: \max\left\{0, \dfrac{a_{m-1,m} - a_{mm}}{a_{m-1} - a_{m-1,m-1}}\right\}$, $y_m^{(m)} =: 1$

sowie $y_m^{(j)} =: 0 \quad \forall\, j \in \{m+1,\dots,n\}$.

Sei $y_k^{(m)} =: \max\left\{0, \dfrac{a_{km} - a_{mm} + \sum\limits_{k<j<m} (a_{kj} - a_j)\, y_j^{(m)}}{a_k - a_{kk}}\right\}$, $k \in \{1,\dots,m-1\}$

und $x_k^{(m)} =: \dfrac{y_k^{(m)}}{\sum\limits_{i=1}^{m} y_i^{(m)}}$. Dann gilt :

$$\underline{x}(0) \in \mathring{\Gamma}_{\{1,\dots,m\}} \Rightarrow \underline{x}(t) \underset{t \to +\infty}{\to} \underline{x}^{(m)} = [x_1^{(m)},\dots,x_n^{(m)}] ,$$

wenn die zeitliche Entwicklung von $\underline{x}(t)$ durch II.3.2 gegeben ist (also $t \mapsto x(t)$ eine Lösung des Differentialgleichungssystems II.3.2 ist).

Beweis : siehe [1] , Satz 3.14 .

<u>Bemerkung</u> : Im Falle des verallgemeinerten Zermürbungskampfes hat man also für jede Fläche der Gestalt $\Gamma_{\{1,\ldots,m\}}$ ein dynamisches Gleichgewicht darin, das ein Attraktor auf dem Inneren dieser Fläche, also auf $\mathring{\Gamma}_{\{1,\ldots,m\}}$ ist; speziell für $m = n$ bedeutet dies, daß der Lern- bzw. Evolutionsprozeß, wenn man mit einer total gemischten Strategie anfängt, zu einem Endzustand, der von der Anfangsstrategie unabhängig ist, hinführt.

Das Analogon zu II.5.2 im diskreten Fall ist

Satz II.5.3 : Sei A wie in II.5.1 , $m \in \{2,\dots,n\}$ fest;

seien $U_{i,m-1}^{(m)} =: a_{im}$, $i \in \{1,\dots,m-1\}$, $V_{m-1}^{(m)} =: a_{mm}$

und $p_{m-1}^{(m)} =: \max \left\{0, \dfrac{a_{m-1,m} - a_{mm}}{a_{m-1} - a_{m-1,m-1}}\right\}$.

Sei für $i \in \{1,\dots,m-1\}$

$$U_{i,r}^{(m)} =: \frac{a_{i,r+1}\,p_{r+1}^{(m)} + U_{i,r+1}^{(m)}}{p_{r+1}^{(m)} + 1} , \quad r \in \{1,\dots,m-2\} .$$

Sei $$V_r^{(m)} =: \frac{V_{r+1}^{(m)} + (a_{r+1} + U_{r+1,r+1}^{(m)})\,p_{r+1}^{(m)} + a_{r+1,r+1}(p_{r+1}^{(m)})^2}{(p_{r+1}^{(m)} + 1)^2}$$

sowie $p_r^{(m)} =: \max \left\{0, \dfrac{U_{r,r}^{(m)} - V_r^{(m)}}{a_r - a_{rr}}\right\}$, $r \in \{1,\dots,m-2\}$.

Seien weiters $x_1^{\langle m\rangle} =: \dfrac{p_1^{(m)}}{1 + p_1^{(m)}}$,

$x_r^{\langle m\rangle} =: \dfrac{p_r^{(m)}\left(1 - \sum_{j<r} x_j^{\langle m\rangle}\right)}{1 + p_r^{(m)}}$, $x_m^{\langle m\rangle} =: 1 - \sum_{j<m} x_j^{\langle m\rangle}$ und

$x_k^{\langle m\rangle} =: 0 \quad \forall\, k \in \{m+1,\dots,n\}$. Dann gilt :

$\underline{x}^{(0)} \in \mathring{\Gamma}_{\{1,\dots,m\}} \Rightarrow \underline{x}^{(t)} \xrightarrow[t\to\infty]{} \underline{x}^{\langle m\rangle} = [x_1^{\langle m\rangle},\dots,x_n^{\langle m\rangle}]$, wenn

$\{\underline{x}^{(t)} \mid t \in \mathbb{N}\}$ eine Lösungsfolge von II.5.1 ist.

Beweis : siehe [1] , Satz 5.19 !

Man ersieht bereits aus der Formulierung von II.5.2 und II.5.3 die rekursive Struktur, die eine algorithmische Berechnung des interessierenden dynamischen Gleichgewichtes nahelegt. Diese erscheint so naheliegend, daß nun die in PASCAL verfaßten Programme ohne Kommentar wiedergegeben sein sollen :

- ZKKP für die Berechnung im kontinuierlichen Fall II.5.2 und
- ZKDP " " " " diskreten Fall II.5.3 :

```
PROGRAM ZKKP (INPUT,OUTPUT);
CONST N=20;
VAR I,J,K,M : INTEGER;
    A : ARRAY[1..N,1..N] OF REAL;
    AA,Y : ARRAY[1..N] OF REAL;
BEGIN FOR I:=1 TO N-1 DO BEGIN
        FOR J:=I TO N DO READ(A[I,J]);
        READLN END;
  FOR J:=1 TO N-1 DO READ(AA[J]);
  READ(A[N,N]);READLN;
  READ(M);
  IF M<N THEN FOR K:=M+1 TO N DO Y[K]:=0;
  Y[M]:=1;
  Y[M-1]:=(A[M-1,M]-A[M,M])/(AA[M-1]-A[M-1,M-1]);
  IF Y[M-1]<0 THEN Y[M-1]:=0;
  FOR K:=M-1 DOWNTO 1 DO BEGIN
     AA[N]:=A[K,M]-A[M,M];
     FOR J:=K+1 TO M-1 DO AA[N]:=AA[N]+(A[K,J]-AA[J])*Y[J];
     Y[K]:=AA[N]/(AA[K]-A[K,K]);
     IF Y[K]<0 THEN Y[K]:=0
     END;
  AA[N]:=0;
  FOR K:=1 TO N DO AA[N]:=AA[N]+Y[K];
  FOR I:=1 TO N DO WRITELN(Y[I]/AA[N]);
 END.
```

```
PROGRAM ZKDP (INPUT,OUTPUT);
CONST N=20;
VAR I,J,M : INTEGER; S : REAL;
    A,U : ARRAY[1..N,1..N] OF REAL;
    AA,V,P,X : ARRAY[1..N] OF REAL;
BEGIN FOR I:=1 TO N-1 DO BEGIN
          FOR J:=I TO N DO READ(A[I,J]);
         READLN END;
  FOR J:=1 TO N-1 DO READ(AA[J]);
  READ(A[N,N]);READLN;
  READ(M);
  IF M<N THEN FOR I:=M+1 TO N DO X[I]:=0;
  FOR I:=1 TO M-1 DO U[I,M-1]:=A[I,M];
  V[M-1]:=A[M,M];
  P[M-1]:=(U[M-1,M-1]-V[M-1])/(AA[M-1]-A[M-1,M-1]);
  IF P[M-1]<0 THEN P[M-1]:=0;
  FOR J:=M-2 DOWNTO 1 DO BEGIN
     FOR I:=1 TO M-1 DO
       U[I,J]:=(A[I,J+1]*P[J+1]+U[I,J+1])/(1+P[J+1]);
     V[J]:=V[J+1]+(AA[J+1]+U[J+1,J+1])*P[J+1]+A[J+1,J+1]*SQR(P[J+1]);
     V[J]:=V[J]/SQR(1+P[J+1]);
     P[J]:=(U[J,J]-V[J])/(AA[J]-A[J,J]);
     IF P[J]<0 THEN P[J]:=0;
     END;
  X[1]:=P[1]/(1+P[1]);
  S:=1-X[1];
  FOR I:=2 TO M-1 DO BEGIN
    X[I]:=P[I]*S/(1+P[I]);
    S:=S-X[I]
    END;
  X[M]:=S;
  FOR I:=1 TO N DO WRITELN(X[I])
  END.
```

<u>Bemerkung</u> : Für die Eingabe der Auszahlungsmatrix A soll diese folgendermaßen strukturiert sein :

```
a(1,1) a(1,2) a(1,3) ... ... ... ... ... a(1,n)

       a(2,2) a(2,3) ... ... ... ... ... a(2,n)

              a(3,3) ... ... ... ... ... a(3,n)

                         ... ... ...

                               a(n-1,n-1) a(n-1,n)

 aa(1)  aa(2)  aa(3) ... ... ... aa(n-1) a(n,n)
```

hier seien a(i,j) = a_{ij} und aa(j) = a_j , fehlende Eintragungen sind also immer der in der gleichen Spalte, letzten Zeile gleich.

Nach der Eingabe von A soll in einer neuen Zeile der gewünschte Wert von m (siehe II.5.2, II.5.3) folgen.

II.6 Asymmetrische Konflikte und deren Dynamisierung

Nun zu asymmetrischen Konflikten : bei deren Dynamisierung sind nun wieder die allgemeinen Vorteilsrelationen (I.1.1) und (I.1.2) relevant; ebenso sollten die entsprechenden dynamischen Systeme die bereits in II.3 geforderten Invarianzeigenschaften haben, um auch weiterhin die Interpretation der resultierenden Prozesse als gemischte Strategien bzw. relative Häufigkeiten bzw. Bevölkerungszustände zu gewährleisten.

Überhaupt ist es nun viel einfacher, von der Dynamisierung symmetrischer Konflikte ausgehend mittels Analogie-Überlegungen zu modellieren, eine weitere Rechtfertigung der Behandlung symmetrischer Konflikte.

Analog zu II.3.1 erfüllt das diskrete Modell

$$\left.\begin{aligned} x_i^{(t+1)} &= x_i^{(t)} \frac{\underline{e}_i \cdot A\underline{y}^{(t)} + C}{\underline{x}^{(t)} \cdot A\underline{y}^{(t)} + C} \qquad && i \in \{1, \ldots, m\} \\[2ex] y_j^{(t+1)} &= y_j^{(t)} \frac{\underline{x}^{(t)} \cdot B\underline{f}_j + C}{\underline{x}^{(t)} \cdot B\underline{y}^{(t)} + C} \qquad && j \in \{1, \ldots, n\} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II.6.1)}$$

(hier ist C genügend groß, um einen Vorzeichenwechsel der Nenner zu verhindern) genauso wie

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= x_i(t)\,[\,\underline{e}_i.A\underline{y}(t) - \underline{x}(t).A\underline{y}(t)\,]\,, \quad i\in\{1,\dots,m\} \\ \dot{y}_j(t) &= y_j(t)\,[\,\underline{x}(t).B\underline{f}_j - \underline{x}(t).B\underline{y}(t)\,]\,, \quad j\in\{1,\dots,n\} \end{aligned}\right\} \quad (II.6.2)$$

das zu II.3.2 analoge kontinuierliche Modell ist.

Wie im Abschnitt II.3 zeigt man auch, daß II.6.2 eine Kontinuisierung von II.6.1 darstellt und daß beide Modelle die in Abschnitt II.1 besprochenen "Selektions-" bzw. "Lernbedingungen" erfüllen.

Der Beweis des folgenden zu II.3.3 analogen Resultates kann fast wörtlich von dort übernommen werden :

<u>Proposition II.6.3</u> : Seien $(\underline{x},\underline{y}) \in \mathring{\Gamma}_I \times \mathring{\Gamma}_J$, $I \subseteq \{1,\dots,m\}$, $J \subseteq \{1,\dots,n\}$.

Dann gilt :

$$\left.\begin{aligned} \underline{x}^{(0)} = \underline{x} &\Rightarrow \underline{x}^{(t)} \in \mathring{\Gamma}_I \\ \underline{y}^{(0)} = \underline{y} &\Rightarrow \underline{y}^{(t)} \in \mathring{\Gamma}_J \end{aligned}\right\} \forall t \in \mathbb{N} \quad \text{unter (II.6.1)} ,$$

$$\left.\begin{aligned} \underline{x}(0) = \underline{x} &\Rightarrow \underline{x}(t) \in \mathring{\Gamma}_I \\ \underline{y}(0) = \underline{y} &\Rightarrow \underline{y}(t) \in \mathring{\Gamma}_J \end{aligned}\right\} \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{unter (II.6.2)} .$$

Wieder sind also nicht nur $S^m \times S^n$, sondern sämtliche kartesischen Produkte von Seitenflächen(-inneren) $\mathring{\Gamma}_I \times \mathring{\Gamma}_J$ invariant.

II.7 Asymmetrische dynamische Gleichgewichte

Die Definition asymmetrischer dynamischer Gleichgewichte liegt nun auf der Hand :

<u>Definition II.7.1</u> : Sei $(\underline{p},\underline{q}) \in \mathring{\Gamma}_I \times \mathring{\Gamma}_J$, $I \subseteq \{1,\ldots,m\}$, $J \subseteq \{1,\ldots,n\}$.

$(\underline{p},\underline{q})$ heißt "dynamisches Gleichgewicht", wenn eine - und damit alle - der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist (sind):

(i) $(\underline{p},\underline{q})$ ist unter (II.6.1) fix, also :

$$(\underline{p}^{(o)},\underline{q}^{(o)}) = (\underline{p},\underline{q}) \quad \Rightarrow \quad (\underline{p}^{(t)},\underline{q}^{(t)}) = (\underline{p},\underline{q}) \quad \forall t \in \mathbb{N} .$$

(ii) $(\underline{p},\underline{q})$ ist unter (II.6.2) fix, also :

$$(\underline{p}(0),\underline{q}(0)) = (\underline{p},\underline{q}) \quad \Rightarrow \quad (\underline{p}(t),\underline{q}(t)) = (\underline{p},\underline{q}) \quad \forall t \in \mathbb{R} .$$

(iii) $\quad \underline{e}_i.A\underline{q} = \underline{p}.A\underline{q} \quad \forall i \in I \quad , \quad \underline{p}.B\underline{f}_j = \underline{p}.B\underline{q} \quad \forall j \in J .$

(iv) $\quad \underline{e}_i.A\underline{q} = v_A(\underline{q}) \quad \forall i \in I \quad , \quad \underline{p}.B\underline{f}_j = w_B(\underline{p}) \quad \forall j \in J .$

<u>Bemerkung</u> : Daß diese Bedingungen (i),(ii),(iii),(iv) wirklich äquivalent sind, zeigt eine zum Beweis von II.3.5 analoge Überlegung.

Ebenso verlaufen die Beweise zu den folgenden Propositionen völlig analog wie die ihrer Pendants II.3.6 , II.3.7 und II.3.8 :

<u>Proposition II.7.2</u> : Sei $(\underline{p},\underline{q})$ ein Nash-Gleichgewicht;

dann ist $(\underline{p},\underline{q})$ auch ein dynamisches Gleichgewicht.

<u>Proposition II.7.3</u> : Jedes Paar von reinen Strategien $(\underline{e}_i,\underline{f}_j)$ ist ein dynamisches Gleichgewicht.

<u>Proposition II.7.4</u> : Ist $(\underline{p},\underline{q}) \in \overset{\circ}{S}{}^m \times \overset{\circ}{S}{}^n$ total gemischt, so gilt :

$(\underline{p},\underline{q})$ ist Nash-Gleichgewicht $\Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow$ $(\underline{p},\underline{q})$ ist dynamisches Gleichgewicht

<u>Bemerkung</u> : Wieder ist der Begriff "dynamisches Gleichgewicht" weiter als der des Nash-Gleichgewichts, beide fallen jedoch im Falle total gemischter Strategien zusammen.

Die Verallgemeinerung des Begriffs der ESS auf asymmetrische Konflikte ist nicht ganz so naheliegend wie die bisherigen Analogien; um zu erfassen, wann ein Strategienpaar stabil gegenüber Fluktuationen ist, muß man nämlich schon bei der Formulierung der Gleichgewichtsbedingung über den Nash-schen Gleichgewichtsbegriff hinausgehen :

Ist nämlich $(\underline{p},\underline{q})$ ein Nash-Gleichgewicht und $\underline{x} \in S^m$ gegen $\underline{q}$ "genausogut" wie $\underline{p}$, also $\underline{p}.A\underline{q} = \underline{x}.A\underline{q}$, und ist dafür - nun naiv das symmetrische ESS-Konzept verallgemeinernd - $\underline{q}$ gegen $\underline{p}$ besser als gegen $\underline{x}$, also $\underline{p}.B\underline{q} > \underline{x}.B\underline{q}$, so ist nicht einzusehen, warum Spieler I nicht von $\underline{p}$ zu $\underline{x}$ abweichen könnte, zumal ihm dies keinen Nachteil bringt, sondern nur Spieler II (wir setzen hiebei voraus, daß I gegenüber II nicht mißgünstig ist).

Außerdem gilt, daß diese Bedingung, also

$$\underline{p}.A\underline{q} = \underline{x}.A\underline{q} \Rightarrow \underline{x}.B\underline{q} < \underline{p}.B\underline{q}$$

nur für reine Strategien $\underline{p} = \underline{e}_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, erfüllt sein kann, denn wäre $\underline{p} \in \mathring{\Gamma}_I$ im Inneren einer Seitenfläche (card $I \geqq 2$) , so könnte unmöglich

$$(\underline{p} - \underline{x}).B\underline{q} > 0 \quad \forall \underline{x} \in \Gamma_I \setminus \{\underline{p}\}$$

gelten, da diese Ungleichung einen Halbraum charakterisiert, auf dessen Begrenzungshyperebene $\underline{p}$ liegt, diese also die Fläche Γ_I schneidet, sodaß $\Gamma_I \setminus \{\underline{p}\}$ auch mit dem Komplement des Halbraums einen nichtleeren Durchschnitt besitzt.

Wir müssen also die Nash-Gleichgewichtsbedingung durch eine Relation ersetzen, die eine Art gemeinsamer Optimalität widerspiegelt; eine naheliegende Möglichkeit ergibt sich bei Betrachtung der totalen Auszahlung, also der Summen der Auszahlungen an die Spieler bzw. in den Bevölkerungen :

$$\underline{p}.A\underline{q} + \underline{p}.B\underline{q} \geqq \underline{x}.A\underline{q} + \underline{p}.B\underline{y} \quad \forall (\underline{x}, \underline{y}) \in S^m \times S^n \qquad \text{(II.7.5)}$$

Konsequenterweise gelangt man nun zur

<u>Definition II.7.6</u> : $(\underline{p},\underline{q})$ heißt "evolutionär stabil(es Strategienpaar), wenn (II.7.5)
$\forall\,(\underline{x},\underline{y}) \in S^m \times S^n$ gilt sowie :

$$\underline{p}.A\underline{q} + \underline{p}.B\underline{q} = \underline{x}.A\underline{q} + \underline{p}.B\underline{y} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \underline{p}.A\underline{y} + \underline{x}.B\underline{q} > \underline{x}.A\underline{y} + \underline{x}.B\underline{y}$$

Jedoch liefert auch diese Definition nur Paare reiner Strategien :

<u>Satz II.7.7</u> : Jedes evolutionär stabile Strategienpaar $(\underline{p},\underline{q})$ besteht aus reinen Strategien :

$$(\underline{p},\underline{q}) = (\underline{e}_i,\underline{f}_j) \quad , \; i\in\{1,\ldots,m\} \; , \; j\in\{1,\ldots,n\} \; .$$

<u>Beweis</u> : siehe [12] !

Bemerkung : Wie wir sehen, erlaubt die bisherige Formulierung asymmetrischer Konflikte keine befriedigende Verallgemeinerung des ESS-Begriffs symmetrischer Konfliktmodelle; wenn man nun, anstatt jeweils nur Interaktion mit der "gegnerischen" Bevölkerung zuzulassen, Spiele zwischen zwei Bevölkerungen mit Selbstinteraktion betrachtet, so erhält der darauf verallgemeinerte ESS-Begriff wieder eine größere Bedeutung. Hierauf näher einzugehen, würde jedoch diesen Rahmen sprengen; stattdessen sei auf die Behandlung in [11] verwiesen.

Nun aber zu einigen Eigenschaften von dynamischen Gleichgewichten :

Proposition II.7.8 : Jedes Paar reiner Strategien ist ein dynamisches Gleichgewicht.

Beweis : klar aus II.7.1 . □

Korollar II.7.9 : Jedes Paar evolutionär stabiler Strategien ist ein dynamisches Gleichgewicht.

Beweis : klar aus II.7.7 , II.7.8 . □

<u>Proposition II.7.10</u> : Seien $\underline{p}\,,\ \underline{p}' \in \mathring{\Gamma}_I\,,\ I \subseteq \{1,\ldots,m\}$,
$\underline{q}\,,\ \underline{q}' \in \mathring{\Gamma}_J\,,\ J \subseteq \{1,\ldots,n\}$
sowie $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sodaß

$$\bar{\underline{p}} = \lambda \underline{p} + (1-\lambda)\underline{p}' \in \Gamma_I\,, \quad \bar{\underline{q}} = \mu \underline{q} + (1-\mu)\underline{q}' \in \Gamma_J\,.$$

Dann gilt, wenn $(\underline{p},\underline{q})$ und $(\underline{p}',\underline{q}')$ dynamische Gleichgewichte sind :

$(\bar{\underline{p}},\bar{\underline{q}})$ ist ein dynamisches Gleichgewicht.

<u>Beweis</u> : Seien $i \in I$, $j \in J$; dann gilt wegen II.7.1 :

$$\underline{e}_i.A\bar{\underline{q}} = \underline{e}_i.A(\mu\underline{q}+(1-\mu)\underline{q}') = \mu\,\underline{e}_i.A\underline{q} + (1-\mu)\underline{e}_i.A\underline{q}' \quad \text{ist von } i$$

und $\bar{\underline{p}}.B\underline{f}_j = (\lambda\underline{p} + (1-\lambda)\underline{p}').B\underline{f}_j = \lambda\underline{p}.B\underline{f}_j + (1-\lambda)\underline{p}'.B\underline{f}_j$ von j

unabhängig, was nach II.7.1 alles zeigt. □

<u>Definition II.7.11</u> : Ein dynamisches Gleichgewicht $(\underline{p},\underline{q}) \in \mathring{\Gamma}_I \times \mathring{\Gamma}_J$, $I \subseteq \{1,\ldots,m\}$, $J \subseteq \{1,\ldots,n\}$, heißt "isoliert" , wenn es eine Umgebung U von $(\underline{p},\underline{q})$ in $\Gamma_I \times \Gamma_J$ gibt, sodaß gilt :

Außer $(\underline{p},\underline{q})$ gibt es keine dynamischen Gleichgewichte in U .

<u>Korollar II.7.12</u> : Sei $(\underline{p},\underline{q}) \in \mathring{\Gamma}_I \times \mathring{\Gamma}_J$, $I \subseteq \{1,\ldots,m\}$, $J \subseteq \{1,\ldots,n\}$.
Dann gilt :

$(\underline{p},\underline{q})$ ist ein isoliertes dynamisches Gleichgewicht $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow$ (p,q) ist das einzige dynamische Gleichgewicht in $\mathring{\Gamma}_I \times \mathring{\Gamma}_J$.

Beweis : "$\Leftarrow$ " ist klar aus II.7.11 .
" $\Rightarrow$" ist eine Konsequenz aus II.7.10 : wäre $(\underline{p}',\underline{q}') \in \mathring{\Gamma}_I \times \mathring{\Gamma}_J$ ein weiteres Gleichgewicht, so wären für $\lambda \in [0,1]$ auch $(\lambda\underline{p}' + (1-\lambda)\underline{p}, \lambda\underline{q}' + (1-\lambda)\underline{q})$ $(\in \mathring{\Gamma}_I \times \mathring{\Gamma}_J$, da $\mathring{\Gamma}_I \times \mathring{\Gamma}_J$ konvex ist !) ebenfalls dynamische Gleichgewichte; ist nun U eine beliebige Umgegung von $(\underline{p},\underline{q})$ in $\Gamma_I \times \Gamma_J$, so enthält sie solche Punkte mit genügend kleinem λ , sodaß $(\underline{p},\underline{q})$ nicht isoliert sein kann. □

Bemerkung : Aus obiger Überlegung folgt übrigens, daß die Menge der dynamischen Gleichgewichte in $\mathring{\Gamma}_I \times \mathring{\Gamma}_J$ konvex ist, sie ist sogar der Durchschnitt der linearen Mannigfaltigkeit, die durch die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{lll} \underline{x}.B\underline{f}_j - \underline{x}.B\underline{f}_{j'} = 0 & , & j,j' \in J , \\ \\ \underline{e}_i.A\underline{y} - \underline{e}_{i'}.A\underline{y} = 0 & , & i,i' \in I \end{array}\right\} \qquad \text{(II.7.13)}$$

charakterisiert ist, mit $\mathring{\Gamma}_I \times \mathring{\Gamma}_J$ (dies folgt aus II.7.1). Daraus folgt nun

Satz II.7.14 : Wenn ein isoliertes dynamisches Gleichgewicht $(\underline{p},\underline{q}) \in \mathring{S}^m \times \mathring{S}^n$ existiert, so gilt : $m = n$.

Beweis : Für $I = \{1,\ldots,m\}$ und $J = \{1,\ldots,n\}$ ist (II.7.13) ein System von $m-1$ linearen Gleichungen in $\underline{x}$ und $n-1$ linearen Gleichungen in $\underline{y}$; dazu kommt noch

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 ,$$

sodaß für $m < n$ $\underline{p}$ nur dann Lösung der Gleichungen in $\underline{x}$ sein kann, wenn B degeneriert ist, während die Gleichungen in $\underline{y}$ eine lineare Mannigfaltigkeit mit Dimension $\geq m - n$ charakterisieren, welche natürlich auch $\underline{q}$ enthält, sodaß mit demselben Argument wie in II.7.12 $(\underline{p},\underline{q})$ kein isoliertes dynamisches Gleichgewicht sein kann; ähnlich führt die Annahme $n < m$ zu einem Widerspruch. □

<u>Bemerkung</u> : Man vergleiche II.7.14 mit I.1.19 sowie - für den symmetrischen Fall - mit II.2.8 !

Eine ausführliche Diskussion der beschriebenen dynamischen Modelle asymmetrischer Konflikte nebst einigen anderen Anwendungsmöglichkeiten und einem Satz über Nullsummenspiele (wo also $A^t = -B$ gilt; nach diesem Satz sind sämtliche Lösungskurven der Dynamik geschlossen) findet man in [10] .

II.8 Ein Exklusionssatz bei partieller Indifferenz

Hier soll gezeigt werden, wie in einer Situation der teilweisen Indifferenz - ein Spieler hat mindestens zwei Strategien mit gleichen Auszahlungen - die Dynamik des Evolutions- bzw. Lernprozesses den anderen Spieler zum Verzicht auf mindestens eine seiner reinen Strategien "zwingen" kann.

Doch zunächst eine vielleicht trivial anmutende Überlegung, deren Verallgemeinerung uns allerdings zum angedeuteten Ergebnis führen wird :

Angenommen, ein Spieler, etwa I , verwendet nur eine reine Strategie, etwa $\underline{e}_i$. Dann wird klarerweise der andere Spieler im Verlauf eines Lernprozesses diejenige Strategie $\underline{y}$ wählen, für die $\underline{e}_i.B\underline{y}$ maximal wird, sodaß offensichtlich, wenn

$$b_i =: \max_j b_{ij} \quad \text{ist,}$$

$$y_j = 0 \quad \forall j \ \text{mit} \ b_{ij} < b_i \ \text{sein muß,}$$

während für II keinerlei Veranlassung besteht, die ursprünglich gewählten relativen Anteile $y_j / y_{j'}$ für j,j' mit $b_{ij} = b_{ij'} = b_i$ zu verändern.

Für die den Lernprozeß beschreibende Lösungstrajektorie $(\underline{x}(t), \underline{y}(t))$ wird daher gelten :

$$\underline{x}(t) = \underline{e}_i \qquad \forall\, t \in \mathbb{R} ,$$

$$y_j(t) \underset{t \to +\infty}{\to} 0 \qquad \forall\, j \text{ mit } b_{ij} < b_i ,$$

$$y_j(t)/y_{j'}(t) = y_j(0)/y_{j'}(0) \qquad \forall\, t \in \mathbb{R} , \quad \forall\, j, j' \text{ mit } b_{ij} = b_{ij'} = b_i ,$$

wenn wir uns, wie im folgenden, der Einfachheit halber auf das kontinuierliche Modell (II.6.2) beschränken.

Obiges läßt sich aber nun einigermaßen verallgemeinern :

<u>Satz II.8.1</u> : Sei $(\underline{x}(t),\underline{y}(t))$ eine Lösung von (II.6.2), welche

$$\underline{x}(t) = \underline{x} \ (= \underline{x}(0)) \ \forall\, t \in \mathbb{R} \quad \text{, aber}$$

$$\underline{y}(t) \not\equiv \underline{y}(0) \in \mathring{\Gamma}_J \quad , \ J \subseteq \{1,\ldots,n\}$$

erfüllt; dann gilt :

$$\underline{y}(t) \to \underline{y} \in \partial\Gamma_J \quad \text{für } t \to +\infty .$$

Beweis : Seien für $i, j \in \{1, \ldots, n\}$

$$C_{ij} \; =: \; \underline{x}.B\underline{f}_i - \underline{x}.B\underline{f}_j \quad ; \text{ dann gilt}$$

für $i, j \in J$:

$$\left(\log \frac{y_i(t)}{y_j(t)} \right)^{\bullet} = \frac{\dot{y}_i(t)}{y_i(t)} - \frac{\dot{y}_j(t)}{y_j(t)} = C_{ij} \quad \text{nach (II.6.2),}$$

also $$\frac{y_i(t)}{y_j(t)} = \frac{y_i(0)}{y_j(0)} \exp C_{ij}.t \quad \forall\, t \in \mathbb{R} . \qquad (*)$$

Angenommen, es gäbe für alle $i \in J$ ein $j \in J$ mit $C_{ij} < 0$; dann gälte

$$y_i(t) = y_i(0) \frac{y_j(t)}{y_j(0)}.\exp C_{ij}.t \underset{t \to +\infty}{\to} 0 \quad \forall\, i \in J ,$$

also $\underline{y}(t) \to \underline{0}$ für $t \to +\infty$, ein Widerspruch zu $\underline{y}(t) \in S^n$!

Also gilt : es gibt ein $i \in J$ mit $C_{ij} \geq 0 \quad \forall\, j \in J$; wären alle $C_{ij} = 0$, so hieße das $\underline{y}(t) = y(0)$ $\forall\, t \in \mathbb{R}$ im Widerspruch zu unserer Annahme, da ja wegen $(*)$

$$\frac{y_i(t)}{y_j(t)} = \frac{y_i(0)}{y_j(0)} \quad \forall\, j \in J \quad \text{wäre, was zunächst}$$

$$1 = \sum_{j \in J} y_j(t) = \sum_{j \in J} \frac{y_i(t)}{y_i(0)} y_j(0) = \frac{y_i(t)}{y_i(0)}.1 \quad \text{, also}$$

$y_i(t) = y_i(0)$ $\forall\, t \in \mathbb{R}$ und schließlich $y_j(t) = y_j(0).1$ für alle $j \in J$ nach sich zöge, also $\underline{y}(t) \equiv y(0)$!

Daher ist $I_i =: \{ j \in J \,/\, C_{ij} > 0 \} \neq \emptyset$; für $j \in I_i$ gilt

$$y_j(t) = y_j(0) \frac{y_i(t)}{y_i(0)} \exp -C_{ij}.t \to 0 \quad , t \to +\infty \quad ,$$

daher folgt aus

$$1 = \sum_{j\in J} y_j(t) = \sum_{j\in I_i} y_j(t) + \sum_{j\in J\setminus I_i} y_j(t) =$$

$$= \sum_{j\in I_i} y_j(t) + \sum_{j\in J\setminus I_i} y_j(0)\,\frac{y_i(t)}{y_i(0)}$$ (wegen (*)) nun

$y_i(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} y_i(0)/S_i$, wobei $S_i =: \sum_{j\in J\setminus I_i} y_j(0)$ ($> y_i(0) > 0$,

da wegen $C_{ii} = 0$ auch $i \in J\setminus I_i$ gilt) , und somit

$y_j(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} y_j(0)/S_i \quad \forall j\in J\setminus I_i$; schließlich gilt für

$$y_j =: \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow \quad j\in I_i \cup (\{1,\dots,n\}\setminus J)\,, \\ y_j(0)/S_i & \Leftrightarrow \quad j\in J\setminus I_i \end{cases} :$$

$\underline{y} =: [y_1,\dots,y_n] \in \partial\Gamma_J$ (wegen $I_i \neq \emptyset$) und wegen obigem

$\underline{y}(t) \to \underline{y}$ für $t\to+\infty$, was zu zeigen war. $\square$

Nun zu den Bedingungen für die Existenz einer Trajektorie $(\underline{x}(t),\underline{y}(t))$ mit $\underline{x}(t) = \underline{x}(0) \quad \forall t\in\mathbb{R}$:

<u>Lemma II.8.2</u> : Sei $i \in \{1,\dots,m\}$ und $J \subseteq \{1,\dots,n\}$ fest;

sei $I_i(J) =: \{k \in \{1,\dots,m\} \,/\, a_{ij} = a_{kj} \;\forall j \in J\}$;

dann gilt :

$$\underline{e}_i \cdot A\underline{y} = \underline{e}_k \cdot A\underline{y} \quad \forall\, y \in \Gamma_J \iff k \in I_i(J) .$$

<u>Beweis</u> : " $\Rightarrow$" : Setze für $j \in J$ $\underline{y} = \underline{f}_j \in \Gamma_J \Rightarrow$
$\Rightarrow \; a_{ij} = a_{kj} \Rightarrow k \in I_i(J)$.

" $\Leftarrow$ " : Wegen $a_{ij} = a_{kj} \;\; \forall j \in J \,,\, \forall\, k \in I_i(J)$ gilt :

$$\underline{y} \in \Gamma_J \Rightarrow \underline{e}_i \cdot A\underline{y} = \sum_{j \in J} a_{ij}\, y_j = \sum_{j \in J} a_{kj}\, y_j = \underline{e}_k \cdot A\underline{y} \;. \square$$

<u>Satz II.8.3</u> : Seien $I \subseteq \{1,\dots,m\}$, $J \subseteq \{1,\dots,n\}$ fest.
Dann sind äquivalent :

(i) $I \subseteq I_i(J)$ für ein $i \in I$.

(ii) $I \subseteq I_i(J)$ für alle $i \in I$,

also $I \subseteq \bigcap_{i \in I} I_i(J)$.

(iii) $\underline{x}(0) \in \mathring{\Gamma}_I$, $\underline{y}(0) \in \Gamma_J \Rightarrow$

$\underline{x}(t) = \underline{x}(0) \;\; \forall\, t \in \mathbb{R}$.

Beweis : "(i) $\Leftrightarrow$ (ii)" ist wegen

$$k \in I_i(J) \Rightarrow I_i(J) = I_k(J)$$ trivial.

"(ii) $\Leftrightarrow$ (iii)" : wegen $\underline{y}(0) \in \Gamma_J$ gilt $\underline{y}(t) \in \Gamma_J \; \forall t \in \mathbb{R}$, sodaß nach II.8.2 $\underline{e}_i . A\underline{y}(t) = \underline{e}_k . A\underline{y}(t) \quad \forall k \in I_i(J) \geq I$ für alle $i \in I$ gilt; da $\underline{x}(t) \in \mathring{\Gamma}_I \; \forall t \in \mathbb{R}$, folgt $\dot{x}_i(t) = 0$. Alle oben angeführten Implikationen sind umkehrbar, wie man leicht einsieht (vgl. II.8.2 !). □

Bemerkung : Für $I = \{i\}$ ist wegen $i \in I_i(J)$ für alle $J \subseteq \{1,\ldots,n\}$ $I \subseteq I_i(J)$ erfüllt, sodaß mit II.8.3 gilt :

$$\underline{x}(0) = \underline{e}_i \quad \Rightarrow \quad \underline{x}(t) = \underline{e}_i \quad \forall t \in \mathbb{R} .$$

Diese Situation entspricht den anfangs des Abschnittes angestellten Überlegungen.

III. LITERATURVERZEICHNIS

[1] BOMZE, I.M. : Die Dynamik des verallgemeinerten Zermürbungskampfes; Diplomarbeit, Universität Wien (1981).

[2] BOMZE, I.M., P. SCHUSTER & K. SIGMUND : The role of Mendelian genetics in strategic models on animal behaviour; to appear in : Journal of theoretical biology (1982).

[3] BOMZE, I.M. : Über einige spieldynamische Modelle der Evolutionstheorie; Dissertation, Universität Wien (1982).

[4] DAWKINS, R. : The selfish gene; Oxford University Press (1976).

[5] HIRSCH, M. W. & S. SMALE : Differential equations, dynamical systems and linear algebra; Academic Press , New York (1972).

[6] LANG, S. : Real Analysis; Addison Wesley, Reading (1969).

[7] MAYNARD SMITH, J. : The theory of games and the evolution of animal conflicts; Journal of theoretical biology <u>47</u> , 209-221 (1971).

[8] PARTHASARATHY, T. & T.E.S. RAGHAVAN : Some topics in two-person games; R. Bellman (ed.), Modern analytic and computational methods in science and mathematics Vol. 22 , American Elsevier (1971).

[9] SCHUSTER,P. , K. SIGMUND , J. HOFBAUER & R. WOLFF :
Selfregulation of behaviour in animal societies I :
Symmetric Contests; Biological Cybernetics 40 , 1-8 (1981).

[10] SCHUSTER,P. , K. SIGMUND , J. HOFBAUER & R. WOLFF :
Selfregulation of behaviour in animal societies II :
Games between two populations without selfinteraction;
Biological Cybernetics 40 , 9-15 (1981).

[11] SCHUSTER,P. , K. SIGMUND , J. HOFBAUER , R. WOLFF ,
R. GOTTLIEB & P. MERZ :
Selfregulation of behaviour in animal societies III :
Games between two populations with selfinteraction;
Biological Cybernetics 40 , 17-25 (1981).

[12] SELTEN,R. : A note on evolutionary stable strategies in
asymmetric animal conflicts; Working papers 73 ,
Institute of mathematical economy , Bielefeld (1978).